

嫦娥二号飞越小行星试验中图塔蒂斯轨道确定与精度分析

胡寿村, 季江徽*, 赵玉晖, 孟林智

中国科学院紫金山天文台, 南京 210008

* E-mail: jijh@pmo.ac.cn

收稿日期: 2012-11-05; 接受日期: 2012-12-19

国家自然科学基金(批准号: 11273068, 10973044, 10833001)、中国科学院新兴与交叉学科布局试点项目(批准号: KJZD-EW-Z001)、江苏省自然科学基金(批准号: BK2009341)和紫金山天文台小行星基金会资助项目

摘要 本文利用兴隆、盱眙观测站及夏威夷大学、智利 CTIO 天文台在 2012 年 5~11 月获得的 300 多组观测数据, 以及历史光学测角与雷达测距测速资料, 构建动力学模型对 4179 号小行星图塔蒂斯(Toutatis)进行轨道确定, 获得的小行星定轨内符合精度优于 5 km. 本文给出了在飞越时刻(北京时间 2012 年 12 月 13 日 16:30)的图塔蒂斯轨道参数, 并对小行星定轨精度进行分析, 定轨结果被嫦娥二号飞越小行星试验任务正式采用, 实现其首次对图塔蒂斯的近距离飞越探测, 交会距离小于 3.2 km.

关键词

嫦娥二号
图塔蒂斯(Toutatis)
动力学模型
定轨精度

小行星一般指的是围绕太阳运行的体积较小的岩石或金属天体, 它们是太阳系形成初期遗留下来的原始“化石”, 对于研究太阳系起源和演化具有重要意义. 它们主要存在于大行星轨道之间, 如主带小行星分布在火星和木星轨道之间, 柯伊伯天体主要分布在海王星轨道之外等. 有些小天体受到木星和土星等巨行星的引力作用偏离了原先运行轨道, 而来到地球的附近甚至可以穿越地球的轨道, 从而有可能与地球发生碰撞, 即为所谓近地天体(Near-Earth Objects), 根据轨道特征可分为阿波罗(Apollo)型、阿莫尔(Amor)型、阿登(Aten)型和阿迪娜(Atira)型^[1]. 例如, 1908 年一颗直径约 50 m 的近地小天体在西伯利亚通古斯地区上空爆炸, 摧毁了大约 2000 km² 的森林, 尘埃飘浮在空中高达一万余米. 6500 万年前在墨西哥尤卡坦半岛一颗直径约 1 km 的近地小行星的撞击

毁灭了包括恐龙在内的地球上 75% 以上的生物. 地球诞生以来的四十多亿年中, 危险的“天外来客”给地球留下累累伤痕. 有关学者通过研究地面陨石坑在全球分布情况发现^[2]: 来自外空间撞击小天体的直径大于 200 m 的这种撞击事件平均约每 4.7 万年发生一次. 对于直径超过 1 km 的近地天体撞击地球可以导致全球气候发生灾难性改变, 彻底摧毁人类文明. 1994 年, 苏梅尔—利维 9 号彗星与木星发生“世纪碰撞”, 使人们更加关注地球自身的安全问题. 那么这些具有潜在威胁的小天体在早期太阳系中是如何形成和演化的? 其轨道特征和物理特性以及成份组成又是怎样的? 采取怎样的手段来发现和监测它们, 以及面对将来这种潜在的碰撞危险我们应该采取怎样的措施?

嫦娥二号(以下简称 CE-2)对近地小行星(4179)

Toutatis(图塔蒂斯)的飞越探测将有助于回答上述科学问题. 图塔蒂斯是一颗大偏心率的近地小行星, 半长径为 2.53 AU(天文单位), 偏心率 0.63, 倾角 0.45° , 近日距 0.94 AU, 轨道周期为 4.02 年, 大约每 4 年就近距离飞越地球一次. 图塔蒂斯的动力学特征和演化是小行星轨道演化研究中的一个热点. 研究表明, 木星的 3:1 平运动共振, 以及 v_5 , v_6 长期共振和 Kozai 共振^[3]是影响图塔蒂斯轨道演化的三大因素^[4, 5]. 此外, 其与地球、火星的近距离飞越又是导致其轨道不稳定的主要原因. 李雅普诺夫指数的计算结果表明其轨道只能预测大约 50 年^[6]. 图塔蒂斯离地球最近的一次飞越发生在 2004 年, 最近距离为 0.0104 AU (大约 4 个地月距离), 未来仍无法完全排除它碰撞大行星包括地球的可能^[7-9].

此外, 图塔蒂斯的不同寻常还在于它的自转状态很不规则^[10]. 一般情况下, 经过亿万年的演化, 小

行星最终会绕其最短轴自转, 这也是最稳定的自转状态. 但是早期地面观测发现, 图塔蒂斯处于缓慢的不稳定自转状态, 即所谓的非主轴自转, 它一方面绕着自己的形状最长轴以 5.41 d 的周期自转, 同时其长轴又以 7.35 d 的周期进动^[11, 12]. 图塔蒂斯的自转状态是受到地球或者其他大行星引力扰动后而形成的. 通过详细了解形成它目前自转状态的机制, 将有助于揭示很多早期太阳系小行星形成和演化的过程.

在 1992 和 1996 年图塔蒂斯近距离飞越地球的时候, 天文学家积累了大量的地面雷达观测数据, 从而推导出这颗小行星的详细形状模型^[12]. 它的形状非常复杂, 接近于一个 $4.5 \text{ km} \times 2.4 \text{ km} \times 1.9 \text{ km}$ 的三轴椭球体, 其主体由两大块组成, 同时包括很多小的形状单位, 比如存在一些类似陨石坑的形状、线性条纹构造等(见图 1).

精确确定图塔蒂斯的轨道对于 CE-2 飞越小行星

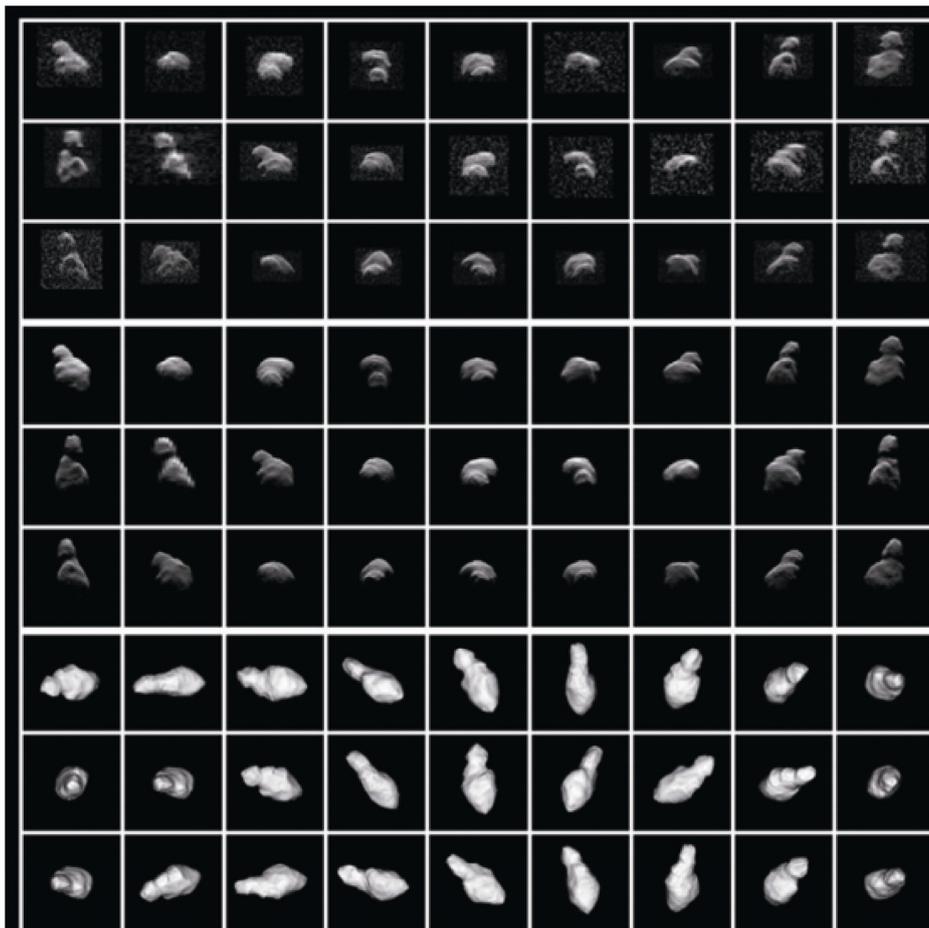


图 1 图塔蒂斯的形状模型^[12]

试验任务的顺利完成至关重要。中国科学院紫金山天文台的张家祥和张钰哲等人^[13, 14]较早地开始了小行星轨道确定的研究工作, 包括对小行星摄动模型的改进, 以及对 134 号小行星 Sopllosyne 等的轨道改进。早期国外学者针对图塔蒂斯也进行过轨道确定的工作^[15], 由于观测资料所限(只用到了 1993 年之前的数据), 定轨精度不高, 内符合精度在 40 km 左右。

小行星定轨的关键在于观测资料的覆盖弧段、数据精度以及力模型的准确度, 本文在此前工作的基础上对力模型进行了进一步的修正, 并综合国际小行星中心(MPC)已经公布的图塔蒂斯观测数据和中科院进行的联合光学测轨数据, 定轨得到了飞越时刻图塔蒂斯的轨道参数, 光学和雷达资料定轨结果的内符合精度在 5 km 以内。紫金山天文台的定轨结果被 CE-2 飞越小行星试验任务正式采用, 实现首次对图塔蒂斯的近距离飞越探测。

1 图塔蒂斯小行星的观测资料

中国科学院月球和深空探测总部组织紫金山天文台、国家天文台等观测台站在 2012 年 7~11 月对图塔蒂斯进行了地面光学观测, 获取了大量高质量的观测资料。紫金山天文台、国家天文台分别利用盱眙 0.4 m 望远镜, 兴隆 0.5 m 望远镜对小行星进行了观测, 获得了 170 组光学资料(截止到 2012 年 11 月 22 日)。紫金山天文台还组织了国际联合观测, 利用夏威夷大学 2.2 m 望远镜, 智利 Cerro Tololo 山 0.6 m 望远镜, 获得了 150 组光学资料(截止到 2012 年 11 月 22 日)。中国科学院对图塔蒂斯小行星的地面光学观测为此次飞越任务的顺利实施提供了重要的科学依据和工程保障。关于此次联合光学测轨数据基本情况见表 1。

此外, 我们还利用了国际上已公布的国内外现有的观测数据(包括测角、测距和测速资料)。以上这些资料综合起来就是本文定轨所采用的观测资

料, 其中光学资料的赤经、赤纬精度分别约为 0.15" 和 0.1", 而测距和测速资料的精度则分别为百米级和 cm/s 级。

2 动力学模型

2.1 时间系统、参考系和计算单位

描述图塔蒂斯小行星在太阳系中的运动, 首先需要约定时间系统和参考系。我们以连续计时的质心动力学时(TDB)作为运动方程的时间引数。在进行观测资料归算时用到了地球力学时(TT)和协调世界时(UTC), 具体转换关系可参阅文献[16~18]。以 J2000 日心平黄道系作为图塔蒂斯的运动参考系, 且 J2000 平黄赤交角的取值为 $\varepsilon = 23^\circ 26' 21''.448$ 。

在解算运动方程时, 可采用适当的单位, 文中采用如下长度单位和时间单位:

$$\begin{cases} [T] = \sqrt{\text{AU}^3 / GM_{\text{sun}}}, \\ [L] = \text{AU}, \end{cases} \quad (1)$$

其中 GM_{sun} 为日心引力常数, 取值为 $132712440017.987 \text{ km}^3/\text{s}^2$, 天文单位 AU 的取值为 149597870.691 km , 计算得到的时间单位为 $[T] = 58.13244086704896 \text{ d}$ 。

2.2 力学模型

考虑图塔蒂斯的运动时, 可将其假设为一个质点, 以位置和速度矢量 $\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}$ 作为状态量, 在日心黄道系下的运动方程为^[16, 19, 20]:

$$\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{A}_{\text{sun}} + \mathbf{A}_{\text{plt}} + \mathbf{A}_{\text{Ear}_{J_2}} + \mathbf{A}_{\text{pn}} + \mathbf{A}_{\text{ast}} + \mathbf{A}_{\text{SRP}}. \quad (2)$$

其中

$$\mathbf{A}_{\text{sun}} = -\frac{GM_{\text{sun}}}{r^3} \mathbf{r} \quad (3)$$

为太阳质点引力加速度;

$$\mathbf{A}_{\text{plt}} = \sum_i -GM_{\text{plt}}^{(i)} \left(\frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_{\text{plt}}^{(i)}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_{\text{plt}}^{(i)}|^3} + \frac{\mathbf{r}_{\text{plt}}^{(i)}}{(\mathbf{r}_{\text{plt}}^{(i)})^3} \right) \quad (4)$$

表 1 图塔蒂斯观测资料

来源	资料类型	数目	观测时间跨度
兴隆站	光学测角	83	2012-07-14~2012-11-13
盱眙站	光学测角	87	2012-09-19~2012-10-11
夏威夷大学天文台	光学测角	9	2012-10-04~2012-10-05
智利 CTIO 天文台	光学测角	142	2012-09-25~2012-11-01

为大天体(包括八大行星和月球)的质点引力摄动;

$$\mathbf{A}_{\text{Ear}_{J_2}} = -\frac{3J_2}{R_e^5} \mathbf{M} \begin{bmatrix} \left(\frac{5}{2} \frac{Z_e^2}{R_e^2} - \frac{1}{2}\right) \begin{pmatrix} X_e \\ Y_e \\ Z_e \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ Z_e \end{pmatrix} \end{bmatrix} \quad (5)$$

为地球 J_2 项引力摄动;

$$\mathbf{A}_{\text{pn}} = \frac{GM_{\text{sun}}}{c^2 r^2} \left[\left(\frac{4GM_{\text{sun}}}{r} - v^2 \right) \begin{pmatrix} \mathbf{r} \\ \mathbf{r} \end{pmatrix} + 4(\mathbf{r} \cdot \dot{\mathbf{r}}) \frac{\dot{\mathbf{r}}}{r} \right] \quad (6)$$

为太阳质心的后牛顿效应;

$$\mathbf{A}_{\text{ast}} = \sum_i -GM_{\text{ast}}^{(i)} \left(\frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_{\text{ast}}^{(i)}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_{\text{ast}}^{(i)}|^3} + \frac{\mathbf{r}_{\text{ast}}^{(i)}}{(\mathbf{r}_{\text{ast}}^{(i)})^3} \right) \quad (7)$$

为主带 67 颗质量较大的小行星的质点引力摄动^[21];

$$\mathbf{A}_{\text{SRP}} = \frac{3(1+\eta)}{2\rho_a d} \left(\rho_s \frac{\text{AU}^2}{r^3} \right) \mathbf{r} \quad (8)$$

为太阳辐射压对小行星轨道的摄动.

在以上各式中, $GM_{\text{pt}}^{(i)}$ 和 $GM_{\text{ast}}^{(i)}$ 分别为大天体和小行星的引力常数, $\mathbf{r}_{\text{pt}}^{(i)}$ 和 $\mathbf{r}_{\text{ast}}^{(i)}$ 为大天体和小行星的日心位置, J_2 为地球扁率, $\mathbf{R}_e = [X_e \ Y_e \ Z_e]^T$ 为地固坐标系下图塔蒂斯的位置, 可以从日心平黄道系下的 \mathbf{r} 转换而来, \mathbf{M} 为地固系到平黄道系的转换矩阵, c 为光速, v 为图塔蒂斯的日心速度, $\eta=0.13$ 为图塔蒂斯的反射系数, 近似取为图塔蒂斯的反照率^[22], $\rho_a = 2 \text{ g cm}^{-3}$ 为图塔蒂斯的平均密度, $d = 3 \text{ km}$ 为其等效直径, $\rho_s = 4.5605 \times 10^{-6} \text{ N m}^{-2}$ 为 1 AU 处的太阳辐射压强度. 由于图塔蒂斯存在与地球密近交会的运动弧段, 因此增加了地球的 J_2 项摄动.

在以上运动方程的计算过程中, 八大行星与月球星历采用了 JPL 的 DE405 历表^[23], 而摄动小行星的星历则用二体模型得到. 虽然由此得到的小行星星历精度不高, 但综合考虑定轨弧段和其摄动量级后可推知精度已经足够.

3 定轨原理

定轨过程即根据大量观测资料所进行的轨道改进过程. 在日心平黄道系下, 取小行星的轨道参数为位置与速度 $\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}$, 则状态量 \mathbf{X} 可以表示为 $\mathbf{X} = (\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}})^T$, 满足下列常微分方程初值问题^[20]:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{X}} = \mathbf{F}(\mathbf{X}, t), \\ t_0, \mathbf{X}(t_0) = \mathbf{X}_0, \end{cases} \quad (9)$$

其中 t_0, \mathbf{X}_0 分别为定轨历元时刻和状态量, 而观测量的测量值 \mathbf{Y} 与状态量 \mathbf{X} 则满足测量方程:

$$\mathbf{Y} = \mathbf{H}(\mathbf{X}, t) + \mathbf{V}, \quad (10)$$

其中 \mathbf{V} 为测量随机误差. 本文处理站心测角 (α, δ) 、站心测距 ρ 和站心测速型资料 $\dot{\rho}$, 先要把这些观测资料统一转换到地心系的 $(\alpha, \delta), \rho, \dot{\rho}$. 在地心系下有以下观测量理论值的计算表达式:

$$\begin{cases} \alpha = \arctan \left(\frac{Y - Y_E}{X - X_E} \right), \\ \delta = \arctan \left(\frac{Z - Z_E}{\rho} \right), \end{cases} \quad (11)$$

$$\rho = |\mathbf{R} - \mathbf{R}_E|, \quad (12)$$

$$\dot{\rho} = \frac{1}{\rho} (\mathbf{R} - \mathbf{R}_E) \cdot (\dot{\mathbf{R}} - \dot{\mathbf{R}}_E), \quad (13)$$

其中 $\mathbf{R} = [X \ Y \ Z]^T$ 和 $\mathbf{R}_E = [X_E \ Y_E \ Z_E]^T$ 分别是图塔蒂斯和测站在 J2000 地心平赤道系的位置矢量, 前者可以从图塔蒂斯的日心平黄道系位置矢量 \mathbf{r} 转换而来, 后者可以从测站的地固坐标系转换得到^[16, 17].

若将待估状态量 \mathbf{X}_0 的近似值记为 \mathbf{X}_0^* , 则形式上有

$$\mathbf{X}^*(t) = \mathbf{X}(t_0, \mathbf{X}_0^*; t), \quad (14)$$

将上述测量方程线性展开后, 舍弃高阶项, 可以得到定轨的条件方程:

$$\mathbf{y} = \tilde{\mathbf{B}} \mathbf{x}_0 + \mathbf{V}, \quad (15)$$

其中 \mathbf{x}_0 为 \mathbf{X}_0 的改正值, \mathbf{y} 为残差:

$$\mathbf{x}_0 = \mathbf{X}_0 - \mathbf{X}_0^*, \quad (16)$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{Y} - \mathbf{H}(\mathbf{X}^*, t), \quad (17)$$

$$\tilde{\mathbf{B}} = \left(\left(\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial \mathbf{X}} \right) \left(\frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \mathbf{X}_0} \right) \right)_{\mathbf{X}^*}. \quad (18)$$

$\tilde{\mathbf{B}}$ 矩阵中的 $\left(\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial \mathbf{X}} \right)$ 是测量矩阵, 可以用解析公式来描述, $\left(\frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \mathbf{X}_0} \right)$ 为状态转移矩阵, 可以加入到状态微分方程中一起计算得到.

以上条件方程(15)是一个超定方程组, 这里用传

统的加权批处理最小二乘方法来求解, 权重取为观测资料方差的倒数^[20].

由于方程进行了线性化处理, 因此需要用迭代的方法来逐步减小残差平方和. 但是在首次迭代计算时需要知道 \mathbf{X}_0 的初始值, 这里采用拉普拉斯初轨计算方法短弧定轨得到了图塔蒂斯的初始轨道^[16].

综上, 图塔蒂斯小行星的定轨过程主要涉及以下 4 个部分:

- 1) 运动方程的积分计算;
- 2) 观测量的理论归算;
- 3) $\tilde{\mathbf{B}}$ 矩阵的计算;
- 4) 条件方程的最优化求解.

4 定轨结果与精度分析

我们利用截止到 2012 年 12 月 3 日之前的数据, 根据以上方法, 分别考虑只有光学资料与光学和雷达资料两种情况, 定出 CE-2 飞越时刻(北京时间

2012 年 12 月 13 日 16:30)图塔蒂斯的轨道参数, 见表 2.

在 2012 年 12 月 4~8 日期间, 美国的金石(Goldstone)雷达站对图塔蒂斯小行星进行了观测, 新获得 4 组雷达观测数据(之前的只到 2008 年). 2012 年 12 月 12 日, 在 CE-2 飞越任务之前, 我们再次将这 4 组新的雷达数据加入之后的定轨结果见表 3.

从以上结果可知, 雷达数据的引入(包括新增的 4 组雷达数据)能够比较显著地降低定轨的 RMS, 这与文献[15]的结论是一致的. 光学和雷达的定轨结果在 3σ 意义下的位置误差在 5 km 以下, 这些结果在 CE-2 飞越小行星试验任务中得到了直接应用, 满足了其对图塔蒂斯的近距离探测任务需求.

5 总结和展望

本文利用尽可能多的国内外数据(包括兴隆、盱眙观测站等在飞越前集中获取光学资料), 建立摄动模型对 4179 号小行星图塔蒂斯进行精确轨道确定,

表 2 图塔蒂斯的定轨结果 (观测资料截止到 2012 年 12 月 3 日)

飞越时刻, J2000 日心平黄道系, 光学			
	数值	rms	单位
X	27686114.638389	19.2375	km
Y	149087464.76495	9.2839	km
Z	-834617.47065533	2.1877	km
V_x	-34.063524147849	7.3955×10^{-7}	km/s
V_y	15.488072860475	3.1786×10^{-6}	km/s
V_z	0.15087942689631	2.8260×10^{-7}	km/s
飞越时刻, J2000 日心平黄道系, 光学和雷达(52 组)			
	数值	rms	单位
X	27686094.426639	0.4986	km
Y	149087484.02083	0.3157	km
Z	-834610.95231832	0.9643	km
V_x	-34.063523127446	2.7202×10^{-8}	km/s
V_y	15.488069474402	1.2794×10^{-7}	km/s
V_z	0.15088027344865	9.8478×10^{-8}	km/s

表 3 图塔蒂斯的定轨结果 (观测资料截止到 2012 年 12 月 12 日)

飞越时刻, J2000 日心平黄道系, 光学和雷达(56 组)			
	数值	rms	单位
X	27686105.3346426	0.1947	km
Y	149087478.397832	0.1992	km
Z	-834607.001078813	0.9004	km
V_x	-34.0635227612465	2.0430×10^{-8}	km/s
V_y	15.4880716106558	8.4633×10^{-8}	km/s
V_z	0.150880611163600	9.2426×10^{-8}	km/s

得到了飞越时刻(2012年12月13日16:30)的高精度轨道参数,并对结果进行了分析,定轨结果被嫦娥二号飞越小行星试验任务正式采用,实现其首次对图塔蒂斯的近距离飞越探测,交会距离小于3.2 km.

在未来的工作中,还需要对小行星定轨方法开展进一步的研究,例如,精化力模型,对不同的天体,差别化考虑摄动因素,对太阳扁率项摄动、Yarkovsky效应^[24]以及YORP效应^[25]等的影响量级进行评估;某些动力学参数也可作为待估参数在定轨过程中一起解算.

众所周知,对于不具有自主导航能力的小行星飞越探测,精确的小行星轨道至关重要.小行星的星

历不同于大行星星历,后者因为目标较大,观测资料比较丰富,目前都有现成的高精度数值历表供使用.而小行星目标比较小,观测弧段较短,定轨精度远不如大行星.因此,对于一般的小行星,需要在任务期间甚至任务进行之前就进行主动的联合观测才能得到满足任务需求的高精度星历.为了保障我国未来小行星探测任务的顺利进行,充分支持我国未来的深空探测任务,降低工程实施风险,除了国外望远镜的协同配合与支持,特别需要提高我国自主小行星观测设备的观测能力,在国内升级现有的观测设备,布局新的天文望远镜,建立和形成我国深空探测地面天文观测支撑系统.

参考文献

- 1 Bottke W F Jr, Cellino A, Paolicchi P, et al. Asteroid III. Arizona: University of Arizona Press, 2002
- 2 Stuart J S. Observational constraints on the number, albedos, sizes, and impact hazards of the near-Earth asteroids. Dissertation of Doctoral Degree, Boston: MIT, 2003
- 3 Kozai Y. Secular perturbations of asteroids with high inclination and eccentricity. *Astron J*, 1962, 67: 591–598
- 4 Ji J H, Liu L. Dynamics of NEAs: The protection mechanism of secular resonances. *Chin J Astron Astrophys*, 2001, 25: 147–152
- 5 Ji J H, Liu L. Revisit of dynamical mechanisms of transporting asteroids in the 3:1 resonance to the near-earth space. *Chin J Astron Astrophys*, 2007, 7: 148–154
- 6 Whipple A L, Shelus P J. Long-term dynamical evolution of the minor planet (4179) Toutatis. *Icarus*, 1993, 105: 408–419
- 7 Sitarski G. Motion of the minor planet 4179 Toutatis: Can we predict its collision with the earth? *Acta Astronom*, 1998, 48: 547–561
- 8 Benest D, Froeschle C, Gonczi R. Stochasticity of the Apollo asteroid 4179 Toutatis. *Astron Soc Pacif Conf Ser*, 1994, 63: 7–14
- 9 Wlodarczyk I. Prediction of the motion of asteroids and comets over long intervals of time. *Acta Astronom*, 2001, 51: 357–376
- 10 Spencer J R, Akimov L A, Angeli C, et al. The lightcurve of 4179 Toutatis: Evidence for complex rotation. *Icarus*, 1995, 117: 71–89
- 11 Hudson R S, Ostro S J. Shape and non-principal axis spin state of asteroid 4179 Toutatis. *Science*, 1995, 270: 84–86
- 12 Hudson R S, Ostro S J, Scheeres D J. High-resolution model of asteroid 4179 Toutatis. *Icarus*, 2003, 161: 346–355
- 13 张家祥, 王德昌, 徐婉芬. 小行星的行星摄动,轨道改进和冲日星历表全部连续的自动计算. *天文学报*, 1965, 1: 77–90
- 14 张钰哲, 张家祥. 小行星(134)Sophrisyne的轨道改进. *天文学报*, 1956, 1: 86–92
- 15 Krivova N V, Yagudina E I, Shor V A. The orbit determination of (4179) Toutatis from optical and radar data. *Planet Space Sci*, 1994, 42: 741–745
- 16 刘林, 胡松杰, 王歆. 航天动力学引论. 南京: 南京大学出版社, 2006
- 17 李广宇. 天球参考系变换及其应用. 北京: 科学出版社, 2010
- 18 李广宇, 倪维斗, 田兰兰. PMOE2003行星历表框架(I)数学模型. *紫金山天文台台刊*, 2003, 22: 12–30
- 19 Ji J H, Liu L. The Problem of the near-Earth Asteroids Encountering the Earth. *Sci China Ser A*, 2000, 43: 1114–1120
- 20 刘林, 侯锡云. 深空探测器轨道力学. 北京: 电子工业出版社, 2012
- 21 Folkner W M, Williams J G, Boggs D H. The planetary and lunar ephemeris DE 421. IPN Progress Report 42-178, 2009
- 22 JPL Small-Body Database Browser: 4179 Toutatis (1989 AC). <http://ssd.jpl.nasa.gov/sbdb.cgi?sstr=1989AC>
- 23 JPL DE405 Ephemeris. <ftp://ssd.jpl.nasa.gov/pub/eph/planets/ascii/>
- 24 Capek D, Vokrouhlicky D. Accurate model for the Yarkovsky effect. In: Proceedings IAU Colloquium NO. 197. Cambridge: Cambridge University Press, 2005. 171–178
- 25 Bottke W F Jr, Vokrouhlicky D, Rubincam D P, et al. The Yarkovsky and YORP effects: Implications for asteroid dynamics. *Annu Rev Earth Pl Sc*, 2006, 34: 157–191