



论文

声波驱动下气泡群的非线性共振

王成会, 胡静, 曹辉, 林书玉*, 安帅

陕西师范大学超声学重点实验室, 西安 710062

*联系人, E-mail: sxsdsxs@snnu.edu.cn

收稿日期: 2015-01-28; 接受日期: 2015-03-18; 网络出版日期: 2015-04-17

国家自然科学基金(批准号: 11204168, 11474191, 11374199, 11374200, 11474192)、国家留学基金和陕西省自然科学基金(编号: 2013JQ1017)资助项目

摘要 由于次级声辐射的影响, 泡群内的气泡处于群振动状态. 基于气泡耦合振动方程, 利用逐级近似法分析了气泡非线性声响应, 得到了基频成分、一阶和二阶谐频成分、一阶和二阶次谐频成分的幅频关系式, 并以此为基础分析了气泡在基频共振区($\omega \approx \omega_0$)、一阶和二阶谐频共振区($\omega \approx \omega_0/2$, $\omega \approx \omega_0/3$)的声响应特征. 数值分析表明: 泡群内气泡数密度以及气泡初始半径对其共振声响应影响显著, 而气泡在泡群内所处的相对位置影响相对较小. 气泡的次谐频共振($\omega \approx 2\omega_0$, $\omega \approx 3\omega_0$)只有在驱动压力幅值超过一定阈值后才可能发生, 且压力阈值随着气泡初始半径的增加而减小.

关键词 次级声辐射, 非线性声响应, 耦合振动, 共振

PACS: 43.25.+y, 43.35.+d, 46.40.Ff, 47.55.dd

doi: 10.1360/SSPMA2015-00047

1 引言

超声波换能器连接变幅杆能够在液体内激发较高强度的声波, 从而引起较为剧烈的空化效应, 能够达到粉碎细胞、增强物质传输和化学反应等效果. 强超声波作用下大量的气泡聚集在辐射面附近形成局部振荡泡群^[1-3]. 声场中气泡除受源声场影响之外, 气泡的径向振动在液体中引起次级声辐射并影响邻近气泡的运动和液体内的声场分布^[4-8]. Bjerknes 最早对气泡间的相互作用进行了描述, 声波作用下的气泡间存在相互吸引或排斥的现象, 这种现象与气泡振动辐射形成的次级声场的声压梯度有关, 振动气泡次级声辐射使其周围气泡受到次级 Bjerknes 力作

用^[8,9]. 气泡之间的次级相互作用必将影响彼此的振动形态和总声场内气泡的分布状态. 自空化现象被发现以来, 气泡动力学的研究逐步从单气泡动力学过渡到双泡和多泡动力学^[10-14], 为理解气泡在声波作用下的动力学特征以及对声能量利用效率的影响做了大量而有效的工作^[15-20], 但人们对气泡的群振动的耦合机制仍在探索之中.

通常情况下, 一定强度声波作用下的空化气泡作非线性受迫振动, 气泡径向运动除含有基频振动模式 ω 外, 还包含谐频成分 $n\omega$ ($n=1, 2, \dots$) 和次谐频成分 $n\omega$ ($n=1/2, 1/3, \dots$) 等, 气泡在液体中构成一个复杂的声响应系统^[21-26]. 通过分析气泡在声波作用

引用格式: 王成会, 胡静, 曹辉, 等. 声波驱动下气泡群的非线性共振. 中国科学: 物理学 力学 天文学, 2015, 45: 064301

Wang C H, Hu J, Cao H, et al. Nonlinear resonance of bubble cluster driven by ultrasound (in Chinese). Sci Sin-Phys Mech Astron, 2015, 45: 064301, doi: 10.1360/SSPMA2015-00047

下的行为模式有利于清楚地认识声能量与液体的相互作用, 如通过分析气泡域内噪声是否含有次谐波信号可帮助判断是否形成空化效应等^[21,22]. 气泡的声响应是一个重要的研究课题, 研究手段也在不断更新, 如通过数值手段可分析气泡在不同频率声波作用下的形态变化, 而近年来发展的高速摄影技术还可记录声波作用下气泡运动的实时影像等^[23,24]. 尽管如此, 适合弱非线性环境的逐级近似法可帮助我们分析气泡在声波作用下的非线性行为, 认识气泡运动发展的本质. 本文将结合球状泡群内气泡振动方程, 利用逐级近似法, 分析弱非线性情形气泡在不同频率声波作用下的声响应状态, 探索决定其共振响应的因素.

2 基本方程

超声波液体中超声波作用下的振动气泡将在介质中形成次级声辐射, 其在介质中产生的附加压力为^[15]

$$p_{ad} = \frac{\rho}{r} \frac{d}{dt} (R^2 \dot{R}), \quad (1)$$

式中 R 为振动气泡的瞬时半径, r 为介质中点到气泡中心的距离, ρ 为介质密度. 多泡系统中气泡的运动将受到周围气泡的次级声辐射影响, 因此, 有相互作用的气泡间将形成耦合振动系统. 在单气泡动力学方程的基础上引入相互作用项后可得到描述多泡系统内气泡运动的动力学方程^[12], 即

$$\begin{aligned} & \left(1 - \frac{\dot{a}}{c} + M\right) a \ddot{a} + \left(\frac{3}{2} - \frac{\dot{a}}{2c} + 2M\right) \dot{a}^2 \\ & = \left(1 + \frac{\dot{a}}{c}\right) \frac{p_b}{\rho} + \frac{a}{\rho c} \frac{dp_b}{dt}, \end{aligned} \quad (2)$$

式中 a 表示泡群中气泡的瞬时半径, $M = ha$, 其中

$$h = \frac{N}{r_{\text{clust}}} \left(1 - \frac{r_r^2}{3r_{\text{clust}}^2}\right),$$

c 为液体中的声速, r_r 为该运动气泡在气泡总数 N 、半径为 r_{clust} 的泡群内的相对位置; 压力 p_b 可表示为

$$\begin{aligned} p_b = & \left(p_0 + \frac{2\sigma}{a_0}\right) \left(\frac{a_0}{a}\right)^{3\kappa} - \frac{2\sigma}{a} - \frac{4\eta\dot{a}}{a} \\ & - p_0 + p_a \sin \omega t, \end{aligned} \quad (3)$$

式中 p_0 为流体静压力, σ 和 η 分别为液体的表面张力系数和黏度系数; a_0 为气泡环境半径, κ 为气体

多方指数; p_a 和 $\omega = 2\pi f$ 分别为驱动声波压力和频率. 从方程(2)可以看出, 气泡在泡群中的位置不同, 其运动不同.

假定所有气泡均在外声场的驱动下做小振幅振动. 令 $a = a_0(1+x)$, 式中 x 为气泡壁的无量纲振动位移, 将(2)式中包含气泡半径 a 的项按小量 x 作泰勒展开, 约去 x 的 4 阶以上的高阶小量后, 有

$$\begin{aligned} \ddot{x} + 2b\dot{x} + \omega_0^2 x = & \xi \cos \omega t + \alpha_1 x^2 - \xi_1 x \cos \omega t \\ & - b_1 \dot{x}^2 + b_2 x \dot{x} - \alpha_2 x^3, \end{aligned} \quad (4)$$

式中 $\omega_0 = \sqrt{m_1/m_0}$ 为泡群中气泡的自然频率, $b = (m_0^{-1}/2)(m_1 a_0/c + 4\eta)$ 为系统衰减系数, $\xi = m_0^{-1} p_a$, 其中

$$\begin{aligned} m_0 = & \rho a_0^2 [1 + ha_0 + 4\eta/(\rho c a_0)], \\ m_1 = & 3\kappa p_0 + (3\kappa - 1)2\sigma/a_0, \\ m_2 = & \frac{9}{2} \kappa(\kappa + 1)(p_0 + 2\sigma/a_0) - 4\sigma/a_0. \end{aligned}$$

其他各参量表达式详见附录.

由于(4)式包含了气泡振动无量纲位移 x 的二阶和三阶小量, 它可帮助我们分析气泡在声波驱动下小振幅振动时呈现出的非线性共振现象. 由方程的非线性特征知, 气泡在小振幅声波的驱动下的径向振动除包含基频分量(ω)外, 还可能包含两个谐频分量($2\omega, 3\omega$)和两个次谐频分量($\omega/2, \omega/3$). 任何一分量频率接近气泡自然频率 ω_0 时均可能形成共振现象, 因此在气泡的非线性振动响应频谱中, 我们可观察到谐频成分和次谐频成分, 还可能观察到谐频共振和次谐频共振现象.

3 气泡的非线性共振

3.1 基频共振

设气泡小振幅振动下方程(4)的稳态解为

$$\begin{aligned} x = & C \cos(\omega t + \varphi) + C^2 [c_0 + c_1 \cos 2(\omega t + \varphi)] \\ & + C \xi_1 (c_2 \cos \varphi + c_3 \cos(2\omega t + \varphi)). \end{aligned} \quad (5)$$

利用逐级近似法, 代一级近似解 $x = C \cos(\omega t + \varphi)$ 入方程(4), 可得 c_0, c_1, c_3 和 c_4 的表达式近似为

$$\begin{aligned} c_0 \approx & \frac{1}{2}(\alpha_1 - \omega^2 b_1)/\omega_0^2, \quad c_1 \approx \frac{1}{2}(\alpha_1 + \omega^2 b_1)/(\omega_0^2 - 4\omega^2), \\ c_2 \approx & -\frac{1}{2}\omega_0^{-2}, \quad c_3 \approx -\frac{1}{2}(\omega_0^2 - 4\omega^2)^{-1}. \end{aligned}$$

代(5)式入(4)式, 气泡稳态基频振动振幅 C 和初相位 φ 满足的方程可近似表示为

$$(\omega_0^2 - \omega^2 - g_0 \xi_1^2)C - g_1 C^3 = \xi \cos \varphi - \frac{\xi_1^2 C C_2}{2} \cos 2\varphi, \quad (6a)$$

$$-2\omega b C = \xi \sin \varphi - \frac{1}{2} \xi_1^2 C C_2 \sin 2\varphi, \quad (6b)$$

式中参数分别为

$$g_0 = \frac{1}{2}(c_2 + c_3)$$

和

$$g_1 = \alpha_1(2c_0 + c_1) - 2\omega^2 b_1 c_1 - \frac{3}{4} \alpha_2.$$

当驱动声波频率 $\omega = \omega_0 + \varepsilon$, ($\varepsilon \ll \omega_0$) 时, 我们可通过变量 ε 研究弱非线性振动气泡在自然频率 ω_0 的邻域内的振动状态变化特征, 代入(6)式, 近似有

$$\frac{C^2 \left[(2\omega_0 \varepsilon - \omega_0^{-2} \xi_1^2 / 6 + g_{10} C^2)^2 - \omega_0^{-4} \xi_1^4 C^2 / 16 + 4\omega_0^2 b^2 \right]}{(2\omega_0 \varepsilon - 5\omega_0^{-2} \xi_1^2 / 12 + g_{10} C^2)^2 + 4\omega_0^2 b^2} = \xi^2, \quad (7a)$$

$$\tan \varphi = \frac{2\omega_0 b}{(2\omega_0 \varepsilon - 5\omega_0^{-2} \xi_1^2 / 12) + g_{10} C^2}, \quad (7b)$$

式中

$$g_{10} \approx \frac{5\alpha_1}{6\omega_0^2} (\alpha_1 - \omega_0^2 b_1) - \frac{3}{4} \alpha_2.$$

通过逐级近似法得到的表达式(7a)含有气泡基频振动幅值的高次项, 因此在给定驱动声波压力和频率作用下, 其给出的基频振动幅值可能不止一个, 说明基频振动幅值在自然频率 ω_0 附近对驱动外力的依赖关系具有明显的非线性特征, 同时我们发现声波作用下气泡非线性振动时基频成分的共振响应频率相对于 ω_0 有偏移量 ε_r , 将式(7a)对 ε 求导且让 $dC/d\varepsilon = 0$, 近似有

$$\varepsilon_r = \omega_0^{-3} \xi_1^2 / 3 - \omega_0^{-1} g_{10} C^2 / 2. \quad (8)$$

从(8)式可以看出, 驱动声波振幅和气泡声响应幅值共同影响受迫振动气泡基频共振响应频率相对于自然频率 ω_0 的偏移.

3.2 谐频共振

当驱动声波频率接近 $\omega_0/2$ 或 $\omega_0/3$ 时, 驱动声波还可能引起气泡的一阶或二阶谐频共振(即气泡自然频率 ω_0 约等于驱动声波频率 ω 的整数倍时引起的

共振响应). 此时, (5)式给出的基频振动和倍频振动的简单关系将不再成立, 气泡振动除含有基频分量和共振谐频分量外, 还含有二者的相互作用分量^[21,22]. 将逐级近似法中的试探解变成

$$x_1 = C_0 \cos(\omega t + \varphi_0) + C_1 \cos(2\omega t + \varphi_1), \quad (9)$$

式中基频振动振幅 C_0 和初相位 φ_0 分别为

$$C_0 = \xi \left[(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\omega^2 b^2 \right]^{-1/2},$$

$$\tan \varphi_0 = 2\omega b (\omega_0^2 - \omega^2)^{-1}.$$

当驱动声波频率偏离基频共振区, 气泡的基频振幅相对较小, 若有 $2\omega b \ll |\omega_0^2 - \omega^2|$, 基频振动初相位可近似认为等于 0, 从而有 $C_0 \approx \xi |\omega_0^2 - \omega^2|^{-1}$. 将(9)式代入(4)式, 等式两侧 $\cos 2\omega t$ 和 $\sin 2\omega t$ 系数相等, 近似有

$$(\omega_0^2 - 4\omega^2 + g_{11} C_1^2) C_1^2 + 16\omega^2 b^2 C_1^2 = F_1, \quad (10a)$$

$$\tan \varphi_1 \approx 4\omega b (\omega_0^2 - 4\omega^2 + g_{11} C_1^2)^{-1}, \quad (10b)$$

式中

$$g_{11} = 3\alpha_2/4 - \alpha_1^2/\omega_0^2,$$

$$F_1(\omega) = \frac{1}{4} \left[(\alpha_1 + \omega^2 b_1)^2 + \omega^2 b_2^2 \right] C_0^4 - \frac{1}{2} (\alpha_1 + \omega^2 b_1) \xi_1 C_0^3 + \frac{1}{4} \xi_1^2 C_0^2.$$

从(10)式可以看出, 若令 $\omega = \omega_0/2 + \varepsilon$, ($\varepsilon \ll \omega_0$), 近似有

$$C_1 = \sqrt{\frac{F_1(\omega_0/2)}{(4\omega_0 \varepsilon - g_{11} C_1^2)^2 + 4\omega_0^2 b^2}}, \quad (11)$$

此式表明, 当 $\varepsilon = g_{11}/(4\omega_0)$ 时, 一阶谐频振动幅值取得极大值, 即气泡在 $\omega_0/2$ 附近作受迫振动时存在一阶谐频共振区, 在此区域内, 气泡的整体运动将增强.

同理, 我们可探讨声波作用下的二阶谐频 ($\omega \rightarrow \omega_0/3$) 共振. 二阶谐频振动的能量来源于基频振动和一阶谐频振动, 将(9)式代入(4)式仅保留频率为 3ω 的各项, 等式两侧 $\cos 3\omega t$ 和 $\sin 3\omega t$ 系数相等, 从而类比得到二阶谐频振幅 C_2 和初相位 φ_2 满足的方程近似为

$$(\omega_0^2 - 9\omega^2 + g_{11} C_2^2) C_2^2 + 36\omega^2 b^2 C_2^2 = F_2, \quad (12a)$$

$$\tan \varphi_2 \approx 6\omega b (\omega_0^2 - 9\omega^2 + g_{11}C_2^2)^{-1}, \quad (12b)$$

式中 $F_2 \approx \left(C_0 C_1 - \frac{\xi_1 C_1}{2} - \frac{\alpha_2 C_0^3}{4} \right)^2$, $C_1 \approx \frac{\sqrt{F_1(\omega)}}{\omega_0^2 - 4\omega^2}$. 比较(12)式和(10)式可看出, 当驱动声波频率处于邻近 $\frac{\omega_0}{3}$ 的频域内, 二阶谐频振动幅值存在极大值, 即存在二阶谐频共振现象. 同理, 若令 $\omega = \omega_0/3 + \varepsilon$, ($\varepsilon \ll \omega_0$), 代入(12)式, 近似有

$$C_2 \approx \sqrt{\frac{F_2(\omega_0/3)}{(6\omega_0\varepsilon - g_{11}C_2^2)^2 + 4\omega_0^2 b^2}}. \quad (13)$$

3.3 次谐频共振

当驱动声波频率接近 $2\omega_0$ 或 $3\omega_0$ 时, 驱动声波还可能引起气泡的次谐频共振(即气泡自然频率 ω_0 约等于驱动声波频率 ω 的整数分之一时引起的共振响应). 次谐频振动能量来源依然是基频振动能量, 从产生的物理机制看, 主要源于气泡各振动分量间以及气泡周围介质声振动与气泡振动分量间的相互作用. 代 $C_0 \cos \omega t + C_3 \cos(\omega t/2 + \varphi_{1/2})$ 入(4)式, 等式左右两侧 $\cos \omega t/2$ 和 $\sin \omega t/2$ 系数相等, 可得频率为 $\omega/2$ 的一阶次谐频振动幅值表达式近似为

$$\begin{cases} C_3 = 0, \\ C_3^2 = \frac{1}{g_{11}} \left(\frac{\omega^2}{4} - \omega_0^2 \pm \Delta(\omega) \right). \end{cases} \quad (14)$$

式中 $\Delta(\omega) = \sqrt{(2\alpha_1 C_0 - \xi_1)^2 - \omega^2 b^2}$. 当频率接近 $2\omega_0$, 方程(4)给出一阶次谐频振动有 3 个分支, 从(14)式可以看出, 要想得到非零解必须满足

$$(2\alpha_1 C_0 - \xi_1)^2 - \omega^2 b^2 \geq 0, \quad (15)$$

$$\frac{1}{g_{11}} \left[\frac{\omega^2}{4} - \omega_0^2 \pm \Delta(\omega) \right] > 0. \quad (16)$$

由(15)式知

$$\xi \geq \left(\frac{\alpha_1}{\omega^2 - \omega_0^2} - \frac{1}{2} \frac{1 + 2ha_0}{1 + ha_0} \right)^{-1} \omega b = \xi_r. \quad (17)$$

此式表明, 频率为 $\omega/2$ 的一阶次谐频振动分量只有在驱动声波压力幅值达到阈值 $m_0 \xi_r$ 后才会形成. 由(16)式知, 在一定的频率范围内驱动声波超过一定幅值之后存在两非零解, 从稳定性分析, (14)式中“ $\pm$ ”取

“-”时得到的解为非稳定解^[21]. 当 $g_{11} > 0$ 时, 一阶次谐频振动稳态非零解存在的频率范围近似为 $\omega > 2\sqrt{\omega_0^2 - \Delta(2\omega_0)}$, 而当 $g_{11} < 0$ 时, 稳态非零解频率范围为 $\omega < 2\sqrt{\omega_0^2 + \Delta(2\omega_0)}$; 当 $g_{11} > 0$ 时, 非稳态解存在的频率范围为 $\omega > 2\sqrt{\omega_0^2 + \Delta(2\omega_0)}$, 而当 $g_{11} < 0$ 时, 频率范围为 $\omega < 2\sqrt{\omega_0^2 - \Delta(2\omega_0)}$. 在此范围之外次谐频振幅为零, 属稳态解.

同理, 代 $C_0 \cos \omega t + C_4 \cos(\omega t/3 + \varphi_{1/3})$ 入(4)式, 等式左右两侧 $\cos \omega t/3$ 和 $\sin \omega t/3$ 系数相等, 可得频率为 $\omega/3$ 的一阶次谐频振动幅值表达式近似为

$$\begin{cases} C_4 = 0, \\ C_4^2 = \frac{1}{g_{11}^2} \left[2g_{11} \left(\frac{\omega^2}{9} - \omega_0^2 \right) + \frac{9}{16} (\alpha_2 C_0)^2 \pm \Delta_1(\omega) \right]. \end{cases} \quad (18)$$

式中

$$\Delta_1(\omega) =$$

$$\sqrt{\frac{81}{256} (\alpha_2 C_0)^4 - \frac{9}{4} g_{11} \left(\omega_0^2 - \frac{1}{9} \omega^2 \right) (\alpha_2 C_0)^2 - \frac{16}{9} g_{11}^2 \omega^2 b^2}.$$

和一阶次谐频振动类似, 频率为 $\omega/3$ 的二阶次谐频振动存在非零解的条件是

$$\begin{aligned} & \frac{81}{256} (\alpha_2 C_0)^4 - \frac{9}{4} g_{11} \left(\omega_0^2 - \frac{1}{9} \omega^2 \right) (\alpha_2 C_0)^2 \\ & - \frac{16}{9} g_{11}^2 \omega^2 b^2 \geq 0, \end{aligned} \quad (19)$$

$$2g_{11} \left(\frac{\omega^2}{9} - \omega_0^2 \right) + \frac{9}{16} (\alpha_2 C_0)^2 \pm \Delta_1(\omega) > 0. \quad (20)$$

(18)式表明, 二阶次谐频振动同样存在阈值压力幅值, 当驱动声波频率接近 $3\omega_0$ 同样可观察到二阶次谐频共振现象. 设 $\omega \approx 3\omega_0$, 代入(18)式, 可近似估计形成

二阶次谐频共振所需的阈值为 $\xi \geq \frac{64\omega_0^2}{3\alpha_2} \sqrt{g_{11}|\omega_0 b|}$.

二阶次谐频振动和一阶次谐频振动具有相似的特征:

(1) 只有驱动压力超过阈值 $\frac{64m_0\omega_0^2}{3\alpha_2} \sqrt{g_{11}\omega_0 b}$, 我们才

能在一定的驱动声波频率范围为观察到气泡的二阶次谐频振动; (2) 在一定的频率范围内存在非零稳态解和非稳态解; (3) 存在零稳态解. 由此可以看出, 次谐频振动分量的形成需要超过一定驱动声波压力阈值, 次谐频共振发生时, 驱动声波频率处在 $n\omega_0$

($n = 2, 3, \dots$) 的领域内. 事实上, 结合泰勒展开得到的气泡振动的弱非线性方程(4)可看出, 还可分离出频率为 $2\omega/3$ 的振动分量, 如果保留 x 的更高阶小量, 还可从气泡的合振动中分离出更多的次谐波振动分量, 只是需要在更高的驱动声波压力下才能发生.

4 群振动对气泡共振行为的影响

由于次级声辐射的影响, 振动气泡的共振频率将发生变化, 气泡间的耦合振动将影响各气泡的非线性声响应^[25,26]. 在下面的数值计算中, 我们将考察气泡平衡半径、泡群内气泡数量, 气泡在泡群内所处位置、声驱动压力幅值等对气泡的基频和谐频共振响应幅值的影响. 各参数的取值分别为: 液体密度 $\rho = 998 \text{ kg/m}^3$, 液体黏滞系数 $\eta = 0.001 \text{ Pa} \cdot \text{s}$, 液体的表面张力为 $\sigma = 0.0725 \text{ N/m}$, 泡内气体多方指数 $\kappa = 1.4$.

当 $r_{\text{clust}} = 0.1 \text{ mm}$, $a_0 = 5 \mu\text{m}$ 时, 泡群中心位置处气泡受到泡群气泡总数变化的影响如图 1 所示. 在驱动压力为 1 kPa , 频率为 $\omega_0 + \varepsilon$ 的声波作用下, 中心位置处气泡在自然频率 ω_0 的很小邻域内有较强的声响应, 气泡基频振动分量振幅取得极大值. 我们分别考察了单气泡($N=1$), 泡群气泡总数 $N=10, 30$ 和 50 时气泡基频振动幅值在 ω_0 的邻域内的变化曲线. 通过比较看出, 在泡群大小一定的情况下, 气泡数量越大 (即气泡密度越大), 泡群中心位置处气泡在 ω_0 附近的基频振动越强. 泡群气泡数量增加导致气泡之间的距离减小, 气泡之间与次级声辐射相关的相互作用增强. 尽管在以前的研究中发现气泡间的相互作用将在一定程度上抑制气泡在声波作用下的声响应强度^[15,20], 但是在气泡的共振频率附近, 气泡间的相互作用的增强却可增强其基频共振响应幅值, 即气泡的群振荡可有效增强各气泡的共振声响应. 值得注意的是, 泡群气泡数量对泡群中心位置处基频共振幅值影响最为显著的区域近似为 $|\varepsilon/\omega_0| < 0.05$, 在此区域之外影响几乎可以忽略不计. 气泡数的增加还将增强气泡在其共振频率附近声响应的非线性特征. 比较图 1 中的 4 条曲线发现, 在驱动压力为 1 kPa 时, 单气泡声响应曲线具有明显的对称性 (关于 $\varepsilon/\omega_0 = 0$ 对称); 随着气泡数增加, 声响应曲线的对称性受到破坏, 曲线的峰值点移向 $\varepsilon/\omega_0 = 0$ 左侧.

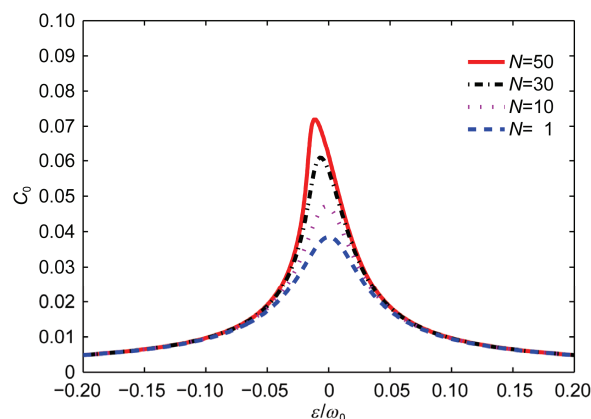


图 1 (网络版彩图) 气泡总数的基频共振声响应的影响

Figure 1 (Color online) Influence of bubble number in clusters on the fundamental resonance.

随着驱动压力的增加或泡群气泡含量的继续增加, 气泡的基频共振响应必将在 $\varepsilon/\omega_0 = 0$ 左侧形成多值响应区.

从本质讲, 气泡在声波作用下的径向振动是非线性的, 当驱动声波压力较小时, 气泡振动幅值很小, 非线性效应对气泡径向振动的影响可以忽略, 此时我们可观察到气泡的幅频响应曲线关于 $\varepsilon/\omega_0 = 0$ 对称. 然而, 随着驱动压力的增加, 气泡的振动增强, 气泡的非线性特征也会越来越明显. 实验表明, 当液体内频率为千赫兹级的声波压力超过 100 kPa 时, 我们可在液体内观察到激烈的空化现象^[1,9]. 基于目前的认识, 空化效应来源于气泡强非线性振动, 空化气泡的崩溃可在液体内形成局部高温高压、射流等. 我们通常采用数值方法模拟气泡的强非线性振动, 而逐级近似法对弱非线性声响应特征的分析有助于理解声波与气泡间的相互作用. 从前面的分析知, 在基频共振区内很小的压力 (1 kPa) 就能激励泡群内气泡形成弱非线性振动, 因此我们在利用超声激励气泡振动时, 激励源的选择非常重要.

当 $N = 50$, $a_0 = 5 \mu\text{m}$ 时, 气泡受到其所处相对位置变化的影响如图 2 所示. 通过气泡处在不同相对位置 $r_r = 0, 50 \mu\text{m}$ 和 $90 \mu\text{m}$ 处气泡的基频共振响应发现, 在驱动压力 1 kPa , 频率 $\omega_0 + \varepsilon$ 的声波作用下, 泡群中心气泡在 $\varepsilon \rightarrow 0$ 的极小频率范围内响应最强, 在此频率范围内三者幅值响应曲线差别相对较小. 因此我们认为, 在泡群内气泡所处的相对位置对其共振声响应的影响相对较小. 在我们以前的研究中, 我

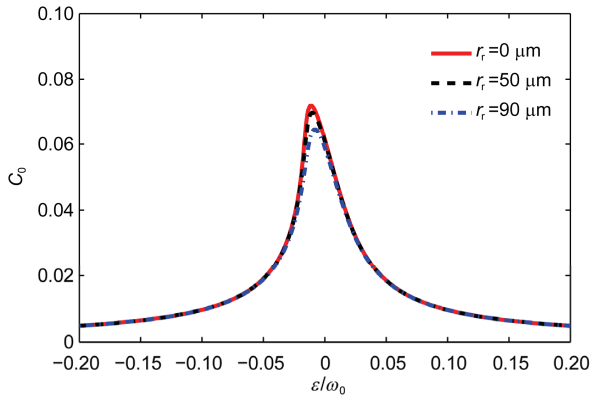


图 2 (网络版彩图)气泡所处相对位置对基频共振声响应的影响

Figure 2 (Color online) Influence of relative bubble position in clusters on the fundamental resonance.

们比较了一定频率声波作用下不同相对位置处气泡的半径随时间变化关系,发现相对位置对气泡的振动影响不大,本文的结论和此前我们的研究结论一致^[24].因此,泡群作为一个群振荡系统,如果群内气泡可看成全同气泡,那么群内气泡的声响应虽然从个体而言,在偏离共振区,其振动在一定程度上受到抑制,但是在共振频率附近,由于彼此间的相互作用其声响应将得到增强.

不同大小的气泡在给定声场中声响应状态必然不同,在此我们将比较不同大小的气泡受到接近其本身共振频率的声波作用下声响应幅值变化,即三个不同泡群内气泡在不同频段的驱动声波作用下的基频共振声响应.图 3 给出了当 $N = 50$ 时,半径分别为 3, 4 和 5 μm 的气泡在驱动压力幅值为 1 kPa 的声波作用下的基频振动幅值频响曲线.通过比较我们可以看出,在驱动压力声波一定的情况下,初始半径越小的气泡基频共振幅值越小.当驱动压力幅值为 1 kPa 时,初始半径为 3 μm 的气泡的幅值频响曲线处于对称状态,而初始半径为 5 μm 的气泡的幅值频响曲线共振峰偏向 $\varepsilon/\omega_0 = 0$ 左侧,非线性特征明显.因此,在同样尺寸和气泡数量的泡群内,各气泡的初始半径越小其共振响应越弱,驱动其作非线性振动所需的驱动压力越大.通过比较泡群内气泡数量、气泡所处相对位置以及气泡初始半径对气泡的基频共振响应的影响可以看出,气泡的基频共振响应幅度主要受到泡群内气泡数量和气泡初始半径的影响.

从气泡的各阶振动成分的声响应幅值表达式可

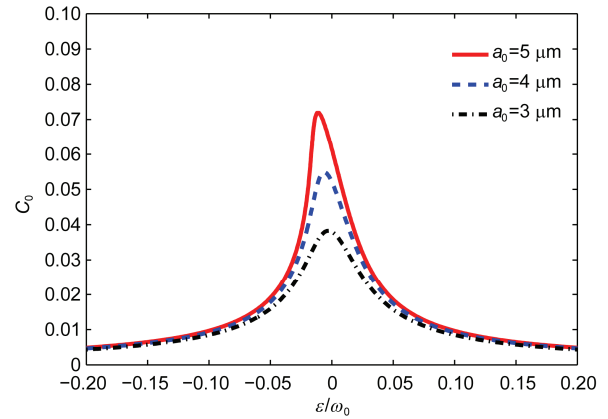


图 3 (网络版彩图)气泡初始半径对基频共振声响应的影响

Figure 3 (Color online) Influence of initial bubble radius in clusters on the fundamental resonance.

以看出,驱动声波压力幅值对气泡的声响应状态影响显著.随着驱动压力幅值的增加,气泡的振动幅值也会增加.然而,比较基频共振和谐频共振我们发现,基频共振相对容易发生,而谐频共振通常需要驱动声波压力幅值超过一定值后才能发生.从图 4 可以看出,当驱动声波压力幅值为 1 kPa 时,尽管驱动声波频率处在谐频共振区,但是由于声波引起的气泡谐频振动幅值很小,几乎不能观察到共振响应现象.随着驱动声波压力幅值的增加,一阶谐频共振响应逐渐增强.当驱动压力幅值小于 5 kPa 时,气泡一阶谐频响应还处于线性区,但当压力增加到 10 kPa 时,我们观察到共振峰偏向 $\varepsilon = 0$ 左侧,当驱动声波压力达到 15 kPa 时,可观察到一阶谐频共振振幅多值响应区.由此可以看出,在谐频共振频率共振响应区内,驱动声波压力幅值的增加将促使气泡振动进入非线性区.

为了解驱动声波压力幅值对二阶谐频共振的影响,我们对 $r_{\text{clust}} = 0.1 \text{ mm}$, $a_0 = 5 \mu\text{m}$, 气泡总数为 50 个的泡群中心位置处气泡的二阶谐频共振效应进行了数值分析.当驱动声波压力幅值小于 15 kPa 时,二阶谐频共振响应峰值仅有 $0.008a_0$, 和一阶谐频共振峰值 $0.1a_0$ 相比,是后者的 8%,非常微弱,虽然如此,在靠近二阶谐频共振响应区内我们能够观察到明显的共振响应特征,随着驱动压力的进一步提高,二阶谐频共振响应区内气泡的声响应幅值也将逐步增强并由线性响应逐步过渡到非线性响应状态.气泡的基频共振响应和谐频共振响应特征相似,但基频共

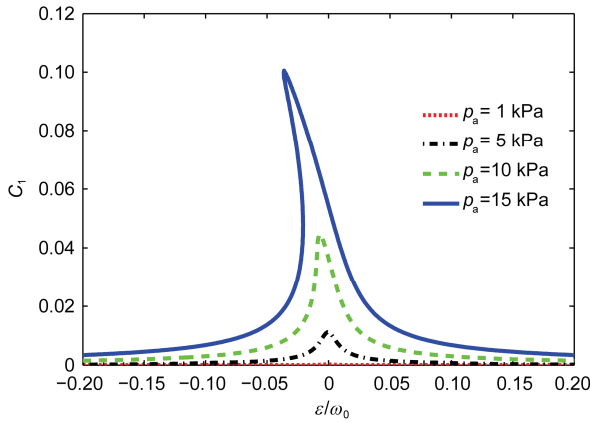


图 4 (网络版彩图) 声波幅度对一阶谐频共振响应的影响
Figure 4 (Color online) Influence of driving pressure amplitude on the first harmonic resonance.

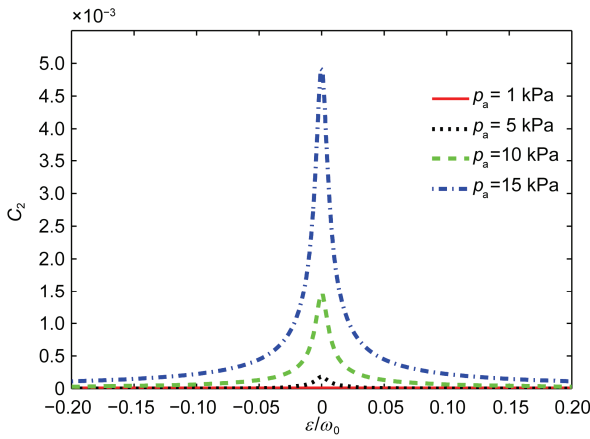


图 5 (网络版彩图) 声波幅度对二阶谐频共振响应的影响
Figure 5 (Color online) Influence of driving pressure amplitude on the second harmonic resonance.

振相对容易发生, 谐频共振的阶数越高, 产生谐频共振需要的驱动声波压力幅值越大.

比较基频共振(式(7a))、谐频共振(式(11), 式(13))和次谐频共振(式(14), 式(18))可知, 基频共振和谐频共振具有相似的特征, 次谐频共振不同于基频振动和谐频共振. 频率接近 $n\omega_0$ ($n = 2, 3, \dots$) 的声波在声波压力幅值超过一定阈值后才有可能在 $n\omega_0$ ($n = 2, 3, \dots$) 附近观察到次谐频共振现象, 且它的频响曲线没有谐振峰^[21,22]. 和谐频共振相比, 次谐频共振更难形成, 需要更大的驱动声波压力幅值. 一阶和二阶次谐频共振时气泡内气泡初始半径对阈值压力的依赖关系如图 6 和 7 所示. 通过比较 $1\ \mu\text{m}$ 到 $10\ \mu\text{m}$ 的气泡产生次谐频共振所需阈值压力知, 随着气泡初始半

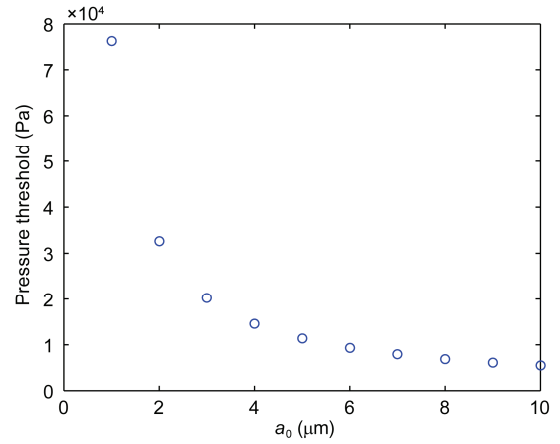


图 6 (网络版彩图) 一阶次谐频共振阈值压力随气泡初始半径的变化

Figure 6 (Color online) Relationship between the pressure threshold of first sub-harmonic resonance and the initial radius of bubbles.

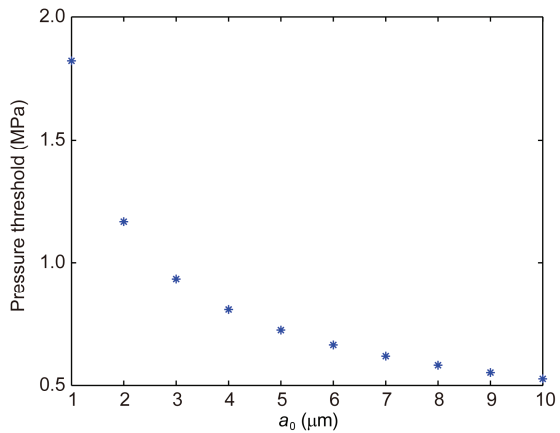


图 7 (网络版彩图) 二阶次谐频共振阈值压力随气泡初始半径的变化

Figure 7 (Color online) Relationship between the pressure threshold of second sub-harmonic resonance and the initial radius of bubbles.

径的增大, 阈值压力减小, 即初始半径越大的气泡越容易形成次谐频共振. 对同样初始半径的气泡而言, 一阶次谐频共振形成所需阈值压力比二阶次谐频共振所需阈值压力小近两个数量级.

5 结论

微气泡在声波的驱动下做受迫振动, 随着驱动声波压力的增加, 气泡的径向振动逐步由线性响应

向非线性响应过渡, 当气泡处在高强度声波区域, 气泡将经历剧烈的膨胀、收缩和崩溃过程并在液体内部引起空化现象. 气泡在声波作用下的声响应与声波频率也密切相关, 若声波频率处在气泡本征频率决定的基频共振、谐频共振或次谐频共振区, 气泡的振动将被增强, 因此也更容易形成非线性振动和产生空化效应. 因此, 我们在利用超声波激励气泡振动的过程中, 为提高超声能量的利用效率, 需要根据不同的应用环境, 根据气泡大小合理选择驱动声波的频率和强度.

本文我们对处在气泡群内耦合振动气泡的受迫振动进行了研究, 主要探索弱非线性环境下驱动声

波频率处在受迫振动气泡的基频共振区、谐频共振区和次谐频共振区内气泡的振动幅值变化. 通过不同气泡数、气泡初始半径和气泡所处泡群内不同位置的比较研究发现: 气泡在泡群内的相对位置对气泡声响应状态的影响较小, 但在同样的驱动压力幅值的声波作用下, 不同初始半径气泡的声响应幅度不同, 初始半径较大的气泡响应更为激烈, 并呈现出较强非线性特征; 在泡群大小一定的情况下, 气泡总数的变化决定了气泡分布的数密度, 当气泡数密度越大, 泡群内气泡的共振声响应越强, 越容易从线性振动区过去到非线性振动区. 因此, 气泡的群振动系统在共振区更容易形成非线性振动.

参考文献

- 1 Yasui K, Iida Y, Tuziuti T, et al. Strongly interacting bubbles under an ultrasonic horn. *Phys Rev E*, 2008, 77: 016609
- 2 Kanthale P M, Gogate P R, Pandit A B, et al. Cavity cluster approach for quantification of cavitation intensity in sonochemical reactors. *Ultrason Sonochem*, 2003, 10: 181–189
- 3 Brothie A, Grieser F, Ashokkumar M. Effect of power and frequency on bubble-size distributions in acoustic cavitation. *Phys Rev Lett*, 2009, 102: 084302
- 4 Wang C H, Cheng J C. The velocity field around two interacting cavitation bubbles in an ultrasound field. *Sci China-Phys Mech Astron*, 2013, 56: 1246–1252
- 5 Birkin P R, Offin D G, Vian C J B, et al. Investigation of noninertial cavitation produced by an ultrasonic horn. *Acoust Soc Am*, 2011, 130: 3297–3308
- 6 Ida M, Naoe T, Futakawa M. Direct observation and theoretical study of cavitation bubbles in liquid mercury. *Phys Rev E*, 2007, 75: 046304
- 7 Van der Kroon I, Quinto-Su P A, Li F, et al. Acoustically driven cavitation cluster collapse in planar geometry. *Phys Rev E*, 2010, 82: 066311
- 8 Bjerknes V F K. *Fields of Force*. New York: Columbia University Press, 1906
- 9 Mettin R, Akhatov I, Parlitz U, et al. Bjerknes forces between small cavitation bubbles in a strong acoustic field. *Phys Rev E*, 1997, 56: 2914–2931
- 10 An Y. Nonlinear bubble dynamics of cavitation. *Phys Rev E*, 2012, 85: 016305
- 11 Toytman I, Silbergleit A, Simanovski D, et al. Multifocal laser surgery: Cutting enhancement by hydrodynamic interactions between cavitation bubbles. *Phys Rev E*, 2010, 82: 046313
- 12 An Y. Formulation of multibubble cavitation. *Phys Rev E*, 2011, 83: 066313
- 13 Cai M, Zhao S, Liang H. Mechanisms for the enhancement of ultrafiltration and membrane cleaning by different ultrasonic frequencies. *Desalination*, 2010, 263: 133–138
- 14 Yasui K, Towata A, Tuziuti T, et al. Effect of static pressure on acoustic energy radiated by cavitation bubbles in viscous liquids under ultrasound. *Acoust Soc Am*, 2011, 130: 3233–3242
- 15 Sadighi-Bonabi R, Rezaee N, Ebrahimi H, et al. Interaction of two oscillating sonoluminescence bubbles in sulfuric acid. *Phys Rev E*, 2010, 82: 016316
- 16 Rezaee N, Sadighi-Bonabi R, Mirheydari M, et al. Investigation of a mutual interaction force at different pressure amplitudes in sulfuric acid. *Chin Phys B*, 2011, 20: 087804
- 17 Ida M. Bubble-bubble interaction: A potential source of cavitation noise. *Phys Rev E*, 2009, 79: 016307
- 18 Zhang Y L, Zheng H R, Tang M X, et al. Effect of secondary radiation force on aggregation between encapsulated microbubbles. *Chin Phys B*, 2011, 20: 114302
- 19 Jiang L, Liu F, Chen H S, et al. Frequency spectrum of the noise emitted by two interacting cavitation bubbles in strong acoustic fields. *Phys Rev E*, 2012, 85: 036312
- 20 Wang C H, Cheng J C. Interaction of a bubble and a bubble cluster in an ultrasonic field. *Chin Phys B*, 2013, 22: 014304
- 21 Prosperetti A. Nonlinear oscillations of gas bubbles in liquids: Steady-state solutions. *Acoust Soc Am*, 1974, 56: 878–885

- 22 Prosperetti A. Nonlinear oscillations of gas bubbles in liquids: Transient solutions and the connection between subharmonic signal and cavitation. *Acoust Soc Am*, 1975, 57: 810–821
- 23 Chen H, Kreider W, Brayman A A, et al. Blood vessel deformations on microsecond time scales by ultrasonic cavitation. *Phys Rev Lett*, 2011, 106: 034301
- 24 Foteinopoulou K, Laso M. Numerical simulation of bubble dynamics in a Phan-Thien–Tanner liquid: Non-linear shape and size oscillatory response under periodic pressure. *Ultrasonics*, 2010, 50: 758–776
- 25 Hu J, Lin S Y, Wang C H, et al. Study of resonance sound response for bubble cluster in ultrasound field (in Chinese). *Acta Phys Sin*, 2013, 62: 1343033 [胡静, 林书玉, 王成会, 等. 超声波作用下泡群的共振声响应. *物理学报*, 2013, 62: 134303]
- 26 Wang C H, Cheng J C. Nonlinear acoustical response of multibubbles in elastic tube (in Chinese). *Acta Phys Sin*, 2014, 63: 134301 [王成会, 程建春. 弹性管中泡群内气泡的非线性声响应. *物理学报*, 2014, 63: 134301]

附录

$$b_1 = \rho a_0^2 m_0^{-1} \left(\frac{3}{2} + 2ha_0 \right), \quad (\text{a1})$$

$$b_2 = \frac{1}{m_0(1+ha_0)} \left[\frac{a_0}{c} (2+ha_0)m_1 + 4\eta(2+3ha_0) \right], \quad (\text{a2})$$

$$\alpha_1 = \frac{1}{m_0} \left(m_2 + \frac{m_1 ha_0}{1+ha_0} \right), \quad (\text{a3})$$

$$\alpha_2 = \frac{1}{m_0} \left\{ \frac{1}{2} \kappa (11+18\kappa+9\kappa^2) \left(p_0 + \frac{2\sigma}{a_0} \right) - \frac{6\sigma}{a_0} - \frac{m_2 ha_0}{1+ha_0} \right\}, \quad (\text{a4})$$

$$\xi_1 = \frac{1+2ha_0}{1+ha_0} \xi. \quad (\text{a5})$$

Nonlinear resonance of bubble cluster driven by ultrasound

WANG ChengHui, HU Jing, CAO Hui, LIN ShuYu^{*} & AN Shuai

Shaanxi Key Laboratory of Ultrasonics, Shaanxi Normal University, Xi'an 710062, China

Due to the effects of secondary pressure radiation in bubble cluster, bubbles undergo coupled oscillation. Based on the dynamic equation of coupled oscillation, the nonlinear acoustic response of bubbles are research by an asymptotic method. The resonance response of bubbles are determined by the intrinsic properties of bubbles, such as the initial radius, the size of the bubble cluster, and the density distribution of bubbles in the cluster. Therefore, for a given bubble cluster, there is one natural resonance frequency. When bubbles in a cluster are driven to oscillate by ultrasound, some resonance regions can come into being. The acoustic response of bubbles has fundamental mode, first and second harmonics, first and second subharmonics. In term of the analytical expression of oscillating amplitude for the five modes, we analyzed the acoustic resonance in different frequency regions ($\omega \approx \omega_0$, $\omega \approx \omega_0/2$, $\omega \approx \omega_0/3$, $\omega \approx 2\omega_0$ and $\omega \approx 3\omega_0$). The amplitude of each mode is affected by the intensity and frequency of ultrasound. The fundamental response of bubbles is easier to observe than other modes because it occurs at relatively low acoustic pressure. With the increase of the acoustic pressure, the response of bubbles goes from linear regime to nonlinear regime. When bubbles oscillate in nonlinear regime, the resonance response frequency will not be equal to the natural resonance one exactly, and a frequency region of multiple oscillating amplitude may exist according to the analytical expression of oscillating amplitude. The response of bubbles is also affected by the density of bubble numbers in cluster and the initial radius when of bubbles, while the effect of the relative position in the bubble cluster can be neglected. The resonance phenomena come into being after the driving pressure exceeds the thresholds for the sub-harmonics mode. With the increment of the equivalent radius of bubbles, the pressure thresholds related to of sub-harmonics resonance will decrease.

secondary radiation of pressure waves, nonlinear acoustic response, coupled oscillation, resonance

PACS: 43.25+y, 43.35+d, 46.40.Ff, 47.55.dd

doi: 10.1360/SSPMA2015-00047