

广义逆Stokes公式、广义逆Vening-Meinesz公式以及广义Molodensky公式*

程芦颖 ** 许厚泽

(中国科学院测量与地球物理研究所, 武汉 430077; 西安测绘研究所, 西安 710054)

摘要 根据重力位 W , 正常重力位 U 以及扰动位 T 之间的相互关系, 定义了扰动位 T 与大地水准面起伏 N 、重力异常 Δg , 垂线偏差 ε 之间的算子运算关系. 在边界面为球面的条件下, 运用球谐函数求解物理大地测量边值问题的方法, 通过算子变换, 推导了广义逆 Stokes 公式、广义逆 Vening-Meinesz 公式和广义 Molodensky 公式. 广义公式突破了经典公式必须在大地上水准面上应用的限制. 当边界面定义为大地水准面时, 广义公式自然退化为经典公式.

关键词 球谐函数 边值问题 逆 Stokes 公式 逆 Vening-Meinesz 公式 Molodensky 公式

1 引言

大地水准面起伏、重力异常以及垂线偏差是描述地球形状与地球重力场的三个最基本的观测参数. Stokes在球近似的假设下首先给出了由大地水准面上的重力异常推求大地水准面在正常椭球面上的高的Stokes公式^[1]. 基于Stokes理论, Vening-Meinesz推导出了由大地水准面上的重力异常求解垂线偏差的子午分量和卯酉分量的Vening-Meinesz公式^[2]. Stokes公式和Vening-Meinesz公式的应用引起了许多重要问题^[3]. 如重力归算时要对重力梯度和地壳密度做假设, 而且还要移动质量; 另外, 边值边界面——大地水准面是未知的^[4]. Molodensky提出了一种以地

面为边界面的边值问题研究地球形状和外部重力场的理论^[5], 它不需要使用任何有关地壳密度的信息. 之后, Molodensky等人给出了由垂线偏差推求重力异常的逆Vening-Meinesz公式、由大地水准面起伏推求重力异常的逆Stokes公式以及由垂线偏差推求似大地水准面高的Molodensky公式^[5,6]. 大地水准面起伏、重力异常以及垂线偏差之间的相互换算公式从理论上描述了地球形状与地球重力场的内在关系. 1977年, Rummel利用大地水准面上任意一点的扰动位和重力异常的关系^[3], 根据Bruns公式^[7], 同样推导出了逆Stokes公式^[8]. 1998年, Hwang利用地球重力场扰动位的球谐函数展开式和变形Green公式^[9]导出了类似的Molodensky公式和逆Vening-Meinesz公式^[10].

收稿日期: 2005-05-16; 接受日期: 2005-07-01

* 国家自然科学基金资助项目(批准号: 40374007)

** E-mail: lvcheng1961@tom.com

上述大地水准面起伏、重力异常以及垂线偏差之间的相互换算公式的共同特点是两两互换参量均为相同边界面(大地水准面或似地形表面)上的值, 本文在此称它们为经典公式. 航空重力测量、卫星测高、卫星重力测量技术的出现和应用, 使得对地球重力场信息的采样由地球表面扩展到了整个空间范围, 研究地球外部重力场成为物理大地测量学更为关注的研究领域, 由大地水准面或似地形表面上的几何或物理观测量推演外空参数更具有广泛意义, 在此含义下, 称本文推导的公式为广义公式. 与经典公式相比, 广义公式取消了必须在大地水准面上应用的限制, 将地面测量数据直接映射为空间重力场信息, 也为各类测量技术在空间的重力测量归算提供直接技术途径. 本文运用球谐函数求解物理大地测量边值问题的方法, 通过算子变换, 给出广义逆 Stokes 公式、广义逆 Vening-Meinesz 公式和广义 Molodensky 公式.

2 算子定义

根据重力位 W , 正常重力位 U 以及扰动位 T 之间的相互关系以及大地水准面起伏 N , 重力异常 Δg , 垂线偏差 ε 的定义, 在球近似意义下, 上述几个量之间的数学关系式为

$$N = \frac{T}{\gamma} \Big|_{\rho=R}, \quad (1)$$

$$\Delta g = - \left(\frac{\partial T}{\partial \rho} + \frac{2T}{\rho} \right) \Big|_{\rho=R}, \quad (2)$$

$$\varepsilon = \frac{1}{\rho\gamma} \frac{\partial T}{\partial \psi} \Big|_{\rho=R}, \quad (3)$$

式中, ρ 为地心距, R 为边界面球的半径, γ 为正常重力, ψ 为球面上的任意方向. 其中, (1) 式是著名的 Bruns 公式^[7], (2) 式称为物理大地测量基本微分方程^[11], 在地球外部重力场的研究中, 它是一个重要的边值条件. (3) 式是根据垂线偏差的定义^[3], 在 ψ 方向上的垂线偏差表示. 它们给出了大地水准面起伏、重力异常以及垂线偏差和重力场扰动位之间的关系, 均是扰动位的泛函. 我们把(1)~(3)式表示为算子运算的形式:

$$B_1 T = N, \quad (4)$$

$$B_2 T = \Delta g, \quad (5)$$

$$B_3 T = \varepsilon, \quad (6)$$

式中, B_1 , B_2 和 B_3 定义为算子符号.

3 扰动位的球近似解

在球近似意义下, 边界面为球面, 则可运用球谐函数求解物理大地测量边值问题. 对于这样的固定边值问题, 扰动位在地球外部空间的存在性和惟一性由 Stokes 定理^[1]和 Dirichlet 定理^[3]所支持.

由(1)式定义的边值问题是已知扰动位 T 在边界面——球面上的值, 求边界面外的扰动位. 根据球的外部第一边值问题的解^[11], 我们可以得到

$$T_{(\rho, \varphi, \lambda)} = \frac{\gamma_0}{4\pi} \iint_{\sigma} K(\rho, \psi) N|_{\sigma} d\sigma, \quad (7)$$

式中, (ρ, φ, λ) 为求值点, $N|_{\sigma}$ 为球面上的函数, γ_0 为球面上的正常重力, $K(\rho, \psi)$ 为(1)式边值条件下扰动位的 Laplace 方程解的核函数. 其相应的 Legendre 函数级数的表达式为

$$K(\rho, \psi) = \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) \frac{R^{n-1}}{\rho^{n+1}} P_n(\cos \psi). \quad (8)$$

由(2)式定义的边值问题是已知扰动位及其法线导数的线性组合在球面上的值, 求边界面外的扰动位. 根据球的外部第三边值问题的解^[11], 我们可以得到

$$T_{(\rho, \varphi, \lambda)} = \frac{1}{4\pi} \iint_{\sigma} S(\rho, \psi) \Delta g|_{\sigma} d\sigma, \quad (9)$$

式中, $\Delta g|_{\sigma}$ 为球面上的函数, $S(\rho, \psi)$ 为(2)式边值条件下扰动位的 Laplace 方程解的核函数. 其相应的 Legendre 函数级数的表达式为

$$S(\rho, \psi) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2n+1}{n-1} \frac{R^n}{\rho^{n+1}} P_n(\cos \psi). \quad (10)$$

由(3)式定义的边值问题是已知扰动位在球面上的方向导数的值, 求边界面外的扰动位. 将边值条件用面球谐函数的级数表示, 根据球谐函数展开理论, 我们可以得到

$$T_{(\rho, \varphi, \lambda)} = - \frac{1}{4\pi} \iint_{\sigma} M(\rho, \psi) \frac{\partial T}{\partial \psi} \Big|_{\sigma} d\sigma, \quad (11)$$

式中, $\frac{\partial T}{\partial \psi} \Big|_{\sigma}$ 为球面上的函数, $M(\rho, \psi)$ 为(3)式边值条件下扰动位的 Laplace 方程解的核函数. 其相应的

Legendre 函数级数的表达式为

$$M(\rho, \psi) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n(n+1)} \frac{R^{n-1}}{\rho^{n+1}} P_{n,1}(\cos \psi). \quad (12)$$

根据 Legendre 多项式的母函数^[12]以及文献^[13]给出的结果, 核函数 $K(\rho, \psi)$ 的封闭表达式为

$$K(\rho, \psi) = \frac{\rho^2 - R^2}{Rl^3}, \quad (13)$$

式中,

$$l = (\rho^2 + R^2 - 2\rho R \cos \psi)^{\frac{1}{2}}. \quad (14)$$

由此我们可以看出, 核函数 $K(\rho, \psi)$ 实际为 Poisson 核, (7)式的积分称为 Poisson 积分. 同样, 我们也可以获得核函数 $S(\rho, \psi)$ 的封闭表达式:

$$S(\rho, \psi) = \frac{2}{l} + \frac{1}{\rho} - 5 \frac{R}{\rho^2} \cos \psi - 3 \frac{l}{\rho^2} - 3 \frac{R}{\rho^2} \cos \psi \ln \frac{l + \rho - R \cos \psi}{2\rho}. \quad (15)$$

(15)式称为广义 Stokes 函数^[4], (9)式为 Stokes 积分. 同理, 核函数 $M(\rho, \psi)$ 的封闭表达式为

$$M(\rho, \psi) = \cot \psi \left(\frac{2}{Rl} + \frac{1}{\rho R} \right) + \frac{1}{R^2 \sin \psi} \left(1 + \frac{l}{\rho} - \frac{2\rho}{l} \right) - \cot \psi \left(\frac{1}{\rho R} - \frac{1}{R^2} \right) \ln \frac{l + \rho - R \cos \psi}{2\rho}. \quad (16)$$

核函数 $M(\rho, \psi)$ 将边界面上的垂线偏差通过(11)式的积分映射为扰动位. 为此, 我们将(16)式称为广义方向变换函数(暂定), (11)式称为广义方向变换积分(暂定).

4 广义积分公式

4.1 广义逆 Stokes 公式

根据(5)式定义的算子运算, 扰动位通过算子 B_2 映射为重力异常. 将算子 B_2 作用于(7)式, 并定义

$$B_2 K(\rho, \psi) = \frac{1}{\rho} Q(\rho, \psi), \quad (17)$$

式中

$$Q(\rho, \psi) = -\frac{4\rho^2}{Rl^3} + \frac{3(\rho^2 - \rho R \cos \psi)(\rho^2 - R^2)}{Rl^5} + \frac{2R}{l^3}, \quad (18)$$

则

$$\Delta g_{(\rho, \varphi, \lambda)} = \frac{\gamma_0}{4\pi\rho} \iint_{\sigma} Q(\rho, \psi) N|_{\sigma} d\sigma. \quad (19)$$

(19)式即为广义逆 Stokes 公式. 该公式将边界面上的重力位水准面起伏 N 映射为边界面上或边界面外的重力异常 Δg . 根据 Stokes 定理^[1]和 Dirichlet 定理^[3], 当边界面为地球内部的一个虚拟球, 地球外部的扰动位可以由该球面定义的边界面的边值问题解出. 这是 Bjerhammar 研究地球形状和外部重力场理论的核心内容^[14]. (19)式中的边界面既可以是地球内部的一个虚拟球面, 也可以是球近似意义下的似大地水准面. 当边界面定义为大地水准面, 且仅计算大地水准面上的重力异常时, 该公式退化为经典的逆 Stokes 公式. 这时, 令(19)式中的 $\rho = R$, 由于核函数 $Q(R, \psi)$ 当 $\psi = 0$ 时奇异, 我们对(19)式做简单的变换:

$$\Delta g_{(R, \varphi_p, \lambda_p)} = \frac{\gamma_0}{4\pi R} \iint_{\sigma} Q(R, \psi) N(\varphi_p, \lambda_p) d\sigma + \frac{\gamma_0}{4\pi R} \iint_{\sigma} Q(R, \psi) [N|_{\sigma} - N(\varphi_p, \lambda_p)] d\sigma, \quad (20)$$

式中, (φ_p, λ_p) 为求值点, $N(\varphi_p, \lambda_p)$ 为该点处的大地水准面起伏. 在(20)式右端的第一个积分式中, 我们应用核函数 $Q(R, \psi)$ 的无穷级数表达式:

$$Q(R, \psi) = \frac{1}{R^2} \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1)(n-1) P_n(\cos \psi), \quad (21)$$

利用 Legendre 函数的正交性, 且顾及 $N(\varphi_p, \lambda_p)$ 在积分号下为常量. 这时, (20)式右端的第一个积分式的结果为 $-\frac{\gamma_0}{R} N(\varphi_p, \lambda_p)$. 在(20)式右端的第二个积分式中, 我们应用核函数 $Q(R, \psi)$ 的封闭表达式:

$$Q(R, \psi) = -\frac{1}{4R^2 \sin^3 \frac{\psi}{2}}, \quad (22)$$

综合上述结果, 我们有

$$\Delta g_{(R, \varphi_p, \lambda_p)} = -\frac{\gamma_0}{R} N(\varphi_p, \lambda_p) - \frac{\gamma_0}{16\pi R^3} \iint_{\sigma} \frac{1}{\sin^3 \frac{\psi}{2}} [N|_{\sigma} - N(\varphi_p, \lambda_p)] d\sigma, \quad (23)$$

(23)式即为经典逆 Stokes 公式.

4.2 广义逆 Vening-Meinesz 公式

同样, 由(5)式定义的算子运算, 将算子 B_2 作用于(11)式, 并定义:

$$B_2 M(\rho, \psi) = \frac{1}{\rho} V(\rho, \psi), \quad (24)$$

式中

$$\begin{aligned} V(\rho, \psi) = & \frac{2(\rho^2 \cos \psi - \rho R)}{l^3} \left(\frac{1}{\rho} \cot \psi - \frac{1}{R \sin \psi} \right) \\ & - \frac{1}{R} \left(\frac{1}{l} + \frac{1}{\rho} \right) \cot \psi + \frac{1}{R^2 \sin \psi} \left(\frac{3\rho}{l} - \frac{l}{\rho} - 2 \right) \\ & + \frac{1}{R} \left(\frac{1}{\rho} - \frac{1}{R} \right) \cot \psi \ln \frac{l + \rho - R \cos \psi}{2\rho}, \end{aligned} \quad (25)$$

则

$$\Delta g_{(\rho, \varphi, \lambda)} = -\frac{1}{4\pi\rho} \iint_{\sigma} V(\rho, \psi) \frac{\partial T}{\partial \psi} \Big|_{\sigma} d\sigma. \quad (26)$$

(26)式即为广义逆 Vening-Meinesz 公式. 利用该公式可以通过边界面上的垂线偏差 ε 计算边界面上或边界面外的重力异常 Δg . 同样, 当仅计算边界面上的重力异常, 且边界面定义为大地水准面时, 该公式退化为经典的逆 Vening-Meinesz 公式. 这时, 令(26)式中的 $\rho = R$, 则核函数 $V(R, \psi)$ 的表达式为

$$V(R, \psi) = -\frac{1}{R^2} \left(3 \csc \psi - \csc \psi \csc \frac{\psi}{2} - \tan \frac{\psi}{2} \right). \quad (27)$$

将(27)式的 $V(R, \psi)$ 替换(26)式的核函数 $V(\rho, \psi)$ 后, 其结果与经典的逆 Vening-Meinesz 公式完全一致, 这说明经典的逆 Vening-Meinesz 公式只是广义逆 Vening-Meinesz 公式的特殊情况.

4.3 广义 Molodensky 公式

由于算子 B_1 将扰动位换算为大地水准面起伏 N , 因此, 我们将算子 B_1 应用于(11)式, 可以得到大地水准面起伏 N 的计算公式:

$$N_{(\rho, \varphi, \lambda)} = -\frac{1}{4\pi\gamma} \iint_{\sigma} M(\rho, \psi) \frac{\partial T}{\partial \psi} \Big|_{\sigma} d\sigma, \quad (28)$$

式中, 广义方向变换函数(暂定) $M(\rho, \psi)$ 如(16)式所示. 我们称(28)式为广义 Molodensky 公式, 该公式将边界面上的垂线偏差 ε 映射为该边界面对应的重力位水准面起伏或边界面外的大地水准面起伏. 当边界面定

义为大地水准面, 且仅计算边界面上的大地水准面起伏时, 该公式演化成经典的 Molodensky 公式. 这时, 令(28)式中的 $\rho = R$, 核函数 $M(R, \psi)$ 的表达式为

$$M(R, \psi) = \frac{1}{R^2} \cot \frac{\psi}{2}. \quad (29)$$

将(29)式代入(28)式, 其结果为经典的 Molodensky 公式. 需要指出的是, 当 $\rho = R$ 时, 本文推导的核函数 $M(R, \psi)$ 与 Molodensky 公式中的核函数完全一致, 但与文献[10]给出的核函数 $C(\psi)$ 略有差异, 主要区别在于两者的核函数级数求和的起始项不同.

4.4 水准面外的垂线偏差

通过算子 B_3 , 我们可以将扰动位换算为垂线偏差 ε . 为此, 我们将算子 B_3 应用于(7)式, 得到利用边界面上的重力位水准面起伏 N 计算边界面外的垂线偏差 ε :

$$\varepsilon_{(\rho, \varphi, \lambda)} = \frac{\gamma_0}{4\pi\rho\gamma} \iint_{\sigma} B(\rho, \psi) N \Big|_{\sigma} d\sigma, \quad (30)$$

式中, 核函数 $B(\rho, \psi)$ 定义为

$$B(\rho, \psi) = \rho\gamma \cdot B_3 K(\rho, \psi), \quad (31)$$

其中, 核函数 $B(\rho, \psi)$ 的表达式为

$$B(\rho, \psi) = \frac{3\rho(\rho^2 - R^2) \sin \psi}{l^5}. \quad (32)$$

当边界面为地球内部的一个虚拟球面, 利用(32)式可以计算地球外部任意点的垂线偏差. 如果将边界面定义为大地水准面, 则可以利用大地水准面起伏 N 计算地球外部重力场中的垂线偏差. 这对校验飞行器飞行航迹上的垂线偏差是很有意义的.

5 分析与结论

本文根据扰动位 T 与大地水准面起伏 N , 重力异常 Δg , 垂线偏差 ε 之间的泛函关系, 定义了算子运算, 并利用核函数的再生特性, 在球近似意义下, 采用球谐函数求解物理大地测量边值问题的方法, 推导出了广义逆 Stokes 公式、广义逆 Vening-Meinesz 公式、广义 Molodensky 公式以及水准面外的垂线偏差公式, 通过对导出的广义公式的分析, 可以有以下结论:

(1) 本文推导的所有广义公式均包含了因子 ρ , 所以本文给出的广义公式不像经典公式那样仅仅局

限于在大地水准面上应用,而且可以计算地球外部重力场中任意点的重力异常 Δg ,垂线偏差 ε ,或地球外部重力场中的重力位水准面起伏,补充和完善了地球形状和外部重力场理论,为地球外部重力场研究提供了新的途径.

(2) 当边界面定义为大地水准面时,且仅计算边界面上的大地水准面起伏 N ,重力异常 Δg ,垂线偏差 ε 时,广义公式自然退化为经典公式,说明经典公式只是广义公式的特定情况.

(3) 由(19), (26), (28)和(30)式结合经典 Stokes 公式、Vening-Meinesz 公式,使地面数据与空间数据的正演和反演构成完整结构,实现空间技术在地球重力场研究中的信息融合.

参 考 文 献

- 1 Stokes G G. On the variation of gravity on the surface of the earth. Trans Cambridge Phil Soc, 1849, 8: 672~695
- 2 Vening-Meinesz F A. A formula expressing the deflection of the plumb-line in the gravity anomalies and some formulae for the gravity field and the gravity potential outside the geoid. Proc Koninkl Ned Akad Wetenschap, 1928, 31(3): 315~331
- 3 Heiskanen W A, Moritz H. Physical Geodesy. San Francisco: Freeman W H and Company, 1967
- 4 郭俊义. 物理大地测量学基础. 武汉: 武汉测绘科技大学出版社, 1994
- 5 Molodensky M S, Yeremeyev V F, Yourkina M I. Methods for study of the external gravitational field and figure of the earth. Jerusalem: Israeli Programme for the Translation of Scientific, 1962
- 6 Molodensky M S, Yeremeyev V F, Yourkina M I. An evaluation of accuracy of Stokes' Series and of Some attempts to improve his theory. Bull Geod, 1962, 63: 359~367
- 7 Bruns H. Die Figur der Erde. Berlin: Publ Preuss Geod Inst, 1878
- 8 Rummel R. The Determination of Gravity Anomalies from Geoid Height Using the Inverse Stokes' Formula Dept of Geodetic Science Report No. 269, The Ohio State University, Columbus, 1977
- 9 Meissl P. A study of covariance function related to the earth's disturbing potential. Dept of Geodetic Science Report No. 151, The Ohio State University, Columbus, 1971
- 10 Hwang C. Inverse Vening-Meinesz formula and deflection-geoid formula: applications to the prediction of gravity and geoid over the South China Sea. Journal of Geodesy, 1998, 71: 304~312[DOI]
- 11 陆仲连. 地球重力场理论与方法. 北京: 解放军出版社, 1996
- 12 Hobson E W. The Theory of Spherical and Ellipsoidal Harmonics. 2nd ed. New York: Chelsea Press, 1965
- 13 Gradshteyn I S, Ryzhik I M. Table of Integrals, Series, and Products, 5th ed. New York: Academic Press, 1994
- 14 Bjerhammar A. A New Theory of Geodetic Gravity. Stockholm: Trans Roy Institute Technology, 1964