中国科学: 数学 2010 年 第 40 卷 第 4 期: 381～392
www.springerlink.com math.scichina.com
《中国科学》杂志社
SCIENCE CHINA PRESS

带跳扩散过程的经验似然推断

林正炎, 王汉超*

浙江大学数学系, 杭州 310027
E-mail: maoist.zju@gmail.com

收稿日期: 2008-12-26; 接受日期: 2009-07-12; * 通信作者
国家自然科学基金 (批准号: 10871177) 和高校博士点专项基金 (批准号: 20060335031) 资助项目

摘要 本文对带跳扩散过程的经验似然推断进行了讨论. 基于经验似然方法, 我们可以针对带跳扩散过程的各项系数构造置信区间. 这种置信区间的性质比基于渐近正态性构造出来的置信区间要好.

关键词 经验似然 N-W 估计量 带跳扩散模型

MSC (2000) 主题分类 60J60, 62G15

1 引言

在金融时间序列的研究中, 连续时间模型扮演着十分重要的角色. 从概率论的角度来看, 连续时间模型即是一个连续时间的随机过程. 长期以来, 从事时间序列研究的学者将研究的重点放在连续轨道的随机过程上 (参见文献 [1–3]). 最近, 带跳随机过程越来越受到时间序列的研究者们的关注, 特别是带跳扩散过程. 因为带跳扩散过程是连续轨道扩散过程很自然的推广, 同时, 带跳扩散过程又可以很好地刻画一些金融现象. 很多统计学家将注意力集中在带跳扩散过程的统计推断上来 (参见文献 [4,5]).

提及带跳扩散过程的统计推断, 我们首先介绍连续轨道扩散过程的统计推断. 正如上文所述, 带跳扩散过程是连续轨道扩散过程很自然的推广. 关于这两类随机过程的统计推断也存在着一定的联系. 考虑这样一个随机微分方程:

$$dX_t = \mu(X_t)dt + \sigma(X_t)dW_t, \tag{1.1}$$

这里 W_t 是一个标准 Brown 运动. 连续轨道扩散过程即是方程 (1.1) 的解. 关于连续轨道扩散过程的统计推断问题, 是从估计函数 $\mu(x)$ 和 $\sigma(x)$ 开始的, 即取得样本后, 设计一定的估计量去估计 $\mu(x)$ 和 $\sigma(x)$, 这就是所谓的关于 $\mu(x)$ 和 $\sigma(x)$ 的非参数估计. 通常, 设计估计量时是基于下列关系的:

$$E\left(\frac{X_{t+\Delta}-X_t}{\Delta}\middle| X_t\right) = \mu(X_t) + o(1), \tag{1.2}$$

$$E\left(\frac{(X_{t+\Delta}-X_t)^2}{\Delta}\middle| X_t\right) = \sigma^2(X_t) + o(1), \tag{1.3}$$

这里 $\Delta \to 0$. 因此, 估计 $\mu(x)$ 和 $\sigma(x)$ 可以近似地认为是一个非参数回归问题. 基于这一点, Bandi 和 Phillips[6] 讨论了关于 $\mu(x)$ 和 $\sigma(x)$ 的 $N-W$ 估计量, 并得到了估计量的强相合性和渐近正态性. Fan 和 Zhang[7] 讨论了关于 $\mu(x)$ 和 $\sigma(x)$ 的局部多项式估计量, 得到了弱相合性和渐近正态性. 我们可以由渐近正态性构造关于 $\mu(x)$ 和 $\sigma(x)$ 的置信区间. 但是, 这种方法构造出来的置信区间有一定的缺陷,

英文版见: Lin Z Y, Wang H C. Empirical likelihood inference for diffusion processes with jumps. Sci China Math, 2010, 53, doi: 10.1007/s11425-010-0092-9

比如置信区间是对称的, 当估计量变化比较大的时候, 这样构造的置信区间的功效就比较低. 因此, 有必要对这种方法进行改进. 事实上, 早在上世纪八十年代, 就有学者对传统构造置信区间的方法进行改进. Owen[8,9] 引入了经验似然方法, 构造了关于 i.i.d 样本均值的置信区间. Owen[10], Kitamura[11] 证明了经验似然方法在构造置信区间或者检验统计量方面的有效性. Chen 和 Qin[12] 得到了关于条件均值函数的经验似然置信区间. Chan 等 [13] 得到了条件方差函数的经验似然置信区间. 针对连续轨道扩散过程两个系数的非参数统计推断, Xu[14,15] 得到了 $\mu(x)$ 和 $\sigma(x)$ 经验似然置信区间.

关于带跳扩散过程的统计推断, 由于模型的复杂性, 比连续轨道扩散过程的统计推断要复杂得多. 一方面是由于跳的类型有很多, 增加了模型的复杂性. 另一方面, 对于带跳扩散模型得不到类似 (1.2) 和 (1.3) 简洁的结果. Bandi 和 Nguyen[4] 针对带跳扩散模型, 对该模型有关系数的 N-W 估计进行讨论, 得到了强相合性和渐近正态性. 本文继续对带跳扩散模型进行讨论, 用经验似然方法得到了该模型中有关系数的区间估计.

本文结构如下: 第 2 节介绍我们要讨论的模型; 第 3 节给出本文的假设和一些有用的引理; 第 4 节利用经验似然方法构造了置信区间, 并给出了本文的主要结果; 第 5 节对主要结果进行证明.

2 带跳扩散模型

我们考虑时间齐次 Markov 过程 X_t, 它是方程

$$dX_t = \left[\mu(X_{t-}) - \lambda(X_{t-})\int_Y c(X_{t-}, y)\Pi(dy)\right]dt + \sigma(X_{t-})dW_t + dJ_t \tag{2.1}$$

的强解, 这里 $\{W_t, t \geqslant 0\}$ 是标准 Brown 运动, $\{J_t, t \geqslant 0\}$ 是与 $\{W_t, t \geqslant 0\}$ 独立的纯跳过程. $\mu(x)$ 和 $\sigma(x)$ 是足够光滑的函数, $\lambda(x)$ 是跳的条件强度, $c(\cdot, \xi)$ 刻画了跳对整个过程的影响, 一定程度上控制跳的大小, ξ 是取值于 Y 的随机变量, $\Pi(y)$ 是其分布函数.

记 $\Delta X_t := X_t - X_{t-}$, 有

$$dJ_t = \Delta X_t = \int_Y c(X_{t-}, y)N(dt, dy), \tag{2.2}$$

这里 N 是 Poisson 计数测度. 于是

$$X_{t+\Delta} = X_t + \int_t^{t+\Delta}\mu(X_{s-})ds + \int_t^{t+\Delta}\sigma(X_{s-})dW_s + \int_t^{t+\Delta}\int_Y c(X_{t-}, y)\bar{\nu}(ds, dy), \tag{2.3}$$

这里

$$\bar{\nu}(ds, dy) = N(dt, dy) - E(N(dt, dy)) = N(dt, dy) - \lambda(X_{t-})\Pi(dy)dt \tag{2.4}$$

是补偿 Poisson 随机测度.

结合 (2.2), (2.3) 和 (2.4), 事实上, 有

$$\int_t^{t+\Delta}\int_Y c(X_{t-}, y)\bar{\nu}(ds, dy) = \int_t^{t+\Delta} dJ_s - \lambda(X_{s-})E_Y[c(X_{s-}, \xi)]ds. \tag{2.5}$$

这是模型的纯跳部分. 之所以最后写成 (2.4) 的形式, 主要是因为可以由补偿随机测度得到一些鞅的性质, 这对我们的证明是很有用的. 有关模型的更多细节参见 Jacod 和 Shiryaev[16] 及 Protter[17].

3 假设及一些有用的引理

在本节中, 我们给出本文的假设. 首先, 我们假设 $\mathfrak{D}=(l,u)$ 为过程 X_t 的值域, 这里 $l\geqslant -\infty$, $u\leqslant\infty$.

假设 1

(1) $\mu(\cdot)$, $\sigma(\cdot)$, $c(\cdot,y)$ 和 $\lambda(\cdot)$ 至少二阶连续可导. 存在常数 C_1 使得对所有属于 $\mathfrak{D}$ 紧子集的 x 和 z 有

$$|\mu(x)-\mu(z)|+|\sigma(x)-\sigma(z)|+\lambda(x)\int_Y|c(x,y)-c(z,y)|\Pi(dy)\leqslant C_1|x-z|. \tag{3.1}$$

进一步, 存在常数 C_2 使得对任意 $x\in\mathfrak{D}$,

$$|\mu(x)|+|\sigma(x)|+\lambda(x)\int_Y|c(x,y))|\Pi(dy)\leqslant C_2\{1+|x|\}. \tag{3.2}$$

(2) 存在常数 $\alpha>2$ 和 C_3, 使得对任意 $x\in\mathfrak{D}$,

$$\lambda(x)\int_Y|c(x,y))|^\alpha\Pi(dy)\leqslant C_3\{1+|x|^\alpha\}. \tag{3.3}$$

(3) 在 $\mathfrak{D}$ 上, $\lambda(\cdot)\geqslant 0$ 且 $\sigma^2(\cdot)>0$.

注 1 假设 1 保证了方程 (2.1) 存在右连左极强解, 且解是唯一的 (具体参见文献 [18]).

假设 2

方程 (2.1) 的解是正 Harris 常返的且满足

$$1_{\{|X_t-a|<\sqrt[3]{\Delta}\}}|X_{t+\Delta}-X_t-E[X_{t+\Delta}-X_t|X_t=a]|=O_{\text{a.s.}}\sqrt{\Delta\log\frac{1}{\Delta}}.$$

注 2 Harris 常返及正 Harris 常返的含义可参考 Bandi 和 Nguyen[4]. 正 Harris 常返保证了不变测度的存在性和唯一性, 这对我们的证明很有帮助. 第二点假设有些人工化, 连续轨道扩散过程可以很容易地满足这个条件. 当跳的影响很小, 换句话讲, 函数 $c(\cdot,\xi)$ 非常小或者 $\Delta>0$ 时, $|\int_t^{t+\Delta}\int_Y c(X_{t-},y)\bar{\nu}(ds,dy)|\leqslant O_{\text{a.s.}}\sqrt{\Delta\log\frac{1}{\Delta}}$, 带跳扩散过程也很容易满足这个条件. 这是本文的一个缺陷, 我们希望可以改进这个问题.

假设 3

(1) 核函数 $K(\cdot):\mathfrak{R}\to\mathfrak{R}^+$ 是一个连续可微, 有界且在零点附近对称的函数. 它有有界紧支撑且满足

$$\int_{\mathfrak{R}}K(s)ds=1, \tag{3.4}$$

$$K_2=\int_{\mathfrak{R}}(K(s))^2ds<\infty, \tag{3.5}$$

$$K_1=\int_{\mathfrak{R}}s^2K(s)ds<\infty, \tag{3.6}$$

$$\int_{\mathfrak{R}}\left|\frac{dK(s)}{ds}\right|ds<\infty. \tag{3.7}$$

(2) 核函数 $K^\pm(\cdot):\mathfrak{R}^\pm\to\mathfrak{R}^+$ 是连续可微的有界函数. 它们有有界紧支撑且满足

$$\int_{\mathfrak{R}^\pm}K^\pm(s)ds=1, \tag{3.8}$$

$$\int_{\mathfrak{R}} \left| \frac{dK^{\pm}(s)}{ds} \right| ds < \infty. \tag{3.9}$$

注 3 本文关于核函数的假设和一般情形下的核函数假设有些不同 (增加了对称性假设). 因为如果随机过程是平稳遍历的, 其核估计量收敛于其密度函数, 但是当随机过程是正 Harris 常返的, 且密度函数不存在时, 核估计量的收敛性问题就比较复杂, 与核函数是有关的. 因为带跳扩散过程的局部时也是存在跳的, 在核函数假设中加上对称性假设, 这时候核估计量会收敛到局部时的对称版本 (下文引理 3 会提及).

下面, 我们给出有关右连左极半鞅的局部时的一些引理, 这对估计量的构造和渐近结果的证明很有用. 引理 1–3 的证明参见 Protter[17] 及 Revuz 和 Yor[19].

引理 1 (Tanaka 公式) 令 X 是一个半鞅, $L_X(\cdot, a)$ 是其在 a 点的局部时, 则

$$\begin{aligned}(X_t - a)^+ - (X_0 - a)^+ = &\int_{0+}^{t} 1_{(X_{s-}>a)} dX_s + \sum_{0<s\leqslant t} 1_{(X_{s-}>a)} (X_t - a)^- \\ &+ \sum_{0<s\leqslant t} 1_{(X_{s-}\leqslant a)} (X_t - a)^+ + \frac{1}{2} L_X(t, a)\end{aligned}$$

及

$$\begin{aligned}(X_t - a)^- - (X_0 - a)^- = &-\int_{0+}^{t} 1_{(X_{s-}>a)} dX_s + \sum_{0<s\leqslant t} 1_{(X_{s-}>a)} (X_t - a)^- \\ &+ \sum_{0<s\leqslant t} 1_{(X_{s-}\leqslant a)} (X_t - a)^+ + \frac{1}{2} L_X(t, a).\end{aligned}$$

引理 2 设 X 是一半鞅, 其局部时为 $L_X(\cdot, a)$, 令 g 是有界 Borel 可测函数. 则几乎必然有

$$\int_{-\infty}^{\infty} L_X(t, a) g(a) da = \int_0^t g(X_{s-}) d[X]_s^c,$$

这里 $[X]^c$ 是 X 的二次变差过程的连续部分.

引理 3 设 X 是对所有 $t > 0$ 几乎必然满足 $\sum_{0<s\leqslant t} |\Delta X_s| < \infty$ 的半鞅, 则对任意 a 和 t, 有

$$L_X(t, a+) = L_X(t, a) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\varepsilon} \int_0^t 1_{(a\leqslant X_s \leqslant a+\varepsilon)} d[X]_s^c, \text{ a.s.}$$

和

$$L_X(t, a-) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\varepsilon} \int_0^t 1_{(a-\varepsilon\leqslant X_s \leqslant a)} d[X]_s^c, \text{ a.s.}$$

进一步,

$$\frac{L_X(t, a+) + L_X(t, a-)}{2} = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{2\varepsilon} \int_0^t 1_{(|X_t - a| \leqslant \varepsilon)} d[X]_s^c =: L_X^*(t, a), \text{ a.s.}$$

是局部时的对称化版本.

注 4 在假设 2 的条件下, 带跳扩散过程的局部时可以在证明中起到类似于密度函数的作用.

注 5 对一个带跳半鞅 X_t, 若其跳满足

$$\sum_{0<s\leqslant t} |\Delta X_s| < \infty, \text{ a.s. } \forall\, t > 0,$$

则其局部时 $L_X(t,a)$ 可以找到一个版本, 其在 a 右连续, 在 t 连续. 为方便起见, 我们假设我们讨论的局部时即在 a 右连续, 在 t 连续.

对随机过程 $(X_t)_{t\geqslant 0}$ 进行离散采样, 得到 $X_t: X_{i\Delta}, i=1,\ldots,n$, 这里 $\Delta=\frac{T}{n}$, T 是时间跨度. Δ 是采样频度, 本文讨论高频采样下的统计推断问题, 即 $\Delta\to 0$ 时的统计推断问题. 利用下面的结果

$$\mathbf{M}^1(a):=\lim_{\Delta\to 0}\frac{1}{\Delta}E[X_{t+\Delta}-X_t|X_t=a]=\mu(a), \tag{3.10}$$

$$\mathbf{M}^2(a):=\lim_{\Delta\to 0}\frac{1}{\Delta}E[(X_{t+\Delta}-X_t)^2|X_t=a]=\sigma^2(a)+\lambda(a)E_Y[c^2(a,\xi)], \tag{3.11}$$

$$\mathbf{M}^k(a):=\lim_{\Delta\to 0}\frac{1}{\Delta}E[(X_{t+\Delta}-X_t)^k|X_t=a]=\lambda(a)E_Y[c^k(a,\xi)],\quad \forall\, k>2. \tag{3.12}$$

(参见文献 [4]). 我们给出关于 $\mathbf{M}^k(a), k\geqslant 1$ 估计量的引理, 这些引理对我们证明本文的主要结果很重要, 其证明参见文献 [4].

若时间跨度是固定的, 设 $T=\bar{T}$, 定义:

$$\hat{\bar{L}}_X(\bar{T},a):=\frac{\Delta}{h_n}\sum_{i=1}^n K^+\left(\frac{X_{i\Delta}-a}{h_n}\right), \tag{3.13}$$

$$\hat{\bar{L}}_X(\bar{T},a-):=\frac{\Delta}{h_n}\sum_{i=1}^n K^-\left(\frac{X_{i\Delta}-a}{h_n}\right), \tag{3.14}$$

$$\hat{\bar{L}}^*_X(\bar{T},a):=\frac{\Delta}{h_n}\sum_{i=1}^n K\left(\frac{X_{i\Delta}-a}{h_n}\right), \tag{3.15}$$

$$\hat{\mathbf{M}}^k_{n,T}:=\frac{\sum_{i=0}^{n-1}K(\frac{X_{i\Delta}-a}{h_n})[X_{(i+1)\Delta}-X_{i\Delta}]^k}{\Delta\sum_{i=0}^{n-1}K(\frac{X_{i\Delta}-a}{h_n})},\quad k\geqslant 1. \tag{3.16}$$

引理 4 设 X 是由 (2.1) 定义的随机过程, 且 $T=\bar{T}$ $h_n\to 0$ (当 $n\to\infty$ 时). 若

$$\frac{1}{h_n}\left(\Delta\log\left(\frac{1}{\Delta}\right)\right)^{\frac{1}{2}}=o(1), \tag{3.17}$$

则在引理 1 和 4 下, 有

$$\hat{\bar{L}}_X(\bar{T},a\pm)\xrightarrow{\text{a.s.}}\bar{L}_X(\bar{T},a\pm)$$

和

$$\hat{\bar{L}}^*_X(\bar{T},a)\xrightarrow{\text{a.s.}}\bar{L}^*_X(\bar{T},a).$$

这里

$$\bar{L}_X(\bar{T},a)=\frac{1}{\sigma^2(a)}\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\varepsilon}\int_0^{\bar{T}}1_{(a\leqslant X_s\leqslant a+\varepsilon)}\sigma^2(X_s)ds,\ \text{a.s.},$$

$$\bar{L}_X(\bar{T},a-)=\frac{1}{\sigma^2(a)}\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\varepsilon}\int_0^{\bar{T}}1_{(a-\varepsilon\leqslant X_s\leqslant a)}\sigma^2(X_s)ds,\ \text{a.s.},$$

$$\bar{L}^*_X(\bar{T},a)=\frac{1}{\sigma^2(a)}\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{2\varepsilon}\int_0^{\bar{T}}1_{(|X_s-a|\leqslant\varepsilon)}\sigma^2(X_s)ds,\ \text{a.s.}$$

引理 5 若当 $n\to\infty$ 时, $T=T_n\to\infty$, $T/n\to 0$,

$$\left(\frac{\bar{L}^*_X(T,a)}{h_n}\right)\left(\Delta\log\left(\frac{1}{\Delta}\right)\right)^{\frac{1}{2}}=o(1), \tag{3.18}$$

$$h_n \bar{L}_X^*(T,a) \xrightarrow{\text{a.s.}} \infty, \tag{3.19}$$

则在假设1–3下有

$$\hat{\mathbf{M}}_{n,T}^k \xrightarrow{\text{a.s.}} \mathbf{M}^k(a), \quad \forall\, k \geqslant 1. \tag{3.20}$$

进一步, 若 $h_n^5 \bar{L}_X^*(T,a) = o_{\text{a.s.}}(1)$, 则

$$\sqrt{h_n \bar{L}_X^*(T,a)}(\hat{\mathbf{M}}_{n,T}^k - M^k(a)) \Rightarrow N(0, K_2 M^{2k}(a)), \quad \forall\, k \geqslant 1. \tag{3.21}$$

4 经验似然推断

在本节里, 我们利用经验似然方法对 $\mathbf{M}^1(x)$ 和 $\mathbf{M}^k(x)$ $(k \geqslant 2)$ 构造置信区间.

由于讨论 $\mathbf{M}^1(x)$ 和 $\mathbf{M}^k(x)$ $(k \geqslant 2)$ 有一定的相似性, 我们只对 $\mathbf{M}^1(x)$ 进行讨论. 由 (3.10), 记 $\mathbf{M}^1(x)$ 为 $\mu(x)$, 设

$$f_{\mu_i}(x, h_n, \theta) = K\left(\frac{X_{i\Delta} - x}{h_n}\right)\left(\frac{X_{(i+1)\Delta} - X_{i\Delta}}{\Delta} - \theta\right), \tag{4.1}$$

这里 θ 可以认为是目标量 $\mu(x)$ 的估计量. 显然, 有

$$\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} f_{\mu_i}(x, h_n, \hat{\mathbf{M}}^1) = 0.$$

令

$$R_\mu(x, h_n, \theta) = \max_{(p_0, p_1, \ldots, p_{n-1})} \left\{ \prod_{i=0}^{n-1} np_i \,\middle|\, \sum_{i=0}^{n-1} p_i f_{\mu_i}(x, h_n, \theta) = 0, p_i \geqslant 0, \sum_{i=0}^{n-1} p_i = 1 \right\} \tag{4.2}$$

及

$$l_\mu(x, h_n, \theta) = -2\log R_\mu(x, h_n, \theta). \tag{4.3}$$

我们给出本文的主要结果, 利用该结果, 我们可以构造 $\mathbf{M}^k(a)$ 的置信区间. 我们主要对 $k=1$ 的情形进行讨论.

定理 1 设当 $n \to \infty$ 时, $T = T_n \to \infty$, $\frac{T}{n} \to 0$, 假设 1–3, (3.18) 及 (3.19) 被满足, 则我们有

$$l_\mu(x, h_n, \mu(x)) \Rightarrow \chi^2(1), \tag{4.4}$$

$$l_\mu\left(x, h_n, \mu(x) + \frac{\tau(x)}{\sqrt{h_n \bar{L}_X^*(T,x)}}\right) \Rightarrow \chi^2\left(1, \frac{\tau^2(x)}{K_2 \mathbf{M}^2(x)}\right), \tag{4.5}$$

这里 $\tau(x)$ 是任意固定的函数, $\chi^2(a,b)$ 是自由度为 a, 非中心化参数为 b 的卡方分布.

注 6 我们可以构造关于 $\mu(x)$ 的置信度为 $100(1-\alpha)\%$ 的经验似然置信区间如下:

$$I_\alpha = \{\theta : l_\mu(x, h, \theta) \leqslant \chi_{1-\alpha}^2(1)\},$$

这里 $\chi_{1-\alpha}^2(1)$ 是 $\chi^2(1)$ 分布在 $1-\alpha$ 的分位数.

注 7 利用类似的办法, 我们可以通过渐近结果

$$l_\mu\left(x, h_n, \mathbf{M}^k(x) + \frac{\tau(x)}{\sqrt{h_n \bar{L}_X^*(T,x)}}\right) \Rightarrow \chi^2\left(1, \frac{\tau^2(x)}{K_2 \mathbf{M}^{2k}(x)}\right), \quad k \geqslant 2, \tag{4.6}$$

对 $\mathbf{M}^k(x)$ $(k \geqslant 2)$ 构造置信区间, 这里 $\tau(x)$ 和 $\chi^2(a,b)$ 定义同定理 1.

5 主要结果的证明

首先给出一些引理.

引理 6 令

$$A_\mu(x,h_n,\theta)=\frac{\sum_{i=1}^n f_{\mu_i}^2(x,h_n,\theta)}{(\sum_{i=1}^n K(\frac{X_{i\Delta}-x}{h_n}))^2}.$$

则在定理 1 的假设下, 对任意 θ, 我们有 $h_n\bar{L}_X^*(T,x)A_\mu(x,h_n,\theta)\xrightarrow{P}K_2\mathbf{M}^2(x)$.

证明

$$\begin{aligned}
h_n\bar{L}_X^*(T,x)A_\mu(x,h_n,\theta)=&\frac{h_n\bar{L}_X^*(T,x)\sum_{i=1}^n f_{\mu_i}^2(x,h_n,\theta)}{(\sum_{i=1}^n K(\frac{X_{i\Delta}-x}{h_n}))^2}\\
=&\frac{\frac{h_n\bar{L}_X^*(T,x)}{\Delta}\sum_{i=1}^n(K(\frac{X_{i\Delta}-x}{h_n}))^2\frac{(X_{(i+1)\Delta}-X_{i\Delta})^2}{\Delta}}{(\sum_{i=1}^n K(\frac{X_{i\Delta}-x}{h_n}))^2}\\
&-2\Delta\frac{\theta\frac{h_n\bar{L}_X^*(T,x)}{\Delta}\sum_{i=1}^n(K(\frac{X_{i\Delta}-x}{h_n}))^2\frac{X_{(i+1)\Delta}-X_{i\Delta}}{\Delta}}{(\sum_{i=1}^n K(\frac{X_{i\Delta}-x}{h_n}))^2}\\
&+\ \Delta\frac{\theta^2\frac{h_n\bar{L}_X^*(T,x)}{\Delta}\sum_{i=1}^n(K(\frac{X_{i\Delta}-x}{h_n}))^2}{(\sum_{i=1}^n K(\frac{X_{i\Delta}-x}{h_n}))^2}\\
=&:A_{\mu_1}+A_{\mu_2}+A_{\mu_3}.
\end{aligned}$$

首先考虑 A_{μ_1}. 由 (2.3), (2.4) 及 Itó公式, 我们有

$$\begin{aligned}
(X_{(i+1)\Delta}-X_{i\Delta})^2=&\int_{i\Delta}^{(i+1)\Delta}\left(\sigma^2(X_{s-})+\left(\int_Y c^2(X_{s-},y)\Pi(dy)\right)\lambda(X_{s-})\right)ds\\
&+2\int_{i\Delta}^{(i+1)\Delta}(X_{s-}-X_{i\Delta})\mu(X_{s-})ds\\
&+2\int_{i\Delta}^{(i+1)\Delta}(X_{s-}-X_{i\Delta})\sigma(X_{s-})dW_s\\
&+\int_{i\Delta}^{(i+1)\Delta}\int_Y((X_{s-}+c)^2-X_{s-}^2-2X_{i\Delta}c(X_{s-},y))\bar{\nu}(ds,dy)\\
=&:B_{\mu_1}+B_{\mu_2}+B_{\mu_3}+B_{\mu_4}.
\end{aligned}$$

则我们有

$$A_{\mu_1}=\frac{\frac{h_n\bar{L}_X^*(T,x)}{\Delta}\sum_{i=1}^n(K(\frac{X_{i\Delta}-x}{h_n}))^2\frac{\sum_{j=1}^4 B_{\mu_j}}{\Delta}}{(\sum_{i=1}^n K(\frac{X_{i\Delta}-x}{h_n}))^2}.$$

考虑 B_{μ_1},

$$\begin{aligned}
&\frac{h_n\bar{L}_X^*(T,x)}{\Delta}\cdot\frac{\sum_{i=1}^n(K(\frac{X_{i\Delta}-x}{h_n}))^2\frac{\int_{i\Delta}^{(i+1)\Delta}(\sigma(X_{s-})+(\int_Y c^2(X_{s-},y)\Pi(dy))\lambda(X_{s-}))ds}{\Delta}}{(\sum_{i=1}^n K(\frac{X_{i\Delta}-x}{h_n}))^2}\\
=&\frac{\bar{L}_X^*(T,x)}{\frac{\Delta}{h_n}\sum_{i=1}^n K(\frac{X_{i\Delta}-x}{h_n})}\\
&\times\frac{\frac{1}{h_n}\sum_{i=1}^n(K(\frac{X_{i\Delta}-x}{h_n}))^2\int_{i\Delta}^{(i+1)\Delta}(\sigma^2(X_{s-})+(\int_Y c^2(X_{s-},y)\Pi(dy))\lambda(X_{s-}))ds}{\frac{\Delta}{h_n}\sum_{i=1}^n K(\frac{X_{i\Delta}-x}{h_n})}.
\end{aligned}$$

由引理 4, 我们有

$$\frac{\bar{L}_X^*(T,x)}{\frac{\Delta}{h_n}\sum_{i=1}^n K(\frac{X_{i\Delta}-x}{h_n})} \xrightarrow{\text{a.s.}} 1. \tag{5.1}$$

由引理 4 的证明, 我们有

$$\frac{\Delta}{h_n}\sum_{i=1}^n K\left(\frac{X_{i\Delta}-x}{h_n}\right) = \frac{1}{h_n}\int_0^T K\left(\frac{X_{s-}-x}{h_n}\right)ds + O_{\text{a.s.}}\left(\frac{\bar{L}_X^*(T,x)(\Delta\log(1/\Delta))^{1/2}}{h_n}\right) \tag{5.2}$$

及

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{h_n}\sum_{i=1}^n\left(K\left(\frac{X_{i\Delta}-x}{h_n}\right)\right)^2\int_{i\Delta}^{(i+1)\Delta}\left(\sigma^2(X_{s-})+\left(\int_Y c^2(X_{s-},y)\Pi(dy)\right)\lambda(X_{s-})\right)ds\\
&\quad=\frac{1}{h_n}\int_0^T\left(K\left(\frac{X_{s-}-x}{h_n}\right)\right)^2\left[\sigma^2(X_{s-})+\int_Y c^2(X_{s-},y)\Pi(dy)\lambda(X_{s-})\right]ds\\
&\qquad+O_{\text{a.s.}}\left(\frac{\bar{L}_X^*(T,x)(\Delta\log(1/\Delta))^{1/2}}{h_n}\right).
\end{aligned} \tag{5.3}$$

利用 Harris 常返 Markov 过程的极限定理 (参见文献 [20]), 有

$$\begin{aligned}
&\frac{\frac{1}{h_n}\sum_{i=1}^n(K(\frac{X_{i\Delta}-x}{h_n}))^2\int_{i\Delta}^{(i+1)\Delta}(\sigma^2(X_{s-})+(\int_Y c^2(X_{s-},y)\Pi(dy))\lambda(X_{s-}))ds}{\frac{\Delta}{h_n}\sum_{i=1}^n K(\frac{X_{i\Delta}-x}{h_n})}\\
&\quad=\frac{\frac{1}{h_n}\int_0^T(K(\frac{X_{s-}-x}{h_n}))^2[\sigma^2(X_{s-})+\int_Y c^2(X_{s-},y)\Pi(dy)\lambda(X_{s-})]ds+O_{\text{a.s}}(\frac{\bar{L}_X^*(T,x)(\Delta\log(1/\Delta))^{1/2}}{h_n})}{\frac{1}{h_n}\int_0^T K(\frac{X_{s-}-x}{h_n})ds+O_{\text{a.s}}(\frac{\bar{L}_X^*(T,x)(\Delta\log(1/\Delta))^{1/2}}{h_n})}\\
&\quad\to\frac{\int_R K^2(q)\sigma^2(x+qh_n)+\int_Y c^2(x+qh_n,y)\Pi(dy)\lambda(x+qh_n)\phi(x+qh_n)dq}{\int_R K(q)\phi(x+qh_n)dq}\\
&\quad\to K_2\mathbf{M}^2(x),
\end{aligned}$$

这里 $\phi(dx)$ 是 X_t 的 σ- 有限不变测度, 则有

$$\frac{\frac{h_n\bar{L}_X^*(T,x)}{\Delta}\sum_{i=1}^n(K(\frac{X_{i\Delta}-x}{h_n}))^2\frac{B_{\mu_1}}{\Delta}}{(\sum_{i=1}^n K(\frac{X_{i\Delta}-x}{h_n}))^2} \xrightarrow{\text{a.s.}} K_2\mathbf{M}^2(x). \tag{5.4}$$

对 B_{μ_2}, 我们有

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{\frac{1}{h_n}\sum_{i=1}^n(K(\frac{X_{i\Delta}-x}{h_n}))^2 2\int_{i\Delta}^{(i+1)\Delta}(X_{s-}-X_{i\Delta})\mu(X_{s-})ds}{\frac{\Delta}{h_n}\sum_{i=1}^n K(\frac{X_{i\Delta}-x}{h_n})}\right|\\
&\qquad\leqslant O_{\text{a.s.}}((\Delta\log(1/\Delta))^{1/2})\frac{\frac{1}{h_n}\sum_{i=1}^n(K(\frac{X_{i\Delta}-x}{h_n}))^2 2\int_{i\Delta}^{(i+1)\Delta}|\mu(X_{s-})|ds}{\frac{\Delta}{h_n}\sum_{i=1}^n K(\frac{X_{i\Delta}-x}{h_n})}.
\end{aligned} \tag{5.5}$$

类似于 B_{μ_1}, 我们有 (5.5) 式的右边 $= O_{\text{a.s.}}((\Delta\log(1/\Delta))^{1/2})(2|\mu(x)|)\to 0$, 则我们有

$$\frac{\frac{h_n\bar{L}_X^*(T,x)}{\Delta}\sum_{i=1}^n(K(\frac{X_{i\Delta}-x}{h_n}))^2\frac{B_{\mu_2}}{\Delta}}{(\sum_{i=1}^n K(\frac{X_{i\Delta}-x}{h_n}))^2} \xrightarrow{\text{a.s.}} 0, \tag{5.6}$$

考虑 B_{μ_3}.

由 Bandi 和 Nguyen[4], 我们有

$$\max_{i\leqslant n}\sup_{i\Delta\leqslant s\leqslant(i+1)\Delta}|X_{s-}-X_{i\Delta}|=O_{\text{a.s.}}((\Delta\log(1/\Delta))^{1/2}).$$

则我们得到

$$\begin{aligned}&\left|\frac{\frac{1}{h_n}\sum_{i=1}^n(K(\frac{X_{i\Delta}-x}{h_n}))^2\int_{i\Delta}^{(i+1)\Delta}(X_{s-}-X_{i\Delta})\sigma(X_{s-})dW_s}{\frac{\Delta}{h_n}\sum_{i=1}^n K(\frac{X_{i\Delta}-x}{h_n})}\right|\\&\qquad\leqslant O_{\text{a.s.}}((\Delta\log(1/\Delta))^{1/2})\frac{\frac{1}{h_n}\sum_{i=1}^n(K(\frac{X_{i\Delta}-x}{h_n}))^2\int_{i\Delta}^{(i+1)\Delta}|\sigma(X_{s-})|dW_s}{\frac{\Delta}{h_n}\sum_{i=1}^n K(\frac{X_{i\Delta}-x}{h_n})}\\&\qquad=:O_{\text{a.s.}}((\Delta\log(1/\Delta))^{1/2})\beta_n(x).\end{aligned}\tag{5.7}$$

定义 $\beta_n^{num}(x)$ 为 $\beta_n(x)$ 的分子部分, 记

$$\begin{aligned}(\hat\beta_n^{num}(x))_r:=&\sqrt{h_n}(\beta_n^{num}(x))_r\\:=&\frac{1}{\sqrt{h_n}}\sum_{i=1}^{[nr]-1}\left(K\left(\frac{X_{i\Delta}-x}{h_n}\right)\right)^2\int_{i\Delta}^{(i+1)\Delta}|\sigma(X_{s-})|dW_s.\end{aligned}$$

则 $(\hat\beta_n^{num}(x))_r$ 的二次变差过程可写作

$$\begin{aligned}[\hat\beta_n^{num}(x)]_r=&\frac{1}{h_n}\sum_{i=1}^{[nr]-1}\left(K\left(\frac{X_{i\Delta}-x}{h_n}\right)\right)^4\int_{i\Delta}^{(i+1)\Delta}\sigma^2(X_{s-})ds\\&\xrightarrow{\text{a.s.}}\int_R(K(s))^4ds\bar L_X^*(rT,x)\sigma^2(x),\end{aligned}$$

(参见文献 [4]) 利用时间变换 Knight 嵌入定理 (参见文献 [19]), 我们得到 $(\hat\beta_n^{num}(x))_r$ 收敛到连续的局部鞅

$$M_{rT}(x)=B_{\int_R(K(s))^4ds\bar L_X^*(rT,x)\sigma^2(x)},$$

这里 B 是与 W 独立的 Brown 运动. 于是, 我们有

$$\frac{(\hat\beta_n^{num}(x))_r}{\frac{\Delta}{h_n}\sum_{i=1}^{[nr]-1}K(\frac{X_{i\Delta}-x}{h_n})}\Rightarrow\mathbf{MN}\left(0,\frac{\int_R(K(s))^4ds\sigma^2(x)}{\bar L_X^*(rT,x)}\right).$$

因此, 当 $r=1$ 和 $T\to\infty$, 我们有

$$\beta_n(x)=O_P\left(\frac{1}{\sqrt{h_n\bar L_X^*(T,x)}}\right),$$

$$\frac{\frac{1}{h_n}\sum_{i=1}^n(K(\frac{X_{i\Delta}-x}{h_n}))^2\frac{B_{\mu_3}}{\Delta}}{\frac{\Delta}{h_n}\sum_{i=1}^n K(\frac{X_{i\Delta}-x}{h_n})}\xrightarrow{P}0.\tag{5.8}$$

B_{μ_4} 可写作

$$\frac{h_n\bar L_X^*(T,x)}{\Delta}\cdot\frac{\sum_{i=1}^n(K(\frac{X_{i\Delta}-x}{h_n}))^2\frac{\int_{i\Delta}^{(i+1)\Delta}\int_Y(c^2(X_{s-},y)+2c(X_{s-},y)(X_{s-}-X_{i\Delta}))\bar\nu(ds,dy)}{\Delta}}{(\sum_{i=1}^n K(\frac{X_{i\Delta}-x}{h_n}))^2}.$$

考虑

$$\frac{\frac{1}{h_n}\sum_{i=1}^n(K(\frac{X_{i\Delta}-x}{h_n}))^2\int_{i\Delta}^{(i+1)\Delta}\int_Y(c^2(X_{s-},y)+2c(X_{s-},y)(X_{s-}-X_{i\Delta}))\bar{\nu}(ds,dy)}{\frac{\Delta}{h_n}\sum_{i=1}^n K(\frac{X_{i\Delta}-x}{h_n})}.$$

由 (2.4), (5.6) 和 (5.7), 我们有

$$\frac{\frac{1}{h_n}\sum_{i=1}^n(K(\frac{X_{i\Delta}-x}{h_n}))^2\int_{i\Delta}^{(i+1)\Delta}\int_Y(2c(X_{s-},y)(X_{s-}-X_{i\Delta}))\bar{\nu}(ds,dy)}{\frac{\Delta}{h_n}\sum_{i=1}^n K(\frac{X_{i\Delta}-x}{h_n})}\xrightarrow{\text{a.s.}}0. \tag{5.9}$$

随机测度 $\bar{\nu}(ds,dy)$ 是补偿随机测度. 由补偿随机测度的性质 (参见文献 [16])

$$\int_{i\Delta}^{(i+1)\Delta}\left(K\left(\frac{X_{i\Delta}-x}{h_n}\right)\right)^2\int_Y(c^2(X_{s-},y))\bar{\nu}(ds,dy)=:W_{i\Delta}(x)$$

是鞅差序列, 且 $E(W_{i\Delta}(x))=0,\mathrm{Var}(W_{i\Delta}(x))<\infty$. 由于这些随机变量满足零均值、有限方差, 利用鞅差阵列 L^p 收敛定理 (参见文献 [21]), 我们有

$$\sum_{i=1}^n\left(K\left(\frac{X_{i\Delta}-x}{h_n}\right)\right)^2\int_{i\Delta}^{(i+1)\Delta}\int_Y(c^2(X_{s-},y))\bar{\nu}(ds,dy)$$

依概率收敛, 由引理 4 及 (3.19) 式, 我们有

$$h_n\frac{\Delta}{h_n}\sum_{i=1}^n K\left(\frac{X_{i\Delta}-x}{h_n}\right)\xrightarrow{\text{a.s.}}\infty,$$

于是, 我们得到

$$\frac{\sum_{i=1}^n(K(\frac{X_{i\Delta}-x}{h_n}))^2\int_{i\Delta}^{(i+1)\Delta}\int_Y(c^2(X_{s-},y))\bar{\nu}(ds,dy)}{h_n\frac{\Delta}{h_n}\sum_{i=1}^n K(\frac{X_{i\Delta}-x}{h_n})}\xrightarrow{p}0. \tag{5.10}$$

则我们有 $A_{\mu_1}\xrightarrow{p}K_2\mathbf{M}^2(x)$.

利用相同方法, 我们有 $A_{\mu_2}\xrightarrow{p}0$, $A_{\mu_3}\xrightarrow{p}0$. 引理 6 得证.

注 8 利用引理 6, 我们得到

$$\sum_{i=1}^n f_{\mu_i}^2(x,h_n,\theta)\backsim\frac{\bar{L}_X^*(T,x)h_n}{\Delta^2}, \tag{5.11}$$

对于 A 和 B, $A\backsim B$ 意味着 A/B 以概率 1 收敛至非零值.

引理 7 在定理 1 条件下, 对于任意 $\tau(x)$, 我们有

$$l_\mu(\theta)=\frac{(\sum_{i=1}^n f_{\mu_i}(x,h_n,\theta))^2}{\sum_{i=1}^n f_{\mu_i}^2(x,h_n,\theta)}+o_P(1), \tag{5.12}$$

这里 $\theta=\mu(x)+\frac{\tau(x)}{\sqrt{h_n\bar{L}_X^*(T,x)}}$.

证明 利用 Lagrange 乘子法, (4.2) 的解为

$$\hat{p}_i=\frac{1}{n(1+\lambda_\mu(x,h_n,\theta)f_{\mu_i}(x,h_n,\theta))}, \tag{5.13}$$

这里 $\lambda_\mu(x,h_n,\theta)$ 满足

$$\sum_{i=1}^n\frac{f_{\mu_i}(x,h_n,\theta)}{1+\lambda_\mu(x,h_n,\theta)f_{\mu_i}(x,h_n,\theta)}=0. \tag{5.14}$$

考虑

$$l_\mu(\theta)=2\sum_{i=1}^n\log(1+\lambda_\mu(x,h_n,\theta)f_{\mu_i}(x,h_n,\theta)). \tag{5.15}$$

由于 $K(\cdot)$ 是一个有有界紧支撑的有界函数, θ 又趋近于 $\mu(x)$, 由假设 2,

$$\sup_{1\leqslant i\leqslant n}|f_{\mu_i}(x,h_n,\theta)|\leqslant O_{\text{a.s.}}\left(\sqrt{\frac{1}{\Delta}\log\left(\frac{1}{\Delta}\right)}\right).$$

由 Xu[14,15] 的证明, 我们得到

$$\left(1-C\frac{|\sum_{i=1}^n f_{\mu_i}(x,h_n,\theta)|}{\sum_{i=1}^n f_{\mu_i}^2(x,h_n,\theta)}\right)|\lambda_\mu(x,h_n,\theta)|\leqslant\frac{|\sum_{i=1}^n f_{\mu_i}(x,h_n,\theta)|}{\sum_{i=1}^n f_{\mu_i}^2(x,h_n,\theta)}.$$

利用引理 5, 我们有

$$\sqrt{(h_n\bar{L}_X^*(T,x)}\frac{\sum_{i=1}^n f_{\mu_i}(x,h_n,\theta)}{\Sigma_{i=1}^n K(\frac{X_{i\Delta}-x}{h_n})}=O_P(1),$$

于是, 我们得到

$$\left|\sum_{i=1}^n f_{\mu_i}(x,h_n,\theta)\right|=O_P\left(\frac{(h_n\bar{L}_X^*(T,x))^{1/2}}{\Delta}\right). \tag{5.16}$$

由 (5.11) 和 (5.16), 我们有

$$|\lambda_\mu(x,h_n,\theta)|=O_P\left(\frac{\Delta}{(h_n\bar{L}_X^*(T,x))^{1/2}}\right). \tag{5.17}$$

由 (4.5) 我们得到 $|\lambda_\mu(x,h_n,\theta)|^2\cdot\sup_{1\leqslant i\leqslant n}|f_{\mu_i}(x,h_n,\theta)|^3=o_P(1)$. 由 Xu[14,15] 的证明, 我们得到

$$\lambda_\mu(x,h_n,\theta)=\frac{\sum_{i=1}^n f_{\mu_i}(x,h_n,\theta)}{\sum_{i=1}^n f_{\mu_i}^2(x,h_n,\theta)}+o_P(1). \tag{5.18}$$

利用 Taylor 展开, 我们得到

$$\log(1+\lambda_\mu(x,h_n,\theta)f_{\mu_i}(x,h_n,\theta))=\lambda_\mu(x,h_n,\theta)f_{\mu_i}(x,h_n,\theta)-\frac{1}{2}\lambda_\mu^2(x,h_n,\theta)f_{\mu_i}^2(x,h_n,\theta)+\eta_{\mu_i}(\theta),$$

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^n\eta_{\mu_i}(\theta)\leqslant&\sum_{i=1}^n|\lambda_\mu^3(x,h_n,\theta)f_{\mu_i}^3(x,h_n,\theta)|\\ \leqslant&\sup_{1\leqslant i\leqslant n}|\lambda_\mu(x,h_n,\theta)f_{\mu_i}(x,h_n,\theta)|\sum_{i=1}^n\lambda_\mu^2(x,h_n,\theta)f_{\mu_i}^2(x,h_n,\theta)\\ =&O_P\left(\frac{1}{(h_n\bar{L}_X^*(T,x))^{1/2}}\sqrt{\Delta\log\left(\frac{1}{\Delta}\right)}\right).\end{aligned}$$

由 (3.19), 我们得到

$$\sum_{i=1}^n\eta_{\mu_i}(\theta)=o_P(1). \tag{5.19}$$

结合 (5.18), (5.19) 及 (5.10), 我们有 (5.12).

定理 1 的证明 由 (5.12), 我们有

$$l_\mu(\theta)=\frac{B_\mu^2(x,h_n,\theta)}{A_\mu(x,h_n,\theta)}+o_P(1),$$

这里 $A_\mu(x,h_n,\theta)$ 与引理 6 中相同, 我们还可以得到

$$B_\mu(x,h_n,\theta)=\frac{\sum_{i=1}^n f_{\mu_i}(x,h_n,\theta)}{\sum_{i=1}^n K(\frac{X_{i\Delta}-x}{h_n})}.$$

由引理 7,

$$l_\mu(\theta)=\frac{(\sum_{i=1}^n f_{\mu_i}(x,h_n,\theta))^2}{\sum_{i=1}^n f_{\mu_i}^2(x,h_n,\theta)}+o_P(1),$$

由引理 5, 我们有 $\sqrt{h_n\bar{L}_X^*(T,a)}B_\mu(x,h_n,\theta)\Rightarrow N(0,K_2M^2(a))$, 利用引理 6, 我们得到 $h_n\bar{L}_X^*(T,x)A_\mu(x,h_n,\theta)\xrightarrow{P}K_2\mathbf{M}^2(x)$. 由卡方分布的定义, 我们可以得到定理 1.

致谢 衷心感谢审稿人对本文提出的建设性意见, 感谢编辑部同志们的辛勤工作.

参考文献

1 Andersen T, Benzoni L, Lund J. An empirical investigation of continuous time equity return models. J Finance, 2002, 57: 1239–1284
2 Baskshi G, Cao Z, Chen Z. Empirical performance of alternative option pricing models. J Finance, 1997, 52: 2003–2049
3 Duffie D, Pan J, Singleton K. Transform analysis and asset pricing for affine jump-diffusions. Econometrica, 2000, 68: 1343–1376
4 Bandi F, Nguyen T. On the functional estimation of jump-diffusion models. J Econometrics, 2003, 116: 293–328
5 Aït-Sahalia Y, Jacod J. Testing for jumps in a discretely observed process. Ann Statist, 2009, 37: 184–222
6 Bandi F, Phillps P. Fully nonparametric estimation of scalar diffusion models. Econometrica, 2003, 71: 241–283
7 Fan J, Zhang C. A reexamination of diffusion estimations with applications to financial model validation. J Amer Statist Assoc, 2003, 98: 118–134
8 Owen A. Empirical likelihood ratio confidence intervals for a single functional. Biometrica, 1988, 75: 237–249
9 Owen A. Empirical likelihood ratio confidence regions. Ann Statist, 1990, 18: 90–120
10 Owen A. Empirical Likelihood. Boca Raton: Chapman and Hall/CRC Press, 2001
11 Kitamura Y. Empirical Likelihood Methods in Econometrics: Theory and Practice. Working paper: Yale University, 2006
12 Chen S, Qin Y. Empirical likelihood confidence interval for local linear smoothers. Biometrica, 2000, 87: 946–953
13 Chan N, Peng L, Zhang D. Empirical likelihood based confidence intervals for conditional variance in hereroskedastic regression models. F Econometric Theory, to appear
14 Xu K. Empirical Likelihood-based inference for nonparametric recurrent diffusions. F J Econometrics, to appear
15 Xu K. Re-weighted Functional Estimation of Diffusion Models. F Econometric Theory, to appear
16 Jacod J, Shiryaev A N. Limit Theorems for Stochastic Processes. Berlin-Heidelberg-New York-Hong Kong-London-Milan-Paris-Tokyo: Springer, 2003
17 Protter P. Stochastic Integration and Differential Equations. Berlin-Heidelberg-New York-Hong Kong-London-Milan-Paris-Tokyo: Springer, 2004
18 Rogers L, Williams D. Diffusions, Markov Processes, and Martingales, vol 2. Cambridge: Cambridge University Press, 2000
19 Revuz D, Yor M. Continuous Martingales and Brownian Motion. Berlin-Heidelberg-New York-Hong Kong-London-Milan-Paris-Tokyo: Springer, 1999
20 AZéma J, Kaplan-Duflo M, Revuz D. Measure invariante sur les classes récurrentes des processus de Markov. Zeit Wahrsh Verwand Gebie, 1967, 8: 157–181
21 Hall P, Heyde C. Martingale Limit Theory and its Applications. New York: Academic Press, 1986
22 孙曙光, 张新生. 基于离散观测的 OV 型过程的经验似估计. 中国科学 A, 2009, 39: 99–120