中国科学(A 辑)
第 31 卷 第 9 期 SCIENCE IN CHINA (Series A) 2001 年 9 月

交错群 A_5 的 Cayley 图同构的 Li-Praeger 猜想*

徐明曜 方新贵 沈孝燮 白永吉
(北京大学数学学院, 北京 100871) (釜庆国立大学数学系,釜山 608~737,韩国)

摘要 设 G 是有限群, S 是 $G\setminus\{1\}$ 的子集,并满足 $S=S^{-1}$. 用 $X=\mathrm{Cay}(G,S)$ 表示 G 关于 S 的 Cayley 图. 称 S 为 G 的 CI-子集, 如果对任意同构 $\mathrm{Cay}(G,S)\cong\mathrm{Cay}(G,T)$ 存在 $\alpha\in\mathrm{Aut}(G)$, 使得 $S^\alpha=T$. 设 m 是正整数,称 G 为 m-CI-群, 如果 G 的每个满足 $S=S^{-1}$ 和 $|S|\leqslant m$ 的子集 S 都是 CI 的. 证明了 Li-Praeger 猜想:交错群 A_5 是 4-CI-群.

关键词 Cayley 图 CI-子集 m-CI-群 正规 Cayley 图

设 G 是有限群, S 是 G 满足 $1\notin S$ 和 $S^{-1}=S$ 的子集. G 关于 S 的 Cayley 图 $X=\mathrm{Cay}(G,S)$ 定义为

$$V(X)=G,$$
$$E(X)=\{(g,sg)\mid g\in G,s\in S\}.$$

因为 $S^{-1}=S$, $\mathrm{Cay}(G,S)$是无向图.

设 $\alpha\in\mathrm{Aut}(G)$, 其中 $\mathrm{Aut}(G)$是 G 的自同构群. 设 $S^\alpha=T$. 显然 $\mathrm{Cay}(G,S)$同构于 $\mathrm{Cay}(G,T)$. Cayley 图之间的这类同构称为 Cayley 同构.

给定 G 的子集 S,称 S 为 G 的 CI-子集,如果对 Cayley 图之间的任意同构 $\mathrm{Cay}(G,S)\cong\mathrm{Cay}(G,T)$存在 $\alpha\in\mathrm{Aut}(G)$,使得 $S^\alpha=T$.

设 m 是正整数. 有限群 G 称为 m-CI-群, 如果 G 的每个满足 $S=S^{-1}$和 $|S|\leqslant m$ 的子集 S 都是 CI-子集.

在文献[1]中, Li 和 Praeger 证明了 A_5 是仅有的 3-CI 的非交换单群. 他们猜想 A_5 也是 4-CI 的. 本文证明这个猜想.

定理 交错群 A_5 是 4-CI 群.

先对符号和术语作一说明.

对有限、简单无向图 $X=(V(X),E(X))$,用 $\mathrm{Aut}(X)$表示 X 的自同构群. 称 X 为点传递、边传递或弧传递的, 如果 $\mathrm{Aut}(X)$在 $V(X)$, $E(X)$或 X 的弧集上作用传递(图中相邻顶点的有序对称为弧).

Cayley 图 $\mathrm{Cay}(G,S)$都是点传递的,因其自同构群包含 G 的右正则表示 $R(G)$. 但其逆不

2000-12-14 收稿
* 国家自然科学基金(批准号: 19831050)和国家教育委员会博士点基金(批准号: 97000141)资助项目

真. Sabidussi[2]给出了一种用群构造所有点传递图的方法,即 Sabidussi 陪集图.

设 G 是有限群, H 是 G 的子群. 取 G 满足 $D\cap H=\emptyset$ 和 $D=HDH$ 的子集 D. 定义一个有向图 $X=\mathrm{Sab}(G,H,D)$如下:

$$V(X)=\{Hg\mid g\in G\},$$
$$E(X)=\{(Hg,Hh)\mid hg^{-1}\in D\},$$

则 X 是点传递有向图,并且 $\mathrm{Aut}(X)$包含 G 的右正则表示 $R(G)$,因此 X 是点传递图. X 的度数是 $|D:H|$,即 H 在 D 中的陪集数. 容易证明 X 是连通的当且仅当 $G=\langle D\rangle$; X 是无向的当且仅当 $D^{-1}=D$. 又若 $D=HaH$ 是一个双陪集,其中 $a\in G\setminus H$,则 $R(G)$在 X 上作用弧传递.

还需要点传递图 X 的块图的概念. 设 $A=\mathrm{Aut}(X)$. 称 $V(X)$的子集 B 为 A 的块,如果对任意 $g\in A$,有 $B\cap B^g=B$ 或 $\emptyset$. 称块 B 为非平凡块,如果 $1<|B|<|V(X)|$. 设 A 有一非平凡块 B,称 $\mathscr{B}=\{B^g\mid g\in G\}$为 A 的一个完全块系. 如下定义 X 关于 $\mathscr{B}$的块图 $X/\mathscr{B}$:

$$V(X/\mathscr{B})=\mathscr{B},$$
$$E(X/\mathscr{B})=\{BB'\mid 存在\ v\in B,\ v'\in B',使得\ vv'\in E(X)\}.$$

X 的自同构群 A 诱导出一个在 $X/\mathscr{B}$上的点传递作用. 并且若 X 是连通的,则 $X/\mathscr{B}$亦然.

一个特殊情形在本文中十分有用,即若 A 有一非平凡非传递正规子群 N,则 N 的轨道是非平凡块,并组成 A 的一个完全块系.

最后还需要正规 Cayley 图的概念.

设 $X=\mathrm{Cay}(G,S)$是 G 关于 S 的 Cayley 图. 设

$$\mathrm{Aut}(G,S)=\{\alpha\in\mathrm{Aut}(G)\mid S^{\alpha}=S\}.$$

显然, $\mathrm{Aut}(X)\geqslant R(G)\mathrm{Aut}(G,S)$. 设 $A=\mathrm{Aut}(X)$. 容易证明:

命题 0.1[3]　(1) $N_A(R(G))=R(G)\mathrm{Aut}(G,S)$; (2) $A=R(G)\mathrm{Aut}(G,S)$等价于 $R(G)\trianglelefteq A$.

于是有

定义 0.1　Cayley 图 $X=\mathrm{Cay}(G,S)$称为关于 G 正规的, 如果 $R(G)\trianglelefteq A=\mathrm{Aut}(X)$.

如果一个 Cayley 图是正规的,那么根据命题 0.1(2),它的全自同构群可仅被群 G 和子集 S 确定,因此这个概念对决定 Cayley 图的全自同构群是非常重要的.

下面的命题是上述定义的直接推论.

命题 0.2　设 $X=\mathrm{Cay}(G,S)$是 G 关于 S 的 Cayley 图, $A=\mathrm{Aut}(X)$. 设 A_1 是单位元素 1 在 A 中的点稳定子群,则 X 是正规的当且仅当 A_1 的每个元素是群 G 的自同构.

本文所用的方法主要是群论,对未定义的群论概念读者可参见文献[4~6].

1　预备知识

下面的引理是 Babai 关于群的 CI-子集的判定准则[7]:

引理 1.1　设 G 是有限群, S 是 G 的不包含单位元素 1 的子集. 又设 $X=\mathrm{Cay}(G,S)$, $A=\mathrm{Aut}(X)$,则 S 是 G 的 CI-子集当且仅当对任意 $\sigma\in\mathrm{Sym}(G)$,只要 $\sigma R(G)\sigma^{-1}\leqslant A$,就存在 $a\in A$,使得 $aR(G)a^{-1}=\sigma R(G)\sigma^{-1}$, 其中 $\mathrm{Sym}(G)$是 G 上的对称群.

用此准则可证明下面的命题,它给出了 A_5 的 Cayley 图的正规性和 CI 性质之间的联系:

命题 1.1　设 $G=A_5$，$S\subseteq G\setminus\{1\}$ 满足 $S^{-1}=S,\langle S\rangle=G$ 和 $|S|\leqslant 4$. 又设 $X=\mathrm{Cay}(G,S)$，$A=\mathrm{Aut}(X)$. 若 X 是正规的，则 S 是 CI-子集.

证　因 $\langle S\rangle=G$，X 是连通的. 设 A_1 是 1 在 A 中的点稳定子群，则 $A=R(G)A_1$. 因为 $A_1^{X_1(1)}$ 的度数至多为 4，其中 $X_1(1)$ 是 1 在 X 中的邻域，又因 X 连通，所以有 $|A_1|=2^\alpha 3^\beta$，其中 α 和 β 是非负整数. 于是 $|A|=2^{\alpha+2}3^{\beta+1}5$. 如果有 $\sigma R(G)\sigma^{-1}\leqslant A$，可断言 $\sigma R(G)\sigma^{-1}=R(G)$，由此据引理 1.1 即可得到 S 是 CI-子集. 现设 $\sigma R(G)\sigma^{-1}\neq R(G)$，则 $K=\sigma R(G)\sigma^{-1}\cap R(G)\trianglelefteq\sigma R(G)\sigma^{-1}\cong A_5$，因此 $K=1$. 这推出 $\sigma R(G)\sigma^{-1}R(G)\leqslant A$，并且 5^2 整除 $|A|$，矛盾. 证毕.

下面的引理依赖于有限单群的分类.

引理 1.2　设 G 非交换单群且 $|G|=2^\alpha 3^\beta 5$，则 $G\cong A_5$ 或 A_6，或 PSU(4,2).

证　由文献[8]，“3 素数单群”只有 A_5，A_6，PSL(2,7)，PSL(2,8)，PSL(2,17)，PSL(3,3)，PSU(3,3) 和 PSU(4,2). 检验这些群的阶即得所需结果. 证毕.

由文献[9]有下面引理：

引理 1.3　设 d 是正整数，$d|60$，则 PSU(4,2) 没有 d 级传递置换表示.

证　查阅文献[9]，PSU(4,2)没有指数为 d 的子群，由此得所需结果. 证毕.

下面引理是关于交错群 A_6 的.

引理 1.4　设 $G\cong A_6$，且 H 是 G 的同构于 A_5 的子群，则 H 在 G 中无补.

证　考虑 G 用右乘变换在 H 的右陪集的集合上的传递置换表示. 因为 G 是单群，该表示忠实，并且是 A_6 在 6-元集合上的通常表示. 若 H 在 G 中有补 K，则 K 将表示成 A_6 的正则子群. 但 A_6 没有正则子群，矛盾. 证毕.

最后还需要单群的 Schur 乘子的概念(可见文献[5,10]). 设 G 是单群，Z 是一个交换群. 称 Z 被 G 的扩张 E 为 G 的中心扩张，如果 $Z\leqslant Z(E)$. 若 E 是完备的，即满足 $E'=E$，则称 E 为 G 的覆盖群. Schur 证明了对每个单群 G，都存在一个极大的覆盖群 M，使得 G 的每个覆盖群都是 M 的商群. 群 M 称为 G 的完全覆盖群，并且 M 的中心 Mult(G)称为 G 的 Schur 乘子.

引理 1.5[9]　A_5 的 Schur 乘子是$\mathbb{Z}_2$，而 A_6 的 Schur 乘子是$\mathbb{Z}_6$.

2　定理的证明

设 $G=A_5$，$S\subseteq G\setminus\{1\}$ 且 $S^{-1}=S,|S|=4,X=\mathrm{Cay}(G,S)$，$A=\mathrm{Aut}(X)$.

先假设 X 不连通，则 X 是若干彼此同构的连通分支的并，每个连通分支是 G 的某个真子群的 Cayley 图，且这个子群只能是 A_4，D_{10}，D_6 或$\mathbb{Z}_5$. 由文献[7,11]，所有这些群都是 CI-群. 因此 X 是 CI-图. 故以下设 X 连通.

设 A_1 是 1 在 A 中的点稳定子群，则 $A=R(G)A_1$. 又设 $X_1(1)$是 1 在 X 中的邻域. 因为 $A_1^{X_1(1)}$ 的级为 4 且 X 连通，有 $|A_1|=2^\alpha 3^\beta$，其中 α 和 β 是非负整数. 于是 $|A|=2^{\alpha+2}3^{\beta+1}5$. 由此得 A 只有一个非可解的主因子，它是 A_5，A_6，或 PSU(4,2)(见引理 1.2)，而其他的主因子均为初等交换 2-群或 3-群. 取 A 的一个主群列：

$$A\geqslant\cdots\geqslant N_k>N_{k-1}>\cdots>N_1>N_0=1,$$

使得 N_k/N_{k-1}非可解，并且 k 是满足这个条件的最小整数. 因为 N_k/N_{k-1}有 d 级传递置换表

示，$d|60$,由引理 1.3 有 $N_k/N_{k-1}\ncong \mathrm{PSU}(4,2)$．我们区分下面两种不同的情形：

情形 1　$k=1$．这时 $N_1\cong A_5$ 或 A_6．因为 $N_1 \trianglelefteq A$，$G\leqslant N_1$．若 $N_1\cong A_5$,则 $N_1=G$，因此 $G\trianglelefteq A$．若 $N_1\cong A_6$,则因 N_1 在 G 上传递,使得 G 在 N_1 中有补,与引理 1.4 矛盾．

情形 2　$k>1$．这时 N_{k-1}是 A 的可解正规子群,其阶为 2^s3^t，s 和 t 是非负整数．于是 N_{k-1}的轨道 $\mathscr{B}=\{B_1,B_2,\cdots,B_m\}$组成 A 的完全块系,其块长整除 60,因此 $|B_i|=2$，3，4，6 或 12．考虑块图 $\bar{X}=X/\mathscr{B}$．显然 $R(G)$在 $\mathscr{B}$上作用传递．因为诸块是 N_{k-1}的轨道,对任意二相邻块 B_i 和 B_j,诱导子图$[B_i\cup B_j]$是正则的．这推出 $\bar{X}$ 的度数 $\mathrm{Val}(\bar{X})$至多为 4．因为 $\bar{X}$ 有多于 2 个顶点，$\mathrm{Val}(\bar{X})=2,3$,或 4．分下面 3 种情形：

情形 2.1　$\mathrm{Val}(\bar{X})=2$．此时 $\bar{X}$ 是圈．它的全自同构群是二面体群．因 $R(G)$在 $V(X)$上传递,因此在 $\mathscr{B}$上传递．这样 $R(G)$在 $\bar{X}$ 上诱导出非可解的自同构群,矛盾．

情形 2.2　$\mathrm{Val}(\bar{X})=4$．这时对任意二相邻块 B_i 和 B_j,诱导子图$[B_i\cup B_j]$是完全匹配,并且在块中无边．考虑 X 中点 v 在 N_{k-1}中的稳定子群,它也是不动点 v 的邻域中的每个点．因 X 连通,该群必为 1．这说明 N_{k-1}半正则,且$|N_{k-1}|\mid 12$．容易验证所有阶整除 12 的群的自同构群皆可解．因此,同构于 A_5 或 A_6 的主因子 N_k/N_{k-1}必在 N_{k-1}上作用平凡．由 k 的最小性,得 N_k是A_5 或 A_6 的中心扩张,并且 N_k 是完备的,即 $N_k'=N_k$(若 $N_k'<N_k$,可取 G 的主群列,使得 N_k'为其一项,则其非可解主因子在其中出现的项数 $l<k$,与 k 的选取矛盾)．这样 N_k 是 A_5 或 A_6 的覆盖群．由引理 1.5，A_5 的 Schur 乘子是$\mathbb{Z}_2$,而 A_6 的是$\mathbb{Z}_6$．于是就有：(a) $N_{k-1}=\mathbb{Z}_2$,且 N_k 是A_5 的完全覆盖群;(b) $N_{k-1}=\mathbb{Z}_2$,且 N_k 是A_6 的覆盖群,其中心为$\mathbb{Z}_2$;(c) $N_{k-1}=\mathbb{Z}_3$,且 N_k 是A_6 的覆盖群,其中心为$\mathbb{Z}_3$;(d) $N_{k-1}=\mathbb{Z}_6$,且 N_k 是 A_6 的完全覆盖群．

若(a)发生,则 $N_k\cong SL(2,5)$;若(b)发生,则 $N_k\cong SL(2,9)$．对此两种情形，N_k 只有一个对合,与它有子群 $R(G)\cong A_5$ 矛盾．

现设(d)发生,则块图 $\bar{X}$ 为 10 阶,并有一自同构群 $\bar{N}=N_k/N_{k-1}\cong A_6$,其块稳定子群阶为 36．由文献[9]知其为 $\bar{N}$ 的极大子群．因此 $\bar{N}$ 在$\bar{X}$ 上作用本原．因为仅有的 10 级本原群是 A_5 或 S_5,$\bar{N}$ 在 $\mathscr{B}$上必 2 重传递．于是 $\bar{X}\cong K_{10}$,与 $\mathrm{Val}(\bar{X})=4$ 矛盾．

最后假定(c)发生,则块图 $\bar{X}$ 为 20 阶,并有一自同构群 $\bar{N}=N_k/N_{k-1}\cong A_6$,其块稳定子群阶为 18,它必包含于 $\bar{N}$ 的 36 阶的极大子群之中．这样 $\bar{N}$ 在 $\mathscr{B}$上作用非本原,有长为 2 的块．因为 20 级本原群必 2 重传递(见文献[4]的附录 B),且 $\bar{X}$ 不是完全图，$\bar{N}$ 的块也是 $\mathrm{Aut}(\bar{X})$的块．因此可以考虑 $\bar{X}$ 的块长为 2 的块图．根据上面的推理,此块图是完全图,且度数为 9．但因原块图 $\bar{X}$ 的度数为 4,此块图的度数至多为 8,矛盾．

情形 2.3　$\mathrm{Val}(\bar{X})=3$．先设块中含有边．这时任一块 B_i 的诱导子图度数为 1,且对任意两相邻块 B_i 和 B_j,它们之间是完全匹配．应用与情形 2.2 中同样的推理,得 N_{k-1}半正则,因此情形(a)～(d)之一发生．再用同样的推理,即可得矛盾．因此以下假定块中无边．于是两相邻块 B_i 和 B_j 之间的诱导子图$[B_i\cup B_j]$或者为完全匹配,或者有度数 2．这推出块图 $\bar{X}$ 不弧传递．因为 $\bar{X}$ 的度数为 3,其阶必为偶数．因此块长$|B_i|=6$，3 或 2．

(1) $|B_i|=6$．　此时 $R(G)\cong A_5$ 在 $\bar{X}$ 上作用忠实且点传递．因为 $R(G)$的块稳定子群阶为 6,它是 $R(G)$的极大子群．这样 $R(G)$在 $\bar{X}$ 上作用点本原,推出 $\bar{X}$ 同构于 Petersen 图,但后者为弧传递,矛盾．

(2) $|B_i|=3$. 这时有 $R(G)$在 $\bar{X}$ 上作用忠实且点传递,其稳定子群同构于$\mathbb{Z}_3$. 容易验证 A_5 在$\mathbb{Z}_3$ 的陪集上的作用有两个次轨道长为 1,而另外 6 个长为 3. 这推出 $\bar{X}$ 必为一长为 3 的轨道图,于是弧传递，矛盾.

(3) $|B_i|=2$. 此时 $\bar{X}$ 同构于 Sabidussi 陪集图 $\mathrm{Sab}(G,H,D)$,其中 $G\cong A_5$, $H\cong\mathbb{Z}_2$. 因为 A_5 的所有对合共轭,不失一般性可设 $H=\{1,h\}$, 其中 $h=(12)(34)$. 这样 $\mathscr{B}=\{Hg\mid g\in G\}$. 设 $B_1=H$,再设 B_2,B_3 和 B_4 是与 B_1 相邻的 3 块. 有诱导子图$[B_1\cup B_2]\cong C_4$,而对 $i=3,4$, $[B_1\cup B_i]\cong 2K_2$. 假定 $S=\{s_1,s_2,s_3,s_4\}$, $B_2=\{s_1,s_2\}$, B_3 包含 s_3,而 B_4 包含 s_4. 因为 B_2 是 H 的右陪集,有 $s_2=hs_1$. 考虑由 h 出发到 B_2 中顶点的两条边,即$\{h,s_1\}$和$\{h,s_2\}$. 断言 $s_1h=s_2$. 若否, $s_1h\neq s_2$,则 4 元素 s_1, $s_2=hs_1$, s_1h 和 $s_2h=hs_1h$ 互不相同. 因为它们都在 S 中,可设 $s_1h=s_3$, $s_2h=s_4$. 这推出 $B_3=\{s_3,hs_3\}=\{s_3,s_4\}$, $B_4=\{s_4,hs_4\}=\{s_3,s_4\}$. 因此 $B_3=B_4$,矛盾. 于是必有 $s_1h=s_2$,并有 $s_1h=hs_1$ 和 $s_2h=hs_2$. 这样 s_1 和 s_2 都在 $C_G(h)$ 中. 容易看出 $C_G(h)=\{1,(12)(34),(13)(24),(14)(23)\}$. 故可设 $s_1=(13)(24)$, $s_2=(14)(23)$. 再考虑 $B_3=Hs_3=\{s_3,hs_3\}$和 $B_4=Hs_4=\{s_4,hs_4\}$. 因为 s_3 和 s_4 不在 $C_G(h)$中,有 $hs_3\neq s_3h$,且 $s_4h=hs_3$. 类似可得 $s_3h=hs_4$. 于是 $hs_3h=s_4$,即 s_3 和 s_4 在 h 下共轭. 另一方面,因为 $S^{-1}=S$, 有$\{s_3,s_4\}^{-1}=\{s_3,s_4\}$. 我们将用这些条件决定所有可能的子集$\{s_3,s_4\}$和 Cayley 图 $X=\mathrm{Cay}(G,S)$.

(ⅰ) 假定 $o(s_3)=3$,则 $s_4=s_3^{-1}$. 因为 $hs_3h=s_4$, 容易检验子集$\{s_3,s_4\}$只可能为$\{(125),(152)\}$或$\{(345),(354)\}$. 添加 s_1 和 s_2 到这两个子集,得到子集 S 和对应的两个 Cayley 图. 因为此二子集在(13)(24)下共轭,此二 Cayley 图同构. 这样找到了第 1 个图 $X_1=\mathrm{Cay}(G,S_1)$, 其中 $S_1=\{s_1,s_2,(125),(152)\}$. 注意 X_1 的围长是 3.

(ⅱ) 假定 $o(s_3)=5$,则也有 $s_4=s_3^{-1}$. 因为 $hs_3h=s_4$,容易检验$\{s_3,s_4\}$只可能为$\{(13542),(13542)^{-1}\}$, $\{(14532),(14532)^{-1}\}$, $\{(14325),(14325)^{-1}\}$或$\{(15243),(15243)^{-1}\}$. 添加 s_1 和 s_2 到这些子集得到子集 S. 容易验证这 4 个子集在 $\mathrm{Aut}(G)\cong S_5$ 的子群 $P=\langle(1324),(12)\rangle$下共轭,其中 P 是 8 阶二面体群. 这样它们给出同构的图. 令 $S_2=\{s_1,s_2,(13542),(12453)\}$, $X_2=\mathrm{Cay}(G,S_2)$. 注意 X_2 的围长是 4,因此 X_2 不和 X_1 同构.

(ⅲ) 假定 $o(s_3)=2$. 因为 $hs_3h=s_4$ 以及 $G\setminus C_G(h)$中共有 12 个对合,有$\{s_3,s_4\}=\{(12)(35),(12)(45)\}$,或$\{(34)(25),(15)(34)\}$,或$\{(13)(25),(15)(24)\}$,或$\{(13)(45),(24)(35)\}$,或$\{(23)(45),(14)(35)\}$,或$\{(14)(25),(15)(23)\}$. 设 $P=\langle(1324),(12)\rangle$. 在共轭作用下, P 在这 6 个 2 元子集上有两个轨道,可取$\{(12)(35),(12)(45)\}$和$\{(13)(25),(15)(24)\}$为代表. 添加 s_1 和 s_2 到此二子集,令 $S_3=\{s_1,s_2,(12)(35),(12)(45)\}$, $S_4=\{s_1,s_2,(13)(25),(15)(24)\}$,再令 $X_3=\mathrm{Cay}(G,S_3)$, $X_4=\mathrm{Cay}(G,S_4)$. 又得到图 X_3 和 X_4.

至此证明了仅有的可能的非 CI-子集是 $S_i(i=1,2,3,4)$. 为完成定理的证明我们证对应于这 4 个子集的 Cayley 图 $X_i=\mathrm{Cay}(G,S_i)(i=1,2,3,4)$,互不同构,于是这 4 个子集也都是 CI-子集.

为此需要关于这 4 个图 X_i 的更多的信息. 首先,对每个 i, X_i 都有子图 $\mathrm{Cay}(G,\{s_1,s_2\})$,它是 15 个长为 4 的圈的并,并且这些圈的顶点恰为 4 阶子群$\langle s_1,s_2\rangle$的陪集. 其次,容易验证在每个 X_i 中,长为 4 的圈必为这 15 个圈中的一个. 这样,如果 $X_i\cong X_j$,其同构映射必把

X_i 中的 4-圈映到 X_j 中的 4-圈. 移掉这些 4-圈,得到的二图也应该同构. 但是,对此 4 图 X_1, X_2, X_3 和 X_4,由 s_3 和 s_4 生成的子群的阶分别为 3, 5, 6 和 10. 这样,由 X_i 移掉所有 4-圈后,得到的图分别为长为 3, 5, 6 和 10 的圈的并. 它们不可能同构. 定理证毕.

参 考 文 献

1 Li C H, Praeger C E. The finite simple groups with at most two fusion classes of every order. Comm Algebra, 1996, 24: 3681 ~ 3704

2 Sabidussi G O. Vertex-transitive graphs. Monash Math, 1964, 68: 426 ~ 438

3 Xu M Y. Automorphism groups and isomorphisms of Cayley digraphs. Discrete Math, 1998, 182: 309 ~ 319

4 Dixon J D, Mortimer B. Permutation Groups. New York: Springer-Verlag, 1996

5 Suzuki M. Group Theory Ⅰ. New York: Springer-Verlag, 1982

6 Wielandt H. Finite Permutation Groups. New York: Academic Press, 1964

7 Babai L. Isomorphism problem for a class of point-symmetric structures. Acta Math Acad Sci Hungar, 1977, 29: 329 ~ 336

8 Gorenstein D. Finite Simple Groups. New York: Plenum Press, 1982

9 Conway J H, Curtis R T, Norton S P, et al. An Atlas of Finite Groups. Oxford: Clarendon Press, 1985

10 Kleidman P, Liebeck M. The Subgroup Structure of the Finite Classical Groups. Cambridge: Cambridge University Press, 1990

11 Gu Z Y, Li C H. A nonabelian CI-group. Australasian J Combin, 1998, 17: 229 ~ 233

12 Conder M, Li C H. On isomorphisms of finite Cayley graphs. European J Combin, 1998, 19: 911 ~ 919

13 Fang Xingui, Xu Mingyao. On isomorphisms of Cayley graphs of small valency. Algebra Colloq, 1994, 1: 67 ~ 76