

重构电导率间断界面的一种水平集方法

林俊杉^{①②}, 陈文斌^{①*}, 程晋^①, 王立峰^①

① 复旦大学数学科学学院, 上海 200433

② Department of Mathematics, Michigan State University, East Lansing, MI 48824, USA

* E-mail: wbchen@fudan.edu.cn

收稿日期: 2007-06-11; 接受日期: 2008-04-27

国家自然科学基金(批准号: 10431030, 10771138)、上海市科技发展基金(批准号: 07JC14001)、国家重点基础研究发展规划项目(批准号: 2005CB321701)和111引智项目(批准号: B08018)

摘要 对一类 EIT(电阻抗断层成像)问题提出一种水平集方法来重构电导率的间断界面。通过选取适当速度函数, 构造了水平集重构算法, 同时给出 EIT 问题及正则化的理论结果。数值例子表明重构算法是有效和稳定的。

关键词 电阻抗断层成像 重构算法 水平集方法

MSC(2000) 主题分类 34K29, 35J05

1 引言

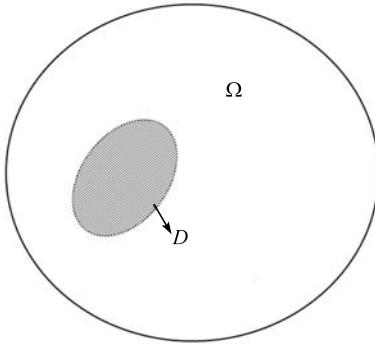
不同的材料会呈现出不同的导电性质, 即有不同的电导率。电阻抗断层成像(Electrical impedance tomography, EIT)正是基于这一物理现象发展起来的, 它的目的就是重构物体内部的电导率图像来确定物体内部的结构。假设导电体 $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ 的电导率为 σ , 其边界 $\partial\Omega \in C^1$ 。如果在边界注入电流 g , 那么电位势 u 满足边值问题

$$\nabla \cdot (\sigma \nabla u) = 0, \quad \text{在 } \Omega \text{ 内}; \quad \sigma \frac{\partial u}{\partial n} = g, \quad \text{在 } \partial\Omega \text{ 上}, \quad (1)$$

其中 n 为外法向方向。当 $\sigma \in L^\infty(\bar{\Omega})$, 并且 $g \in H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$ 时, 根据文献 [1] 中的结果, 我们知道上述 Neumann 问题在相差一个常数的意义下有唯一解 $u \in H^1(\Omega)$ 。这里 $H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$ 与 $H^1(\Omega)$ 都是标准的 Sobolev 空间 [2]。

EIT 问题就是通过边界上的一组或者多组电压和电流数据来重构电阻率 σ 。EIT 技术具有很多优势和广阔的应用前景。目前它在医学方面应用的例子包括乳腺癌探测 [3], 心脏功能的监测 [4] 等。此外, EIT 在材料的无损探伤和地质勘探方面有重要应用, 比如管道腐蚀、地下油罐渗漏的探测以及矿床和地下水的寻找 [5–7]。

关于 EIT 问题的一种著名的数学提法是由 Calderón 于 1980 年提出的 [8]。这个问题现在称为 Calderón 问题。它的提法就是利用所有边界上的电压和电流数据来重构电阻率。用数学形式表示就是通过所谓的 Dirichlet-to-Neumann 映射 $\Lambda_\sigma : H^{1/2}(\Omega) \rightarrow H^{-1/2}(\Omega)$ 来重构电导率 σ 。Calderón 问题在 1980 年左右引发了关于偏微分方程反问题研究的热潮。

图 1 电导率 σ 为分片常数的简化模型

在本文中, 我们假设电导率 σ 是分片常数, 如图 1 所示, 即

$$\sigma = \begin{cases} \sigma^+, & x \in \bar{D}, \\ \sigma^-, & x \in \bar{\Omega} \setminus \bar{D}. \end{cases}$$

进一步假定区域 D 的电导率 $\sigma^+ \gg \sigma^-$. 这种情形在提炼油的时候会出现, \bar{D} 表示水所占的区域, 而 $\bar{\Omega} \setminus \bar{D}$ 中为油. 那么根据实验发现, 在 D 中近似有 $u \approx 0$ (参见文献 [9]), 因此简化后的模型为

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & \text{在 } \Omega \setminus \bar{D} \text{ 内,} \\ u = 0, & \text{在 } \partial D \text{ 上,} \\ \frac{\partial u}{\partial n} = g, \quad u = f, & \text{在 } \partial \Omega \text{ 上,} \end{cases} \quad (2)$$

其中 f 是边界所测量的电压.

本文中所要考虑的反问题是利用一组边界数据 (f, g) 来重构区域 D .

针对 EIT 问题, 对于实际应用来说最为关心的是, 能否有一种有效、快速的算法来重构间断界面 ∂D . 至今为止主要的重构算法分为两类: 直接法和迭代法. 直接法包括由 Hank 和 Brühl 发展的分解算法 [10–12] 和基于 Nachman 对 EIT 唯一性证明的重构公式 [13–14], 这些算法的优点是速度快, 但最大的缺陷是要求 Λ_σ 的所有信息都给定, 这给实际应用造成了很大限制. 迭代法包括最小二乘法 [3, 15] 和 Kohn 提出的变分法 [16], 它们是基于非线性优化问题的求解. 由于问题本身的不稳定性与非线性性, 目前的这些算法的分辨率还不理想. 关于重构算法, 我们也参考文献 [17–21].

本文提出了一种基于水平集方法的重构算法. 众所周知, 水平集方法是 Osher 和 Sethian 于 1988 年提出的 [22], 最初的目的在于追踪不同流体界面的运动, 如今它已经是模拟界面运动的一种有力工具, 特别是界面发生拓扑变化的情形, 在图像处理和计算物理方面有重要应用 [23], 但关于它在反问题方面的应用研究才刚刚开始. Santosa 最早将此方法用于一个积分方程反问题 [24], 此后很多学者相继对它在偏微分方程反问题的应用展开研究, 如 Dorn 等对逆散射问题提出基于水平集方法的重构算法 [25], 而 Chan 和 Tai 对类似 (1) 式的问题提出相应算法 [26, 27], 但与我们所讨论的问题不同之处在于, 他们要求给定 u 或者 ∇u 在 Ω 内的值, 并且将问题直接转化为关于水平集函数 ϕ 的优化问题, 而本文只假定边界上的数据已知. 下面具体阐述如何利用水平集方法来重构 ∂D .

引入时间变量 t , 在 t 时刻用区域 D_t 代替 D , 并记 D_t 的边界为 ∂D_t , 相应的电位势为

$u(t, x)$, 则 $u(t, x)$ 满足下面的边值问题:

$$\begin{cases} \Delta u(t, x) = 0, & x \in \Omega \setminus \bar{D}_t, \\ u(t, x) = 0, & x \in \partial D_t, \\ \frac{\partial u(t, x)}{\partial n} = g(x), & x \in \partial \Omega. \end{cases} \quad (3)$$

定义映射 $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow L^2(\partial \Omega)$, 并且满足

$$F(D_t) = u(t, x), \quad x \in \partial \Omega. \quad (4)$$

与原问题 (2) 相比较, 我们的目标就在于能否给 D_t 的边界 ∂D_t 选取适当的速度 $\mathbf{V}(t, x)$, 使得 $F(D_t)$ 逼近 f , 因此相应的 $u(t, x)$ 达到稳态 $u(x)$. 水平集方法是捕捉界面运动的一种非常有效的方法: 假定 ∂D_t 是函数 $\phi(t, x)$ 的零水平集, 如果给 ∂D_t 选取适当的速度函数 $\mathbf{V}(t, x)$, 只需要数值求解 Hamilton-Jacobi 方程

$$\frac{\partial \phi(t, x)}{\partial t} + \mathbf{V}(t, x) \cdot \nabla \phi(t, x) = 0,$$

就可以模拟界面 ∂D_t 的运动. 显然, 重构算法的关键在于如何选取速度 $\mathbf{V}(t, x)$.

在本文中, 受形状优化理论的启发, 我们可以显式选取速度 $\mathbf{V}(t, x)$ 满足

$$\frac{d}{dt} \|F(D_t) - f\|_{L^2(\partial \Omega)}^2 < 0.$$

本文将通过数值例子说明我们所提出的基于水平集方法的重构算法是有效的, 特别是当 D 为一个单连通区域、或者由距离较远的多个单连通区域组成时非常准确, 而且数值稳定性高, 这是传统 EIT 重构算法所不具备的. 因此, 我们认为这种方法是识别电导率间断界面的一种有希望的算法.

2 基于水平集方法的重构算法

2.1 水平集方法

本小节对水平集方法做简要介绍, 关于它的具体理论和应用可参考 Osher 和 Fedkiw 的专著 [23]. 假定 t 时刻区域 D_t 的边界 ∂D_t 上的每个点以速度 $\mathbf{V}(t, x)$ 运动, 则模拟 ∂D_t 运动轨迹最为直接的方法是在 ∂D_t 上求解常微分方程

$$\frac{dx}{dt} = \mathbf{V}(t, x), \quad (5)$$

这是对界面的一种 Lagrange 描述方式. 如果对方程 (5) 进行数值求解, 就意味着要对 ∂D_t 进行划分. 如果 ∂D_t 的拓扑没有发生变化或者变形不大, 这种方法完全没有问题. 但是, 如果速度场 $\mathbf{V}(t, x)$ 会导致边界发生拓扑变化 (如图 2 (上) 所示), 这种描述方式就完全不可靠, 因为在这种情形下对同一个边界的离散点集合可以有不同的连接方式, 即可以有完全不同的拓扑结构.

为克服拓扑变化和变形带来的困难, 我们用水平集函数 $\phi(t, x)$ 来表示界面 ∂D_t 的演化, 即定义

$$\phi : (0, \infty) \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^1, \quad \text{满足 } \partial D_t = \{(t, x) \mid \phi(t, x) = 0\}. \quad (6)$$

通常要求 ϕ 在 ∂D_t 所包含的区域内小于 0, 在区域外大于 0 (如图 2). 注意到当界面从左演化到右时, 尽管它的拓扑发生了变化, 我们只需要把水平集函数 ϕ 往上移即可, 而不用直接去追踪界面本身的运动轨迹. 这种通过水平集函数 ϕ 来描述界面运动的方法称为水平集方法, 它是一种 Euler 描述方式 [22].

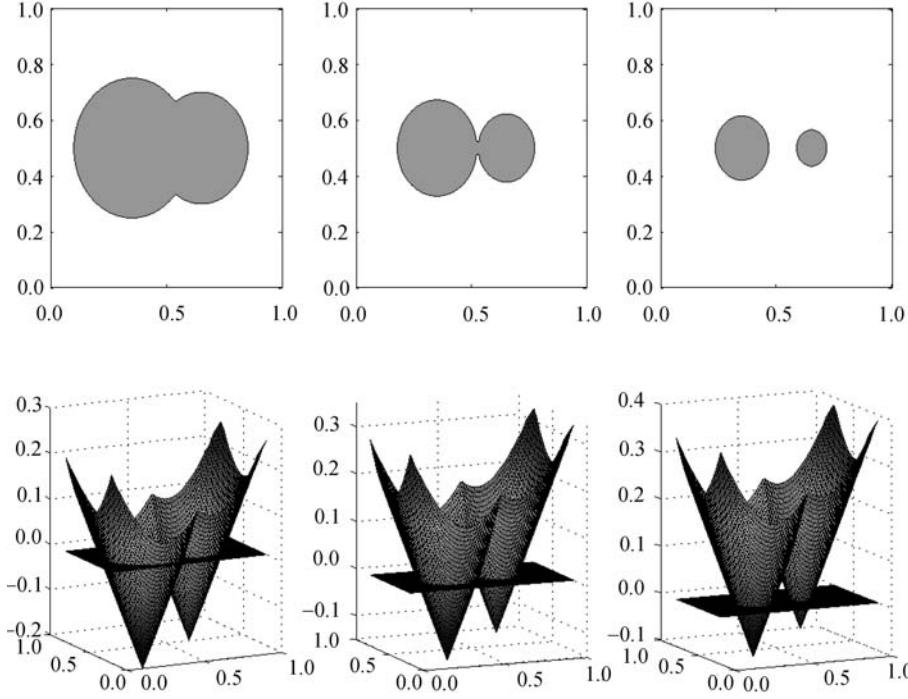


图 2 界面的拓扑变化 (上) 与相应的水平集描述 (下)

对于水平集函数 ϕ , 容易看出它满足偏微分方程

$$\frac{\partial \phi(t, x)}{\partial t} + \mathbf{V}(t, x) \cdot \nabla \phi(t, x) = 0. \quad (7)$$

这个方程通常称为水平集方程, 它是一个 Hamilton-Jacobi 方程. 如果速度是沿 ∂D_t 的外法向方向 $\mathbf{n}(t, \mathbf{x})$, 即 $\mathbf{V}(t, x) = v(t, x)\mathbf{n}(t, x)$, 那么上述水平集方程可化为

$$\frac{\partial \phi(t, x)}{\partial t} + v(t, x) |\nabla \phi(t, x)| = 0. \quad (8)$$

这是因为 $\mathbf{n}(t, x) = \frac{\nabla \phi(t, x)}{|\nabla \phi(t, x)|}$ 的缘故. 对这类方程的数值求解, 时间方向的离散格式可以用 Euler 法, 空间方向的离散可以用迎风格式, 它的精度为一阶, 或者用高精度格式 ENO 和 WENO 格式 [23].

2.2 速度的选取

本小节将给出速度的显式表达式. 一般来说, 对于问题 (2), 最直接的求解方法是求解如下优化问题: 找区域 $D \subset \Omega$, 使得

$$R(D) = \min_{\tilde{D} \subset \Omega} R(\tilde{D}), \quad (9)$$

其中

$$R(\tilde{D}) := \frac{1}{2} \|F(\tilde{D}) - f\|_{L^2(\partial\Omega)}^2 + \alpha \int_{\partial\tilde{D}} 1 \, ds, \quad (10)$$

这里映射 $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow L^2(\partial\Omega)$ 的定义如 (4) 式, $\alpha \int_{\partial\tilde{D}} 1 \, ds$ 为正则化项, $\alpha > 0$ 是正则化参数, 也就是说把边界 $\partial\tilde{D}$ 的长度作为惩罚项. 这种正则化方法在图像处理中经常使用 [28]. 先考虑上述问题不带正则化参数的情形, 即求解

$$\min_{\tilde{D} \subset \Omega} R_1(\tilde{D}) := \min_{\tilde{D} \subset \Omega} \frac{1}{2} \|F(\tilde{D}) - f\|_{L^2(\partial\Omega)}^2. \quad (11)$$

对于这个问题, 我们通常希望找一个“下降方向”, 或者等价地, 给 D_t 的边界 ∂D_t 选取一个速度 $\mathbf{V}(t, x)$, 使得

$$\frac{d}{dt}R_1(D_t) < 0.$$

如果 $u(t, x)$ 满足边值问题 (3), $u(t + \delta t, x)$ 满足

$$\begin{cases} \Delta u(t + \delta t, x) = 0, & x \in \Omega \setminus \bar{D}_{t+\delta t}, \\ u(t + \delta t, x) = 0, & x \in \partial D_{t+\delta t}, \\ \frac{\partial u(t + \delta t, x)}{\partial n} = g(x), & x \in \partial \Omega. \end{cases}$$

定义 $u(t, x)$ 的 Euler 导数 (参见文献 [25, 29])

$$u'(t, x) = \lim_{\delta t \rightarrow 0^+} \frac{u(t + \delta t, x) - u(t, x)}{\delta t},$$

则有下述引理:

引理 2.1 $u(t, x)$ 的 Euler 导数 $u'(t, x)$ 满足边值问题

$$\begin{cases} \Delta u'(t, x) = 0, & x \in \Omega \setminus \bar{D}_t, \\ u'(t, x) + \nabla u_1(t, x) \cdot \mathbf{V}(t, x) = 0, & x \in \partial D_t, \\ \frac{\partial u'(t, x)}{\partial n} = 0, & x \in \partial \Omega. \end{cases} \quad (12)$$

这个引理对速度 $\mathbf{V}(t, x)$ 的选取非常重要, 关于它的证明可以参考文献 [29].

定理 2.1 (速度的选取) 设 $D_t \subset \Omega$, $\mathbf{n}(t, x)$ 为 D_t 的外法向向量. 如果令 $\mathbf{V}(t, x) = v_0(t, x)\mathbf{n}(t, x)$, 其中

$$v_0(t, x) = \frac{\partial u_1(t, x)}{\partial n} \frac{\partial u_2(t, x)}{\partial n}, \quad (13)$$

且 $u_1(t, x)$ 和 $u_2(t, x)$ 分别满足

$$\begin{cases} \Delta u_1(t, x) = 0, & x \in \Omega \setminus \bar{D}_t, \\ u_1(t, x) = 0, & x \in \partial D_t, \\ \frac{\partial u_1(t, x)}{\partial n} = g(x), & x \in \partial \Omega \end{cases} \quad (14)$$

与

$$\begin{cases} \Delta u_2(t, x) = 0, & x \in \Omega \setminus \bar{D}_t, \\ u_2(t, x) = 0, & x \in \partial D_t, \\ \frac{\partial u_2(t, x)}{\partial n} = u_1(t, x) - f(x), & x \in \partial \Omega, \end{cases} \quad (15)$$

则 $\frac{d}{dt}R_1(D_t) < 0$.

证明 令 $u'(t, x)$ 为 $u_1(t, x)$ 的 Euler 导数, 注意到在边界 $\partial \Omega$ 上 $u_2(t, x)$ 的外法向导数为 $u_1(t, x) - f$, 因此

$$\frac{d}{dt}R_1(D_t) = \int_{\partial \Omega} (u_1(t, x) - f(x))u'(t, x) = \int_{\partial \Omega} \frac{\partial u_2}{\partial n} u' ds. \quad (16)$$

另一方面根据 Green 公式

$$\int_{\Omega \setminus D_t} \Delta u' u_2 - \Delta u'_2 u' dx = \left(\int_{\partial \Omega} \frac{\partial u'}{\partial n} u_2 - \frac{\partial u_2}{\partial n} u' ds \right) - \left(\int_{\partial D_t} \frac{\partial u'}{\partial n} u_2 - \frac{\partial u_2}{\partial n} u' ds \right).$$

并且注意到 u_2 与 u' 分别满足 (15) 与 (12) 式, 则

$$\frac{d}{dt}R_1(D_t) = \int_{\partial D_t} \frac{\partial u_2}{\partial n} u' ds.$$

如果利用引理 2.1, 上式可以简化为

$$\frac{d}{dt}R_1(D_t) = - \int_{\partial D_t} \frac{\partial u_2}{\partial n} (\nabla u_1 \cdot \mathbf{V}) ds.$$

因此, 如果令速度 $\mathbf{V}(t, x) = v_0(t, x)\mathbf{n}(t, x)$, 而且 $v_0(t, x)$ 如 (13) 式所定义, 则

$$\frac{d}{dt}R_1(D_t) = - \int_{\partial D_t} \left(\frac{\partial u_2}{\partial n} \frac{\partial u_1}{\partial n} \right)^2 ds < 0.$$

定理得证.

注 2.3 1. 注意到 $u_1|_{\partial D_t} = u_2|_{\partial D_t} = 0$, 即 u_1 与 u_2 的切向导数为 0, $v_0(t, x)$ 可以重新写成

$$v_0(t, x) = \nabla u_1(t, x) \cdot \nabla u_2(t, x).$$

2. 根据上述的证明, 知道速度 $\mathbf{V}(t, x)$ 并不唯一, 一般来讲, 可以选择

$$\mathbf{V}(t, x) = \omega(t, x)v_0(t, x)\mathbf{n}(t, x),$$

其中权函数 $\omega(t, x) > 0$.

对于问题 (9) 和 (10) 的速度 (下降方向) 选取, 我们有下面的推论:

推论 2.4 $v(t, x)$ 如 (13) 式所定义, $\mathbf{n}(t, x)$ 为 D_t 的外法向方向, 如果令 $\mathbf{V}(t, x) = v(t, x)\mathbf{n}(t, x)$, 其中

$$v(t, x) = v_0(t, x) - \alpha\kappa(t, x), \quad (17)$$

κ 为 ∂D_t 的平均曲率, 那么

$$\frac{d}{dt}R(D_t) < 0. \quad (18)$$

证明 正则项 $\int_{\partial D_t} 1 ds$ 非常常见, 通常用于图像处理^[28] 和形状优化问题^[29]. 它的 Euler 导数满足^[2]

$$\frac{d}{dt} \int_{\partial D_t} 1 ds = \int_{\partial D_t} \kappa(\mathbf{V} \cdot \mathbf{n}) ds,$$

则重复定理 2.1 的证明得到

$$\frac{d}{dt}R(t, x) = - \int_{\partial D_t} (v_0(t, x) - \alpha\kappa)(\mathbf{V} \cdot \mathbf{n}(t, x)) ds.$$

显然, 如果 $\mathbf{V}(t, x)$ 如 (17) 式所选取, 则 $\frac{d}{dt}R(t, x) < 0$.

因此, 若区域 D_t 的边界 ∂D_t 速度如推论 2.4 所选取, 则可以保证 $\frac{d}{dt}R(D_t) < 0$, 即 $\mathbf{V}(t, x)$ 为 $R(D_t)$ 的一个“下降方向”. 另外注意到 $\mathbf{V}(t, x) = v(t, x)\mathbf{n}(t, x)$ 是沿外法向方向 $\mathbf{n}(t, x)$, 所以相应的水平集函数 $\phi(t, x)$ 满足

$$\frac{\partial \phi(t, x)}{\partial t} + v(t, x) |\nabla \phi(t, x)| = 0.$$

2.3 重构算法

基于前面的分析, 我们给出重构 ∂D 的算法. 算法的输入参数是边界上的测量值 f 和 g , 输出参数是问题 (2) 的解 ∂D 的逼近 ∂D_k . 事实上, 我们的重构算法就是速度 $\mathbf{V}(t, x)$ 为推论 2.4 中所定义的标准水平集方法.

重构算法 1. (初始化) 设定初始时刻的水平集函数 ϕ^0 , 令

$$\partial D_0 = \{(t, x) \mid \phi_0(t, x) = 0\}, \quad D_0 = \{(t, x) \mid \phi_0(t, x) < 0\}.$$

2. (u_1^k 与 u_2^k 的计算) 对于 $k = 0, 1, 2, \dots$, 求解边值问题

$$\begin{cases} \Delta u_1^k = 0, & \text{在 } \Omega \setminus \bar{D}_k \text{ 内,} \\ u_1^k = 0, & \text{在 } \partial D_k \text{ 上,} \\ \frac{\partial u_1^k}{\partial n} = g, & \text{在 } \partial \Omega \text{ 上,} \end{cases} \quad \text{与} \quad \begin{cases} \Delta u_2^k = 0, & \text{在 } \Omega \setminus \bar{D}_k \text{ 上,} \\ u_2^k = 0, & \text{在 } \partial D_k \text{ 上,} \\ \frac{\partial u_2^k}{\partial n} = u_1^k - f, & \text{在 } \partial \Omega \text{ 上.} \end{cases} \quad (19)$$

如果 $\|u_1^k - f\|_{L^2(\partial\Omega)} < \epsilon$, 其中 ϵ 是给定的误差精度, 则停止迭代, 否则转至下一步.

3. (速度的选取) 假定水平集方程在网格 G 上离散, 则如果网格点在 $\Omega \setminus \bar{D}_k$ 内, 我们令 $v^k = \nabla u_1^k \cdot \nabla u_2^k - \alpha \kappa^k$, 在区域 D_k 内, 对于每一行网格采用线性插值得到速度 v^k .

4. (水平集函数的更新) 求解水平集方程

$$\frac{\partial \phi^k}{\partial t} + v^k |\nabla \phi^k| = 0.$$

时间方向采用 Euler 格式离散, 即

$$\frac{\phi^{k+1} - \phi^k}{\Delta t} + v^k |\nabla \phi^k| = 0,$$

对于空间离散采用 ENO 或者 WENO 格式, 其中时间步长 Δt 与空间步长 Δx 的选取应该满足差分格式的稳定性条件.

5. (ϕ^{k+1} 的重新初始化) 如果需要, 对 ϕ^{k+1} 进行周期性重新初始化 (reinitialization).

6. (D_{k+1} 的更新) 求 ϕ^{k+1} 的零水平集 ∂D_{k+1} , 即

$$\partial D_{k+1} = \{(t, x) \mid \phi^{k+1}(t, x) = 0\},$$

并令 $D_{k+1} = \{(t, x) \mid \phi^{k+1}(t, x) < 0\}$, 转到第 2 步.

在每一步迭代过程中, 我们通过在第 2 步求解正问题 (19), 并在第 3 步选取 v^k 来确定边界 ∂D_k 沿外法向方向的速度, 这是因为 v^k 为 $\|u_1^k - f\|_{L^2(\partial\Omega)}$, 即 $\|F(D_k) - f\|_{L^2(\partial\Omega)}$ 的一个“下降方向”, 其中 F 如 (4) 式所定义. 另一方面, 我们引入水平集函数 ϕ^k , 通过求解 Hamilton-Jacobi 方程 $\frac{\partial \phi^k}{\partial t} + v^k |\nabla \phi^k| = 0$ 来模拟 D_k 边界 ∂D_k 的运动. 此外, 迭代停止的准则是判断 u_1^k 与测量值 f 之间的差的 L^2 范数是否小于给定精度 ϵ . 值得一提的是, 在数值求解 Hamilton-Jacobi 方程后 (第 3 步), 如果需要, 我们对 ϕ^{k+1} 进行周期性重新初始化, 目的在于让 ϕ^{k+1} 尽量接近一个有符号的距离函数 (signed distance function). 这是因为, 我们最为关心的是 $\phi^{k+1} = 0$ 的点的集合 ∂D_{k+1} , ϕ^{k+1} 本身的值并不那么重要, 而转化成一个有符号的距离函数可以保证 ∂D_{k+1} 能够更为准确地求出. 关于重新初始化的具体步骤可以参考文献 [23] 的第 7 章.

3 关于 EIT 问题和正则化方法的一些理论结果

本节给出关于反问题 (2) 和正则化方法的一些理论结果. 由于篇幅限制, 我们略去详细的证明过程, 而只给出一些结果和相关的参考文献.

首先讨论 EIT 问题的唯一性和稳定性.

假设 $\bar{D}_j \subset \Omega$, $j = 1, 2$. 可以用参数形式写出 ∂D 的方程

$$\begin{cases} x = \varphi_j(t), \\ y = \psi_j(t), \end{cases}$$

这里参数 $t \in [0, T]$.

考虑 EIT 问题

$$\begin{cases} \Delta u_j = 0, & \text{在 } \Omega \setminus \bar{D}_j \text{ 内}, \\ u_j = 0, & \text{在 } \partial D_j \text{ 上}, \\ \frac{\partial u_j}{\partial n} = g, & u_j = f_j, \text{ 在 } \partial \Omega \text{ 上}. \end{cases} \quad j = 1, 2. \quad (20)$$

定理 3.1 对于 EIT 问题 (20), 若在 $\partial \Omega$ 上 $f_1 = f_2$, 且 $g \neq 0$, 则有

$$D_1 = D_2.$$

这里用到关于 Laplace 方程的界唯一延拓性 (unique continuation). 具体可以参考文献 [30–32].

由于在一维情形下, Sobolev 空间 $W^{1,1}$ 到连续函数空间的嵌入是紧的, 按照文献 [32] 的方法, 可以进一步证明下面的条件稳定性结果:

定理 3.2 对于 EIT 问题 (20), 假设 $\|g\|_{L^\infty} > c_0 > 0$, 且 $\|\varphi_j\|_{W^{1,1}} \leq M$, $\|\psi_j\|_{W^{1,1}} \leq M$, 这里 c_0 和 M 都是给定的常数, 则存在仅依赖于 Ω , M , c_0 的常数 $C > 0$ 和 $0 < \gamma < 1$, 使得

$$\text{dist}(D_1, D_2) \leq C \left(\frac{1}{|\log |\log \|f_1 - f_2\|_{L^2}|} \right)^\gamma. \quad (21)$$

注 3.3 从定理 3.2 的结论也可以看出, 我们讨论的 EIT 问题是一个严重不适定的问题.

对于上一节提出的正则化泛函 $R(D)$, 有下面的结果:

定理 3.4 对于正则化泛函 $R(D)$, 存在 $D_*: \varphi_*(t), \psi_*(t) \in W^{1,1}(0, T)$, 使得

$$R(D_*) = \min_{D \in W^{1,1}} R(D),$$

这里 $D \in W^{1,1}$ 代表其参数表示函数 $\varphi(t), \psi(t) \in W^{1,1}(0, T)$.

这个定理可以用文献 [33, 34] 中的方法证明. 主要要用到在一维情形下, Sobolev 空间 $W^{1,1}$ 到连续函数空间的嵌入是紧的结果. 这里由于篇幅限制, 就不写出详细的证明了.

最后, 我们要指出的是: 根据文献 [35] 的结论, 由定理 3.2 的条件稳定性结果可以给出正则化解的收敛阶.

定理 3.5 假设 EIT 问题 (2) 的精确解为 $D: \varphi(t), \psi(t)$, 且数据 f 含有误差, 即知道 f^δ , 其中 f^δ 满足 $\|f - f^\delta\|_{L^2} \leq \delta$. 若 $D_*: \varphi_*(t), \psi_*(t)$ 是下列泛函的极小元:

$$R(D) := \frac{1}{2} \|F(D) - f^\delta\|_{L^2(\partial\Omega)}^2 + \alpha \int_{\partial D} 1 \, ds,$$

取 $\alpha = \delta^2$, 则有

$$\|\varphi - \varphi_*\|, \|\psi - \psi_*\| \leq C_1 \left(\frac{1}{\log |\log \delta|} \right)^\gamma, \quad (22)$$

这里 $C_1 > 0$ 和 $0 < \gamma < 1$ 是常数.

这个定理就是利用定理 3.2 的结果和文献 [35] 中的方法所得到的结果.

4 数值例子

对于上一节的重构算法, 我们希望通过数值例子来说明它的优点和不足. 下面的例子将分别考虑区域 D 为单连通、多连通的情形, 以及测量数据带误差和不带误差的情形. 在所有

例子中, 都假设区域 $\Omega = (0, 1) \times (0, 1)$, 在边界上的激励电流 $g = 1$. 一般来说, 边界上的电压值 f 不可能精确得到, 我们通过用二阶有限元方法求解正问题而得到, 这里有限元网格要求最大步长不超过 0.02, 对于不同的区域 D 其求解的单元数和自由度个数也有所不同. 以算例 4.2 中的情形为例, 给出了相应的的网格和正问题的计算结果图 (见图 3). 在所有的例子中, 误差精度 $\epsilon = 10^{-6}$. 而时间步长 Δt 和空间步长的选取要使得水平集方程的计算满足 CFL 稳定性条件, 这里要求

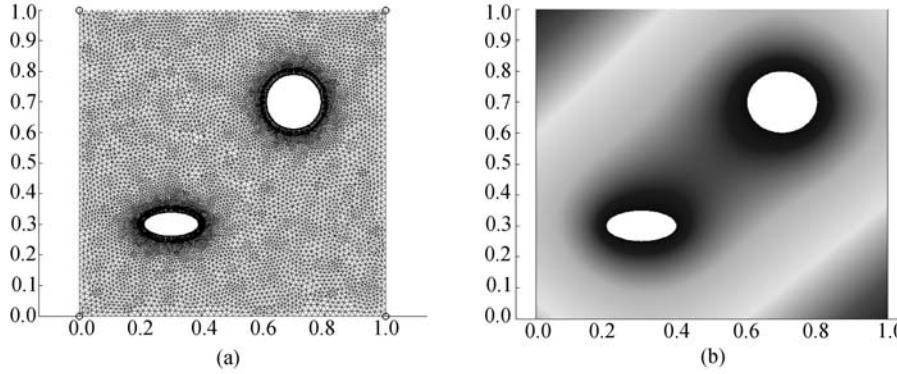


图 3

(a) 算例 4.2 中的有限元网格; (b) 算例 4.2 中正问题的解, 这里 $g = 1$.

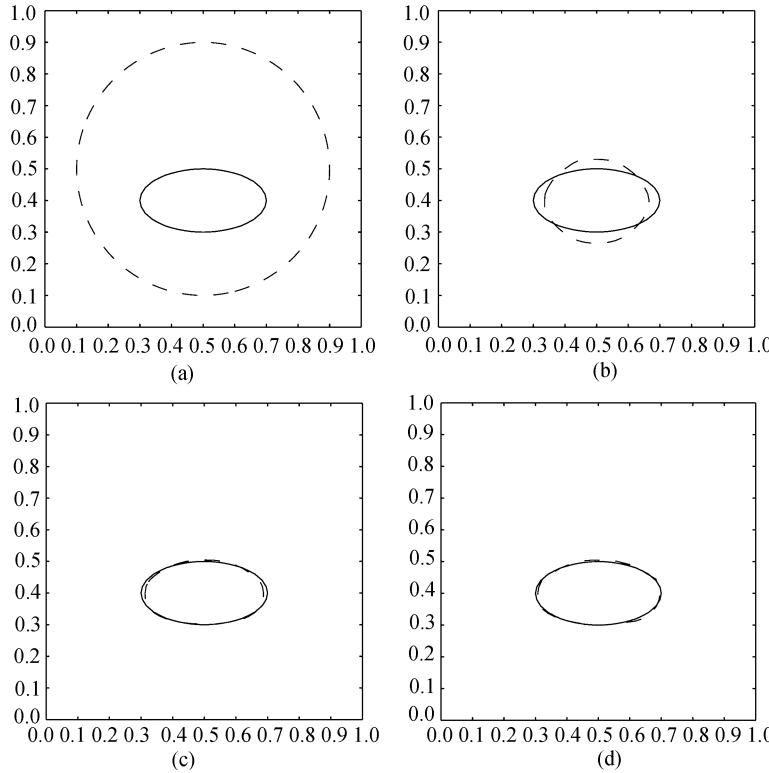


图 4

(a) 初始猜测 D_0 ; (b) $k = 50$ 的重构边界形状; (c) $k = 100$; (d) $k = 200$.

$$\sup_x |v^k(x)| \Delta t = \alpha \Delta x,$$

参数 α 在程序中选取为 $[0.75, 0.90]$ 之间, 来调节水平集移动的速度.

例 4.1 (D 为一个单连通区域) 在图 4 中, 真实区域 D 的边界是中心在 $(0.4, 0.5)$ 、长短半轴分别为 0.2 与 0.1 的椭圆, 如图 4 中实线所示, 虚线所示为数值解 (下同). 假设初始猜测 D_0 为以 $(0.5, 0.5)$ 为圆心、半径是 0.4 的圆. 可以看到当 $k = 100$ 时, 数值解 D_k 和真实解 D 已经十分接近, 而当 $k = 200$ 时, 两者的边界基本吻合. 因此, 基于水平集方法的重构算法在处理 D 为单连通区域时精度高、速度快.

例 4.2 (D 由多个单连通的区域组成) 在图 5 中, 真实区域 D 由两部分 D^1 和 D^2 组成, 其中 D^1 为圆, 其半径为 0.1, D^2 是长、短轴分别为 0.1 与 0.05 的椭圆. 初始猜测 D_0 与例 4.1 相同, 我们发现当 $k = 200$ 时, D_k 的拓扑与 D_0 相比已经发生了非常大的变化. $k = 500$ 时, 图 5 (b) 中集中在中间的小区域已经消失, 而且数值解逼近真实解. 之后, 速度 V_k 的速度非常小, 所以收敛较慢, $k = 1000$ 时, 数值解基本上能勾勒出 D 的形状.

例 4.3 (D 由多个单连通的区域组成) 在图 6 中, 真实区域 D 由 3 个部分 D^1 , D^2 和 D^3 组成, 与例 4.2 不同的是它们的距离较近. 我们注意到当 $k = 100$ 时, ∂D_k 在 D 的外周形成一个包络, 而且 $k = 200, 500$ 时, 这个包络并没有发生太大的变化, 只是在形状上与 D 的

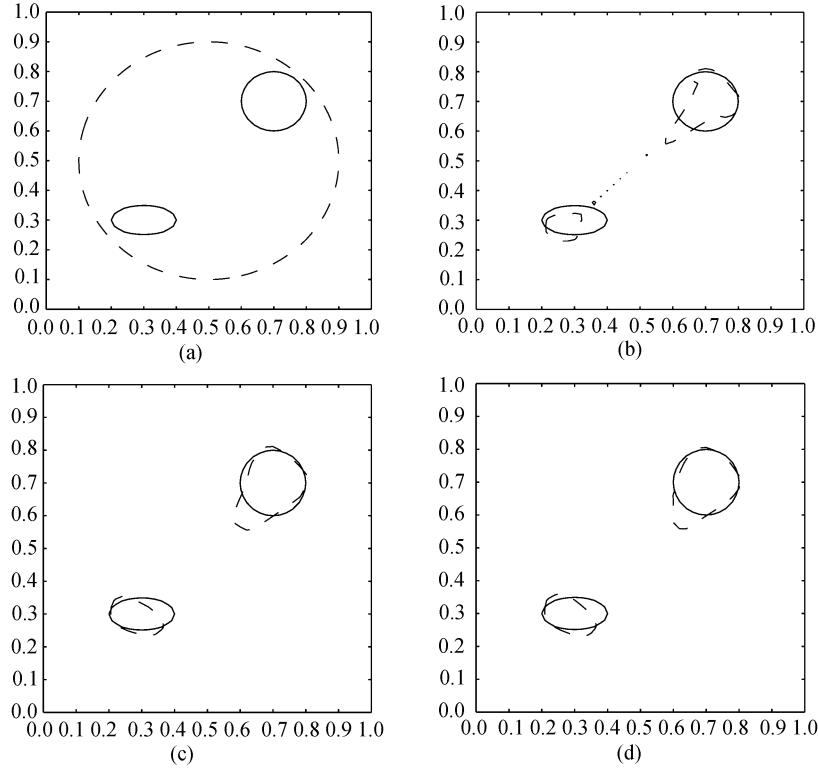


图 5

(a) 初始猜测 D_0 ; (b) $k = 100$ 的重构边界形状; (c) $k = 200$; (d) $k = 500$.

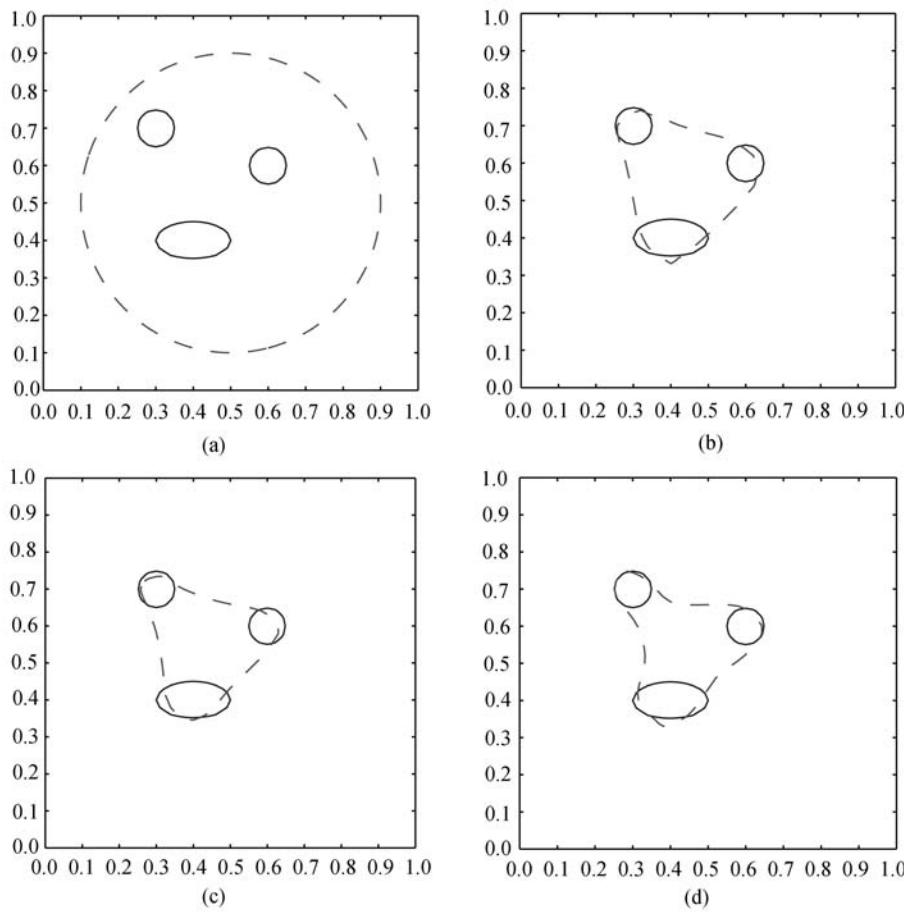


图 6

(a) 初始猜测 D_0 ; (b) $k = 100$ 的重构边界形状; (c) $k = 200$; (d) $k = 500$.

3 个小区域的分布有些类似。我们在数值实验中发现，即使当 $k = 2000$ 时，所求的数值解 ∂D_k 仍为一个包络，而且，即使在边界上有多组激励电流、或者改变电流值 f 的取值，仍无法准确重构出真实解。我们推测，出现这种情形的原因是所求的解只是优化问题 (10) 的一个局部极小值点，而不是整体最小值点，而这是求解优化问题一个本质性的困难，这就说明重构算法在处理距离较近的不连通区域时分辨率还不够。

例 4.4 (初始猜测的重新选取) 在上述例子中，水平集函数形成的边界包围了 3 个未知区域，进一步的迭代不能改善精度。为了解决这个问题，我们重新选取初始值，以避开优化问题的局部极小点。在图 7(a) 中，取 3 个新区域，落在水平集函数形成的包围中，作为新的初始种子。通过初始区域的重新选取，只需要 100 步迭代过程就可以得到满意的结果，见图 7(b)。

例 4.5 (稳定性) 这个例子考虑测量数据带误差的情形。对于例 4.1 和 4.2，我们把有限元方法求解出来的边界电压 g 分别加上 10% 的均匀误差。在数值计算中，取正则化参数 $\alpha = 10^{-3}$ ，重构的结果如图 8(b) 和图 9(b)，可以看到这种算法是稳定的。另外，我们发现正则化参数无需选取得太大，这也确保在求解水平集方程时步长 Δt 不会太小。

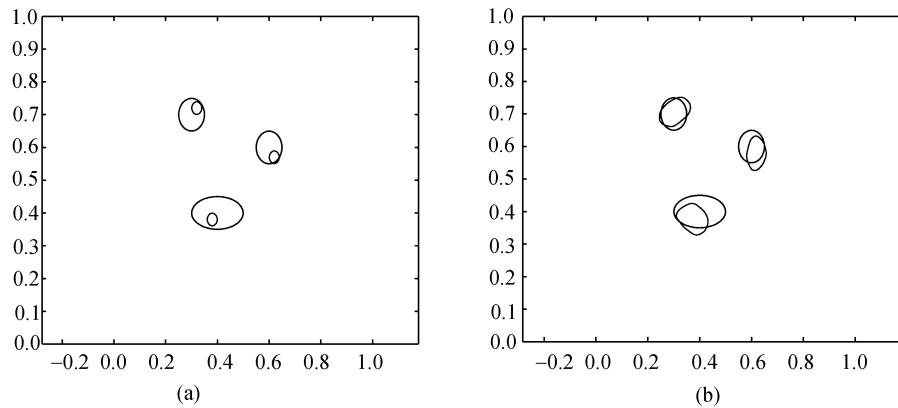


图 7

(a) 初始猜测的重新选取 D_0 ; (b) $k = 100$ 的重构边界形状.

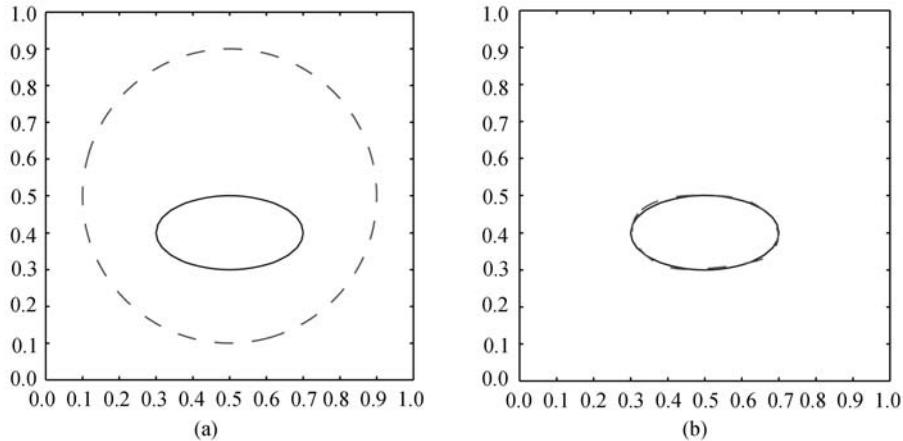


图 8

(a) 初始猜测 D_0 ; (b) $k = 200$ 的重构边界形状.

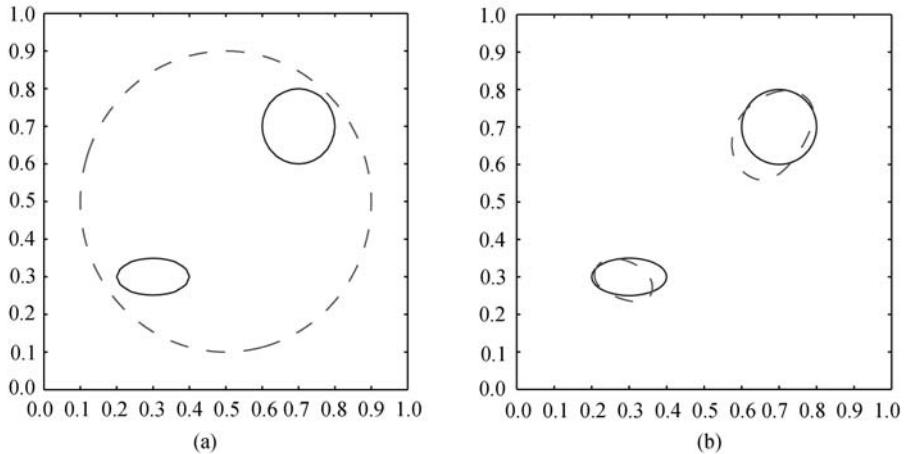


图 9

(a) 初始猜测 D_0 ; (b) $k = 2000$ 的重构边界形状.

5 总结

在本文中, 我们提出了一种基于水平集方法的重构算法来重构电导率的间断界面. 算法的关键在于给 ∂D_t 寻找一个合适的速度函数来逼近 ∂D . 我们证明了如果速度 $\mathbf{V}(t, x)$ 如上所选取, 则泛函 $R(D_t)$ 随时间 t 单调下降. 数值算例表明, 当 D 为一个单连通区域、或者由距离较远的多个单连通区域组成的时候, 计算结果非常准确, 而且数值稳定性高. 对于 D 由多个相隔较近的单连通区域组成时, 种子区域的选取是非常重要的, 我们提出重新选取初始种子区域的策略, 来加速计算的过程. 比较传统的 EIT 重构方法, 我们认为用水平集方法来识别电导率间断界面是一种有希望的算法.

致谢 非常感谢审稿人对我们文章修改所提的宝贵意见.

参考文献

- 1 Gilbarg D, Trudinger N S. Elliptic partial differential equations of second order. New York: Springer-Verlag, 1983
- 2 Adams R A. Sobolev spaces. In: Pure and Applied Mathematics Vol 65. New York-London: Academic Press, 1975
- 3 Cheney M, Isaacson D, Newell J C. Electrical Impedance Tomography. *SIAM Rev*, **41**: 85–101 (1999)
- 4 Isaacson D, Cheney M. Current problems in impedance imaging. In: Colton D, Ewing R, Rundell W eds. Inverse Problems in Partial Differential Equations. Philadelphia: SIAM, 1990, 141–149
- 5 Parker R L. The inverse problem of resistivity sounding. *Geophysics*, **142**: 2143–2158 (1984)
- 6 Ramirez A, Daily W, Binley B, et al. Detection of leaks in underground storage tanks using electrical resistance methods. *J Environ Eng Geophys*, **1**: 189–203 (1996)
- 7 Ramirez A, Daily W, LaBreque D, et al. Monitoring an underground steam injection process using electrical resistance tomography. *Water Resources Res*, **29**: 73–87 (1993)
- 8 Calerón A P. On an inverse boundary problem. Seminar on Numerical Analysis and its applications to Continuum Physics (Soc. Brasileira de Matemática, Rio de Janeiro), 1980, 65–73
- 9 Woo H, Kim S, Seo J K, et al. A direct tracking method for a grounded conductor inside a pipeline from capacitance measurements. *Inverse Problems*, **22**: 481–494 (2006)
- 10 Brühl M, Hank M. Numerical implementation of two noniterative methods for locating inclusions by impedance tomography. *Inverse Problems*, **16**: 1029–1042 (2000)
- 11 Brühl M, Hank M. Recent progress in electrical impedance tomography. *Inverse Problems*, **19**: 65–90 (2003)
- 12 Brühl M, Hank M, Pidcock M. Crack detection using electrostatic measurements. *Math Model Numer Anal*, **35**: 595–605 (2001)
- 13 Muller J L, Siltanen S. Direct reconstruction of conductivities from boundary measurements. *SIAM J Sci Comput*, **24**: 1232–1266 (2003)
- 14 Siltanen S, Mueller J, Isaacson D. An implementation of the reconstruction algorithm of A Nachman for 2D inverse conductivity problem. *Inverse Problems*, **16**: 681–699 (2000)
- 15 Dobson D C. Convergence of a reconstruction method for the inverse conductivity problem. *SIAM J Appl Math*, **8**: 71–81 (1992)
- 16 Kohn R V, Vogelius M. Relaxation of a variational method for impedance computed tomography. *Commun Pure Appl Math*, **XL**: 745–777 (1987)

- 17 Kohn R V, Vogelius M. Determining conductivity by boundary measurements. *Commun Pure Appl Math*, **37**: 113–123 (1984)
- 18 Liu J J, Cheng J, Nakamura G. Reconstruction and uniqueness of an inverse scattering problem with impedance boundary. *Sci China Ser A-Math*, **45**(11): 1408–1419 (2002)
- 19 童重亮, 程晋, 山本昌宏. 由 Dirichlet 到 Neumann 映射重构平面上椭圆型方程对流系数的一种方法. 中国科学 A 辑: 数学, **34**: 752–766 (2004)
- 20 冯立新, 马富明. 洞穴逆散射问题解的惟一性与局部稳定性. 中国科学 A 辑: 数学, **35**: 641–650 (2005)
- 21 董和平, 马富明. 半平面中使用近场数据的物体形状重构. 中国科学 A 辑: 数学, **38**: 297–306 (2008)
- 22 Osher S, Sethian JA. Fronts propagating with curvature-dependent speed: algorithms based on Hamilton-Jacobi formulations. *J Comput Phys*, **79**: 12–49 (1988)
- 23 Osher S, Fedkiw R. Level set methods and Dynamic Implicit surfaces. In: Applied Mathematical Sciences, Vol 153. New York: Springer, 2003
- 24 Santosa F. A level set approach for inverse problems involving obstacles. *ESAIM, Control Optim Calculus Variations*, **1**: 17–33 (1996)
- 25 Dorn O, Lesselier D. Lever set method for inverse scattering. *Inverse Problems*, **22**: 67–131 (2006)
- 26 Chan T F, Tai X C. Level set and total variation regularization for elliptic inverse problems with discontinuous coefficients. *J Comput Phys*, **193**: 40–66 (2003)
- 27 Chan T F, Tai X C. Identification of discontinuous coefficients in elliptic problems using total variation regularisation. *SIAM J Sci Comput*, **25**: 881–904 (2003)
- 28 Mumford D, Shah J. Optimal approximation by piecewise smooth functions and associated variational problems. *Commun Pure Appl Math*, **42**: 577–685 (1989)
- 29 Sokolowski J, Zolésio J P. Introduction to Shape Optimization: Shape Sensitivity Analysis, Springer Series in Computational Mathematics, Vol 16. Berlin: Springer, 1992
- 30 Bukhgeim A L, Cheng J, Yamamoto M. Stability for an inverse boundary problem of determining a part of a boundary. *Inverse Problems*, **15**(4): 1021–1032 (1999)
- 31 Bukhgeim A L, Cheng J, Yamamoto M. Conditional stability in an inverse problem of determining a non-smooth boundary. *J Math Anal Appl*, **242**(1): 57–74 (2000)
- 32 Cheng J, Hon Y C, Yamamoto M. Conditional stability estimation for an inverse boundary problem with non-smooth boundary in \mathbf{R}^3 . *Trans Amer Math Soc*, **353**(10): 4123–4138 (2001)
- 33 Chen Z M, Zou J. An augmented Lagrangian method for identifying discontinuous parameters in elliptic systems. *SIAM J Control Optim*, **37**(3): 892–910 (1999)
- 34 Ito K, Kunisch K. The augmented Lagrangian method for parameter estimation in elliptic systems. *SIAM J Control Optim*, **28**(1): 113–136 (1990)
- 35 Cheng J, Yamamoto M. One new strategy for a priori choice of regularizing parameters in Tikhonov's regularization. *Inverse Problems*, **16**(4): L31–L38 (2000)