

高维可积模型探索*

楼森岳

(宁波大学师范学院物理系, 宁波 315211)

摘要 从 3 个不同方面对可能存在的高维可积模型作了研究. (1) 从 $(1+1)$ 维可积模型的强对称算子出发, 可以构造一类 $(n+1)$ 维的可积模型: 高维破裂孤子方程; (2) 对于广义 Virasoro 代数的每一个具体实现, 可以得到大量的在具有广义 Virasoro 对称代数意义下的高维可积模型; (3) 从具有共形不变性的 Schwartz 型的方程出发, 可以得到许多具有 Painlevé 性质意义下的可积模型.

关键词 高维可积模型 破裂孤子方程 Virasoro 代数 共形不变性

由于在物理、数学、化学、生物、等许多自然科学领域的广泛应用, 孤子理论和实验得到了深入的研究^[1-4]. 可是人们目前的研究主要集中于 $(1+1)$ 维和 $(2+1)$ 维的低维情况. 由于实际的物理空间是 $(3+1)$ 维甚至是更高维的, 人们希望对高维孤子理论亦能作出深入的研究. 可惜的是, 目前理论界对高维 (大于 $(2+1)$ 维) 情况下的孤子性质知之甚少. 甚至人们还未找到一个除了 “ $2+2$ ” 维的自对偶杨-Mills 场^[1,5] 和一些条件可积模型^[6] 之外的大于 $(2+1)$ 维的真正的完全可积模型 (为了区别于传统的完全可积体系, 我们把方程数多于应变变量数的超定可积体系称之为条件可积体系). 本文试图对如何寻求高维可积体系作出一些尝试.

对于 $(1+1)$ 维的可积体系, 强对称算子 (或称递推算子) 的存在起着非常关键的作用. 从强对称算子出发, 人们可以同时得到体系的无穷多对称和守恒律^[7], 双 Hamilton 结构及 Lax 对等等其他可积性质. 利用 $(1+1)$ 维的强对称算子, 人们已经非常方便地得到了一类 $(2+1)$ 维的可积模型: 破裂孤子方程^[8]. 本文第 1 节将指出, 从任何一个 $(1+1)$ 维的强对称算子出发, 人们可以得到一类特殊的高维可积模型. 所有这些不同维数下的可积模型具有一个与 $(1+1)$ 维模型共同的强对称算子. 但是这些高维体系具有更为丰富的对称结构.

在 $(2+1)$ 维可积体系的对称性研究过程中我们发现对于某些 $(2+1)$ -维体系如 Kadomtsev-Petviashvili (KP) 和 Toda 方程^[9], 它们的对称构成一个广义 W_∞ 代数. 而对另一些 $(2+1)$ -维可积模型如 Davey-Stewartson (DS) 方程和 Sawada-Kortera (SK) 方程, 它们的对称代数是一个 Lie-Kac-Moody-Virasoro 代数^[10]. 然而, 所有已知的 $(2+1)$ 维可积模型都具有一个无限维的广义 Virasoro 对称代数 (它既是广义 W_∞ 代数的子代数, 也是 Lie-Kac-Moody-Virasoro 代数的子代数). 而已知的不可积模型不具有这个对称代数. 根据这一事实, 我们可提出具有广义 Virasoro 对称代数意义下的可积性概念. 然后, 利用这个广义 Virasoro 对称代数的不同实

1996-12-28 收稿, 1997-07-03 收修稿

* 国家自然科学基金和浙江省自然科学基金资助项目

现,我们可以得到无穷多的在此意义下的高维可积模型. 本文第 2 节我们将根据一个特殊的实现给出一个在具有广义 Virasoro 对称代数意义下的高维可积模型.

对于任意可积模型,存在无穷多的对称(和守恒律). 然而,在物理上或几何上仅有有限个具有明确的意义. 最近,我们发现 KdV (Korteweg-de Vries) 方程的无穷多对称相应于其 Schwartz 形式的无穷维解空间的共形不变性(Möbius 变换不变性). 也就是说, Schwartz KdV 方程的共形不变性对应于 KdV 方程的无穷多对称. 对于 KP 方程,我们也可以从 Schwartz KP 方程的共形不变性导出一类无穷多对称. 因此,我们认为寻找高维可积模型的最佳途径应该从具有共形不变性的 Schwartz 形式的方程出发. 另外,证明一个模型的可积性的一个很好的方法是检验一个模型的 Painlevé 性质. 本文第 3 节中,我们利用 Painlevé 分析方法证明一个高维的具有共形不变性的 KdV 型方程是在可变成具有 Painlevé 性质形式意义下的可积模型.

1 高维破裂孤子方程

人们已经知道,对于一个(1+1)维的可积体系

$$u_t = K(u), \quad (u = (u_1, u_2, \dots, u_n)^T, \quad u_i = u_i(x, t), \quad i = 1, 2, \dots, n), \quad (1)$$

存在一个遗传强对称算子^[4]. 将该算子作用于一个已知的种子对称后,我们就可以得到一族无穷多对称. 如,若系统(1)具有强对称算子 $\Phi(u)$ 且是 x 平移不变的,则 $K_0 \equiv u_x$ 是相应于 x 平移不变性的一个种子对称及 $K_n(u) \equiv \Phi^n u_x$, $n = 0, 1, 2, \dots$, 都是(1)式的对称. 与这些对称相应的流方程

$$u_t = K_n(u), \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (2)$$

构成一个所谓的可积族(梯队). Calogero 和 Degasperis 和 Bogoyavlenskii^[8]以一种特殊方式将(1+1)方程推广到了(2+1)维的情况:破裂孤子方程. 实际上,该类方程可以以下述方式简单地得到,首先将(1)式(从而 Φ)中的场量 u_i 看成不仅仅是 (x, t) 的函数,而且也是 y 的函数. 则(1)式及 $\Phi(u)$ 显然是 y 平移不变的. 从而 u_y 是(1)式的一个对称. 以 u_y 为种子对称,我们可得到(1)式的又一族无穷多对称 $\Phi^n u_y$. 相应的流方程就构成一(2+1)维的破裂孤子方程族:

$$u_t = \Phi^n u_y, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (3)$$

文献[8]中研究的破裂孤子方程正是(3)式中的 $n = 1$ 及 Φ 为 KdV 或 AKNS (Ablowitz-Kaup-Newell-Segur) 的强对称算子的情况.

上述步骤很容易推广到更高维的情况. 首先我们将(1)式中的场量 u 看成不仅仅是 $(x_1 \equiv x, t)$ 的函数,而且也是 $(x_2, x_3, \dots, x_n)$ 的函数,则(1)式(及 Φ)显然是 $(x_i, i = 1, 2, \dots, n)$ 平移不变的. $u_{x_i} (i = 1, 2, \dots, n)$ 都可作为种子对称. 从而可以得到与一般的对称, σ_M 相应的高维破裂孤子方程族

$$u_t = \sigma_M \equiv \sum_{i=1}^n \Phi^{m_i} u_{x_i}, \quad M = (m_1, \dots, m_n), \quad m_i = 0, 1, 2, \dots, \quad (4)$$

在 $m_i (i = 1, 2, \dots, n)$ 全相等的情况下,在重新定义自变量后,(4)式可退化为(2+1)维的情况. 但 m_i 不全相等时,(4)式不可能经过变量替换而变成低维的.

为了更具体起见, 我们给出一个(3+1)维的 AKNS 破裂孤子方程:

$$u_t = i\Phi u_y + \Phi^2 u_z, \quad u \equiv (q, r)^T, \quad (5)$$

其中 $\Phi = \begin{bmatrix} -\partial_x + 2q\partial_x^{-1}r & 2q\partial_x^{-1}q \\ -2r\partial_x^{-1}r & \partial_x - 2r\partial_x^{-1}q \end{bmatrix}$. (5)式的分量形式为

$$q_t = iq_{xy} - 2iq\partial_x^{-1}(qr)_y + q_{xx} - 2q_x\partial_x^{-1}(qr)_z - 2q(rq)_z + 2q\partial_x^{-1}(rq_{xx} - qr_{xz}), \quad (6)$$

$$r_t = -ir_{xy} + 2ir\partial_x^{-1}(qr)_y + r_{xx} - 2r_x\partial_x^{-1}(qr)_z - 2r(rq)_z + 2r\partial_x^{-1}(rq_{xx} - qr_{xz}), \quad (7)$$

(5)式是熟知的(1+1)和(2+1)维非线性 Schrödinger, KdV, mKdV 方程的推广. (5)式(即方程组(6),(7))的许多可积性质很容易被得到. 如, (5)式有强对称算子 Φ 及无穷多对称. 此处我们仅给出(5)式丰富的形式级数对称及其相应的代数结构而略去所有的证明.

利用文献[9]中发展的形式级数对称方法, 人们不难证明

$$\tau_m^x(f, g, h, w) = \sum_{k_1, k_2, k_3, k_4=0}^{\infty} f^{(k_1)} g^{(k_2)} h^{(k_3)} w^{(k_4)} \frac{i^{k_1+k_4-k_2} t^{k_1+k_3} z^{k_2} y^{k_4}}{k_1! k_2! k_3! k_4!} K_{m+k_1+k_4+2k_3-k_2}^x, \quad (8)$$

$$\tau_n(f, g, h, w) = \sum_{k_1, k_2, k_3, k_4=0}^{\infty} f^{(k_1)} g^{(k_2)} h^{(k_3)} w^{(k_4)} \frac{i^{k_1+k_4-k_2} t^{k_1+k_3} z^{k_2} y^{k_4}}{k_1! k_2! k_3! k_4!} \tau_{n+k_1+k_4+2k_3-k_2}, \quad (9)$$

都是(3+1)维 AKNS 方程的对称. 其中 $x_i = (x_1, x_2, x_3) \equiv (x, y, z)$, (f, g) 是 y 的任意函数, (h, w) 是 z 的任意函数, $f^{(k)} \equiv \frac{d^k f}{dy^k}$ 及 K_n^x , τ_n 被定义为

$$K_n^x = \Phi^n u_x, \quad \tau_n = \Phi^n (zu_z + yu_y + tu_t), \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots). \quad (10)$$

一般说来, 对于任意的 (f, g, h, w) , 形式级数对称(8)和(9)式是非截断的. 但当 (f, g, h, w) 都取多项式函数时, (8)和(9)式成为截断的. 如,

$$\sigma_m^x(y^{n_1}, y^{n_2}, z^{n_3}, z^{n_4}) = \sum_{k_1=0}^{n_1} \sum_{k_2=0}^{n_2} \sum_{k_3=0}^{n_3} \sum_{k_4=0}^{n_4} \prod_{j=1}^4 \frac{n_j!}{k_j! (n_j - k_j)!} \times \\ i^{k_1+k_4-k_2} t^{k_1+k_3} z^{k_2+n_3-k_3+n_4-k_4} y^{k_4+n_1-k_1+n_2-k_2} K_{m+k_1+k_4+2k_3-k_2}^x. \quad (11)$$

在(2+1)维的情况, 我们已经知道截断对称或非截断对称构成一个广义的 W_∞ 或广义 Virasoro 代数^[9,10]. 通过一些复杂的直接计算, 我们可以证明(8)和(9)给出的非截断对称构成下述的一般对称代数:

$$[\sigma_m^x(f_1, g_1, h_1, w_1), \sigma_n^x(f_2, g_2, h_2, w_2)] = 0, \quad (12)$$

$$[\sigma_m^y(f_1, g_1, h_1, w_1), \sigma_n^x(f_2, g_2, h_2, w_2)] = \sigma_{m+n}^x(f_1 \dot{f}_2, g_1 g_2, h_1 h_2, w_1 w_2) + \\ \sigma_{m+n}^x(f_1 f_2, g_1 \dot{g}_2, h_1 h_2, w_1 w_2) + i\sigma_{m+n+1}^x(f_1 f_2, g_1 g_2, h_1 h_2, w_1 \dot{w}_2), \quad (13)$$

$$[\sigma_m^x(f_1, g_1, h_1, w_1), \sigma_n^y(f_2, g_2, h_2, w_2)] = \sigma_{m+n}^x(f_1 f_2, g_1 g_2, h_1 \dot{h}_2, w_1 w_2) + \\ \sigma_{m+n}^x(f_1 f_2, g_1 g_2, h_1 h_2, w_1 \dot{w}_2) - i\sigma_{m+n-1}^x(f_1 f_2, g_1 \dot{g}_2, h_1 h_2, w_1 w_2), \quad (14)$$

$$[\sigma_m^y(f_1, g_1, h_1, w_1), \sigma_n^y(f_2, g_2, h_2, w_2)] = \sigma_{m+n}^y(f_1 \dot{f}_2 - \dot{f}_1 f_2, g_1 g_2, h_1 h_2, w_1 w_2) + \\ \sigma_{m+n}^y(f_1 f_2, g_1 \dot{g}_2 - \dot{g}_1 g_2, h_1 h_2, w_1 w_2) + i\sigma_{m+n+1}^y(f_1 f_2, g_1 g_2, h_1 h_2, w_1 \dot{w}_2 - \dot{w}_1 w_2), \quad (15)$$

$$[\sigma_m^y(f_1, g_1, h_1, w_1), \sigma_n^x(f_2, g_2, h_2, w_2)] = \\ \sigma_{m+n}^x(f_1 \dot{f}_2, g_1 g_2, h_1 h_2, w_1 w_2) + \sigma_{m+n}^x(f_1 f_2, g_1 \dot{g}_2, h_1 h_2, w_1 w_2) +$$

$$i\sigma_{m+n+1}^z(f_1f_2, g_1g_2, h_1h_2, w_1\dot{w}_2) - \sigma_{m+n}^y(f_1f_2, g_1g_2, \dot{h}_1h_2, w_1w_2) - \sigma_{m+n}^y(f_1f_2, g_1g_2, h_1h_2, \dot{w}_1w_2) + i\sigma_{m+n-1}^y(f_1f_2, \dot{g}_1g_2, h_1h_2, w_1w_2), \quad (16)$$

$$[\sigma_m^z(f_1, g_1, h_1, w_1), \sigma_n^z(f_2, g_2, h_2, w_2)] = \sigma_{m+n}^z(f_1f_2, g_1g_2, \dot{h}_2h_1 - \dot{h}_1h_2, w_1w_2) + \sigma_{m+n}^z(f_1f_2, g_1g_2, h_1h_2, \dot{w}_2w_1 - \dot{w}_1w_2) - i\sigma_{m+n-1}^z(f_1f_2, \dot{g}_2g_1 - \dot{g}_1g_2, h_1h_2, w_1w_2), \quad (17)$$

$$[\sigma_m^x(f_1, g_1, h_1, w_1), \tau_n(f_2, g_2, h_2, w_2)] = (m+1)\sigma_{m+n}^x(f_1f_2, g_1g_2, h_1h_2, w_1w_2) - \sigma_{m+n}^x(\dot{y}f_1f_2, g_1g_2, h_1h_2, w_1w_2) - \sigma_{m+n}^x(f_1f_2, \dot{y}g_1g_2, h_1h_2, w_1w_2), \quad (18)$$

$$[\sigma_m^y(f_1, g_1, h_1, w_1), \tau_n(f_2, g_2, h_2, w_2)] = (m+1)\sigma_{m+n}^y(f_1f_2, g_1g_2, h_1h_2, w_1w_2) - \sigma_{m+n}^y(\dot{y}f_1f_2, g_1g_2, h_1h_2, w_1w_2) - \sigma_{m+n}^y(f_1f_2, \dot{y}g_1g_2, h_1h_2, w_1w_2) + \tau_{m+n}(f_1\dot{f}_2, g_1g_2, h_1h_2, w_1w_2) + \tau_{m+n}(f_1f_2, g_1\dot{g}_2, h_1h_2, w_1w_2) + i\tau_{m+n+1}(f_1f_2, g_1g_2, h_1h_2, w_1\dot{w}_2), \quad (19)$$

$$[\sigma_m^z(f_1, g_1, h_1, w_1), \tau_n(f_2, g_2, h_2, w_2)] = m\sigma_{m+n}^z(f_1f_2, g_1g_2, h_1h_2, w_1w_2) - \sigma_{m+n}^z(\dot{y}f_1f_2, g_1g_2, h_1h_2, w_1w_2) - \sigma_{m+n}^z(f_1f_2, \dot{y}g_1g_2, h_1h_2, w_1w_2) + \tau_{m+n}(f_1f_2, g_1g_2, h_1\dot{h}_2, w_1w_2) + \tau_{m+n}(f_1f_2, g_1g_2, h_1h_2, w_1\dot{w}_2) - i\tau_{m+n-1}(f_1f_2, g_1\dot{g}_2, h_1h_2, w_1w_2), \quad (20)$$

$$[\tau_m(f_1, g_1, h_1, w_1), \tau_n(f_2, g_2, h_2, w_2)] = (m-n)\tau_{m+n}(f_1f_2, g_1g_2, h_1h_2, w_1w_2) - \tau_{m+n}(\dot{y}f_1f_2 - \dot{y}f_2f_1, g_1g_2, h_1h_2, w_1w_2) - \tau_{m+n}(f_1f_2, \dot{y}g_1g_2 - \dot{y}g_2g_1, h_1h_2, w_1w_2), \quad (21)$$

其中 f, g, h 和 w 上的一点表示对各自宗量的导数; Lie 乘积 $[A, B]$ 被定义为: $[A, B] = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\partial}{\partial \epsilon} (A(u + \epsilon B) - B(u + \epsilon A)) = A'B - B'A$. 在 $(2+1)$ 维可积体系的研究中我们发现, 所有已知的 $(2+1)$ 维可积模型的对称代数都具有一个广义 Virasoro 子代数:

$$[\sigma(f_1), \sigma(f_2)] = \sigma(f_1\dot{f}_2 - f_2\dot{f}_1). \quad (22)$$

而所有已知的不可积模型都不具有这个对称子代数. 对于 $(3+1)$ 维的破裂孤子方程(5), 存在许多广义 Virasoro 型对称子代数. 如, $(\sigma_0^y(f) \equiv \sigma_0^y(f(y), 1, 1, 1))$,

$$[\sigma_0^y(f_1), \sigma_0^y(f_2)] = \sigma_0^y(\dot{f}_2f_1 - \dot{f}_1f_2). \quad (23)$$

2 广义 Virasoro 代数意义下的高维可积模型

如上节所述, 由于所有已知的 $(2+1)$ 维可积模型的对称代数都具有一个广义 Virasoro 子代数(22). 而所有已知的不可积模型都不具有这个对称子代数, 因此, 我们可定义在具有广义 Virasoro 对称代数意义下的可积性. 从 Virasoro 对称代数的每一个具体实现出发, 我们就可以得到大量的具有广义 Virasoro 对称代数意义下的可积模型. 本节我们描述如何利用一个具体的对称代数实现来得到相应的可积模型.

一般说来, Virasoro 对称代数(22)式可以具有如下形式:

$$\sigma(f(t)) = \sum_{k=0}^{\infty} f^{(k)} \sigma[k], \quad \sigma[0] = u_t, \quad (24)$$

其中 u 可以是任意维空间中的任意分量的矩阵函数, $\sigma[k]$ 中不显含变量 t 及场 u 对 t 的导数. 将(24)式代入(22)式, 我们发现 $\sigma[k]$ 应满足下述超定方程:

$$\frac{k!(2k_1 - k - 1)}{k_1!(k - k_1 + 1)!} \sigma[k] + [\sigma[k_1], \sigma[k - k_1 + 1]] = 0, \\ k_1 = 1, 2, \dots, \left[\frac{k}{2}\right], k = 1, 2, \dots \quad (25)$$

(25)式中 $\left[\frac{k}{2}\right]$ 表示取 $\frac{k}{2}$ 的整数部分.

一旦一个具体的实现(24)、(25)式被给定, 下一步我们要做的是, 用标准的群论方法^[11]求出相应的高阶扩张. 即求出当场 u 按 $u \rightarrow u + \epsilon \sigma(f)$ 变化时, 它的各阶导数的变化规律. 然后, 利用对称(24)式及相应的高阶扩展求出与对称(24)式相应的各种群不变量. 由群不变量的任意函数构成的方程都具有(22)式的对称代数. 最后, 我们要从由群不变量构成的方程中选择出那些与 f 无关的群不变方程. 这些方程就是我们要求的在具有广义 Virasoro 对称代数意义下可积模型.

在(2+1)维情况下, 我们已经找到了(25)式的许多解. 如,

$$(i) \sigma[k] = 0, (k \geq 2), \sigma[1] = -\frac{1}{2}y^2.$$

$$(ii) \sigma[k] = 0, (k \geq 3), \sigma[2] = -\frac{1}{54}y^3, \sigma[1] = \frac{1}{3}yu_y + 1.$$

$$(iii) \sigma[k] = 0, (k \geq 4), \sigma[3] = c_4 y^2, \sigma[2] = c_3 y^2 u_x + c_2 x, \sigma[1] = (1 - c_1)xu_x + \frac{1}{2}(2 - c_1)yu_y + c_1 u.$$

$$(iv) \sigma[k] = 0, (k \geq 3), \sigma[2] = -\frac{1}{2}(x, 0)^T, \sigma[1] = \frac{1}{2}((xu)_x, (xv)_x)^T.$$

(v) $\sigma[k] = 0, (k \geq 4), \sigma[3] = c_1(0, 0, (x+y)^3 - (x-y)^3)^T, \sigma[2] = c_2((x^2 + y^2)u, (x^2 + y^2)v, 0)^T, \sigma[1] = \frac{1}{12}((xu)_x + yu_y, (xv)_x + yv_y, (xw)_x + yw_y)^T$. 与(24)式的具体实现(i)~(v)相对应的典型的群不变方程分别为三维连续 Toda 方程, Nizhnik-Novikov-Veselov 方程, KP 方程, 长波色散方程和 DS 方程^[9,10]. 实际上, 对于(24)式的每一个实现, 都可以得到无穷多的群不变方程. 如, 对于实现(iii), 我们已经得到了一类相应的无穷多群不变方程^[12].

根据(2+1)维情况下的可积模型都具有(22)式的对称代数的事实, 为了寻找(3+1)维的可积模型, 从(22)式的具体实现出发将是一条可行的途径. 本节中我们从一个具体的(22)式的(3+1)维实现, 来构造(3+1)维的在广义 Virasoro 代数意义下的可积模型. 容易证明,

$$\sigma[k] = 0, (k \geq 3), \sigma[2] = yz, \sigma[1] = \frac{1}{2}(yu)_y - zu_z - u$$

是(25)式的一个解, 即

$$\sigma(f) = fu_t + f\left(\frac{1}{2}yu_y + zu_z - \frac{1}{2}u\right) + f_{yz} \quad (26)$$

是广义 Virasoro 代数(22)式的一个(3+1)维实现. 从实现(26)式出发, 人们可以得到许多相应的群不变方程, 如

$$u_{xt} - 4u_y u_{xz} + 2u_x u_{yz} - 2u_z u_{xy} + u_{yy} = 0. \quad (27)$$

用本节提出的方法得到的模型虽然是在广义 Virasoro 对称代数意义下的可积模型,但是是否在其他传统意义下的可积模型有待于进一步研究.

3 共形不变性及 Painlevé 性质意义下的高维可积模型

在可积模型的对称性研究中,我们发现可积模型的 Schwartz 形式的共形不变性起着非常重要的作用. 如, Schwartz KdV 方程

$$\frac{\phi_{i,t}}{\phi_{i,x}} + \{\phi_i; x\} + \lambda_i = 0, \quad i = 1, 2, \dots, \infty, \lambda_i \neq \lambda_j, \forall i \neq j. \quad (28)$$

在解空间 $S = \{\phi_i, i = 1, 2, \dots, \infty\}$ 的共形不变性正相应于 KdV 方程的无穷多对称(及无穷多守恒律). (28)式中 $\{\phi_i; x\} \equiv \left(\frac{\phi_{i,xx}}{\phi_{i,x}}\right)_x - \frac{1}{2}\left(\frac{\phi_{i,xx}}{\phi_{i,x}}\right)^2$ 为 Schwartz 导数. 这个事实告诉我们,如果要构造高维可积模型,共形不变的方程可能是最好的候选者. 一个一般的 N 维共形不变的模型具有下述形式,

$$G\left(\{\phi; x_i\}, \frac{\phi_{x_i}}{\phi_{x_j}}, i, j = 1, 2, \dots, N\right) = 0, \quad (29)$$

其中 G 是一个共形不变量 $\{\phi; x_i\}, \frac{\phi_{x_i}}{\phi_{x_j}}, (i, j = 1, 2, \dots, N)$ 及其导数的任意函数. 我们相信对于许多类型的 G 方程(29)可以被变成具有 Painlevé 性质的形式. 本节中我们仅写下一种特殊的 G 并把相应的(29)式变成具有 Painlevé 性质的形式. 我们很容易证明, (29)式的下述特殊形式,

$$\sum_{k=0}^N a_k \{\phi; x_k\} + g\left[\frac{\phi_{x_i}}{\phi_{x_j}}, i, j = 1, 2, \dots, N\right] = 0, \quad (30)$$

可以被变成具有 Painlevé 性质的形式. 上式中 g 是 $\frac{\phi_{x_i}}{\phi_{x_j}}, (i, j = 1, 2, \dots, N)$ 的任意多项式函数. 将变换关系 $\phi = \exp F, u_i = F_{x_i}, i = 1, 2, \dots, N$, 代入方程(30)得,

$$\left(\prod_{k=1}^N u_k^{m_k}\right) \left[\sum_{k=1}^N a_k \left(\frac{u_{k x_k x_k}}{u_k} - \frac{3u_{k x_k}^2}{2u_k^2} - \frac{1}{2} u_k^2 \right) + g\left(\frac{u_i}{u_j}, i, j = 1, 2, \dots, N\right) \right] = 0, \quad (31)$$

$$u_{1 x_i} = u_{i x_1}, i = 1, 2, \dots, N. \quad (32)$$

(31)式中 $m_j \geq 2$ 是某些正整数使得 $\left(\prod_{k=1}^N u_k^{m_k}\right) g\left(\frac{u_i}{u_j}, i, j = 1, 2, \dots, N\right)$ 仅仅是 $u_i (i = 1, 2, \dots, N)$ 的多项式函数. 为了证明(31)和(32)的 Painlevé 性质,我们将 u_i 展开为:

$$u_i = \sum_{j=0}^{\infty} u_{ij} \Phi^{j+\alpha_i}, \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad (33)$$

其中, α_i 和 u_{i0} 由领头项分析确定为:

$$\alpha_i = -1, u_{i0} = \Phi_{x_i}, i = 1, 2, \dots, N. \quad (34)$$

将方程(33)和(34)代入到(31)和(32)式可得

$$(j+1)(j-1) \sum_{k=1}^N a_k u_{k0} u_{kj} = f(u_{ki}, k=1, 2, \dots, N, i \leq j-1), \quad (35)$$

$$(j-1)(u_{1j}u_{k0} - u_{kj}u_{10}) = u_{k(j-1), x_1} - u_{1(j-1), x_k}, \quad k=2, 3, \dots, N. \quad (36)$$

(35) 式中 f 是一个 u_{ki} , ($k=1, 2, \dots, N, i \leq j-1$) 的非常复杂的函数. 从 (35) 和 (36) 式可知 $N+1$ 个共振点位于 $j = -1, \underbrace{1, 1, \dots, 1}_N$ 处. $j = -1$ 的共振相应于奇性流形 Φ 的任意性, 而在 N 个 $j = 1$ 的共振点存在 N 个自恰条件. 根据标准的 WTC^[13] 方法, 如果这 N 个自恰条件是恒满足的, 则称这个模型具有 Painlevé 性质. 从而这个模型是在具有 Painlevé 性质意义下的可积模型. 在完成一些繁琐的计算后, 相应于 $j = 1$ 的 N 个自恰条件可写为:

$$\sum_{k=0}^N a_k \left[\Phi_{x_k x_k} - \frac{u_{k0, x_k}}{u_{k0}} \Phi_{x_k} \right] = 0, \quad (37)$$

$$u_{k0, x} - u_{10, x_k} = 0 \quad (k=2, 3, \dots, N). \quad (38)$$

显然, 由于方程 (34), 共振条件 (37) 和 (38) 是自然满足的. 因此, 方程 (37) 是在可变换成具有 Painlevé 性质形式意义下的可积模型.

4 结论和讨论

本文从几个不同的角度探索了高维可积模型的存在性. 并给出了几种不同可积意义下的高维可积模型. 类似于 (2+1) 维的破裂孤子方程, 更高维的破裂孤子方程与 (2+1) 维的破裂孤子方程具有相同的强对称算子. 但高维模型具有更为丰富的对称结构. 同其他 (2+1) 维的可积模型一样, 任意维的破裂孤子方程具有一个共同的广义 Virasoro 对称子代数.

由于已知的所有 (2+1) 维可积模型都具有广义 Virasoro 对称子代数, 而所有已知的不可积模型都不具有这个对称子代数, 因此, 我们相信更高维的可积模型亦应具有这个对称子代数. 因此, 从广义 Virasoro 对称子代数的具体实现出发寻求高维可积模型是一条可行的途径. 本文建立了从广义 Virasoro 对称子代数的具体实现出发寻求具有广义 Virasoro 对称代数意义下的可积模型的一般方法. 并由此重新得到了 (2+1) 维的著名可积模型, 且给出了一个具体的 (3+1) 维的具有广义 Virasoro 对称代数意义下的可积方程.

共形不变性在现代物理中起着非常重要的作用. 在可积模型研究中更是如此. 如, KdV 方程的 Schwartz 形式的共形不变性决定了无穷多对称性和守恒律. 因此, 从共形不变的 Schwartz 形式出发, 人们有可能找到高维的可积模型. 本文证明了一个具有任意多项式函数的 Shwartz 方程可以变换成一个具有 Painlevé 性质的形式.

类似于 (2+1) 维破裂孤子方程, 高维破裂孤子方程在其他意义下也是可积的. 如, 具有 (谱可变) 的 Lax 对, 强对称算子, 无穷多守恒律等. 虽然已知的所有 (2+1) 维可积模型都具有广义 Virasoro 对称子代数及已知的 (1+1) 和 (2+1) 维可积模型都可以变成共形不变的形式, 但是本文得到的具有广义 Virasoro 对称子代数意义下的可积模型和在具有共形不变性且可变成具有 Painlevé 性质形式意义下的可积模型是否也是在其他意义下的可积模型有待于进一步研究.

参 考 文 献

- 1 Ablowitz M J, Clarkson P A. Solitons Nonlinear Evolution Equations and Inverse Scattering. London Mathematical Society Lecture Note Series 149. London: Cambridge University Press, 1991
- 2 Lou S Y, Huang Guoxiang. Experimental study of the solitons in nonlinear diatomic lattice. Mod Phys Lett, B, 1995, (9): 1 231
- 3 Lou S Y, Yu J, Lin J, et al. Observation of periodic, quasiperiodic and chaotic localized excitations in nonlinear diatomic macrolattice. Mod Phys Lett, B, 1996, 10: 11
- 4 谷超豪, 郭柏灵, 李翊神, 等. 孤子理论及其应用. 杭州: 浙江科学技术出版社, 1990
- 5 Ward R S. Integrable and solvable system, and relations among them. Phil Trans R Soc Lond, A, 1985, 315: 451
- 6 Lou S Y, Weng J P. Generalized W_∞ symmetry algebra of the conditionally integrable nonlinear evolution equation. J Math Phys 1995, 36: 3 492
- 7 Lou S Y. Integrable models constructed from the symmetries of the modified KdV equation. Phys Lett, B, 1993, 302: 261
- 8 Bogoyavlenskii O I. Five constructions of integrable dynamical systems connected with the Korteweg-de Vries equation. Acta Appl Math, 1988, 13: 227
- 9 Lou S Y. Generalized symmetries and w_∞ algebras in three dimensional Toda field theory. Phys Rev Lett, 1993, 71: 4 099
- 10 Lou S Y, Hu X B. Infinitely many symmetries of the Davey-Stewartson equation. J Phys A: Math Gen, 1994, 27: 207
- 11 Olver P J. Application of Lie Groups to Differential Equations. New York: Springer, 1986
- 12 Lou S Y, Yu J, Lin J. $(2+1)$ -dimensional models with Virasoro-type symmetry algebras. J Phys A: Math Gen, 1995, 28: L191
- 13 Weiss J, Tabor M, Carnevale G. The Painlevé property for partial differential equations. J Math Phys, 1983, 24: 522