

# 二元六相( $n+4$ )多体系封闭网图的再研究

郭 其 悌

(中国科学院地球化学研究所)

## 摘 要

本文补充了二元六相多体系八点封闭网的三个表象多面体和九点封闭网的四个表象多面体。连同过去的结果,共得到29个八点封闭网图和25个九点封闭网图。

在排除相图中几何元素(无变度点、单变度曲线和双变度区域)的重复出现,以及封闭环线出现的可能性的前提下,作者导出了二元六相多体系的全网系,并得到该多体系的特征封闭网只可能是八点网和九点网<sup>[1]</sup>。在此基础上,作者给出了该多体系的13个八点封闭网图和12个九点封闭网图<sup>[2]</sup>。然而,在文献[2]中尚未包括二元六相( $n+4$ )多体系的八点和九点封闭网图的全部可能性,本文则给出了补充性的结果。

## 一、八点封闭网图

文献[2]中,把八点网看作是两个五点网的拼合,并从此观点出发,构筑了13个八点封闭网图。具体的做法,是去掉某两个五点封闭网所共同含有的那一无变度点,得到两个部分封闭的四点网。这两个四点网的单端线段显然是一一对应的,具有完全相同的标记符号和相对排列。因此,这两个四点部分封闭网中标记相同的单端线段直接接拢,就可形成一个八点封闭网图。在单端线段的对接中,不可能再产生新的呆性交叉,所以,这样产生的八点封闭网图中只有两个呆性交叉。

然而,这并不是唯一的可能性。图1共绘出八点封闭网的七种可能的表象多面体。其中,a, d, e 和 g 四种已在文献[2]中给出,它们都是直接对接的产物。

图1a中的两个呆性交叉可看作是原在顶面和底面中的某一对角线,分别绕过多面体的一个顶点而挂在两条不同的棱上形成的。同时应该指出,这一操作改变了有关顶点周围单变度曲线的排列。

设想挂在图1a表象多面体棱上的两条“对角线”中的某一条,如原顶面中的那一条,再绕过一个顶点挂到底面上去,这就产生了一个新的拓扑构型(图1b);再设想这两条“对角线”全都再绕过一个顶点,分别挂在顶面和底面上,这就产生了第三种拓扑构型(图1c)。

从拼合的观点看,符合图1b和c的封闭网图,不仅包含了两个部分封闭的四点网的单端线段的对接,而且包含了一个四点网中的封闭区域,被另一个四点网中的一条双端终结的线段呆性穿过的操作。换句话说,拼合时,一个拼合元件中的某一无变度点进入了另一拼合元件的

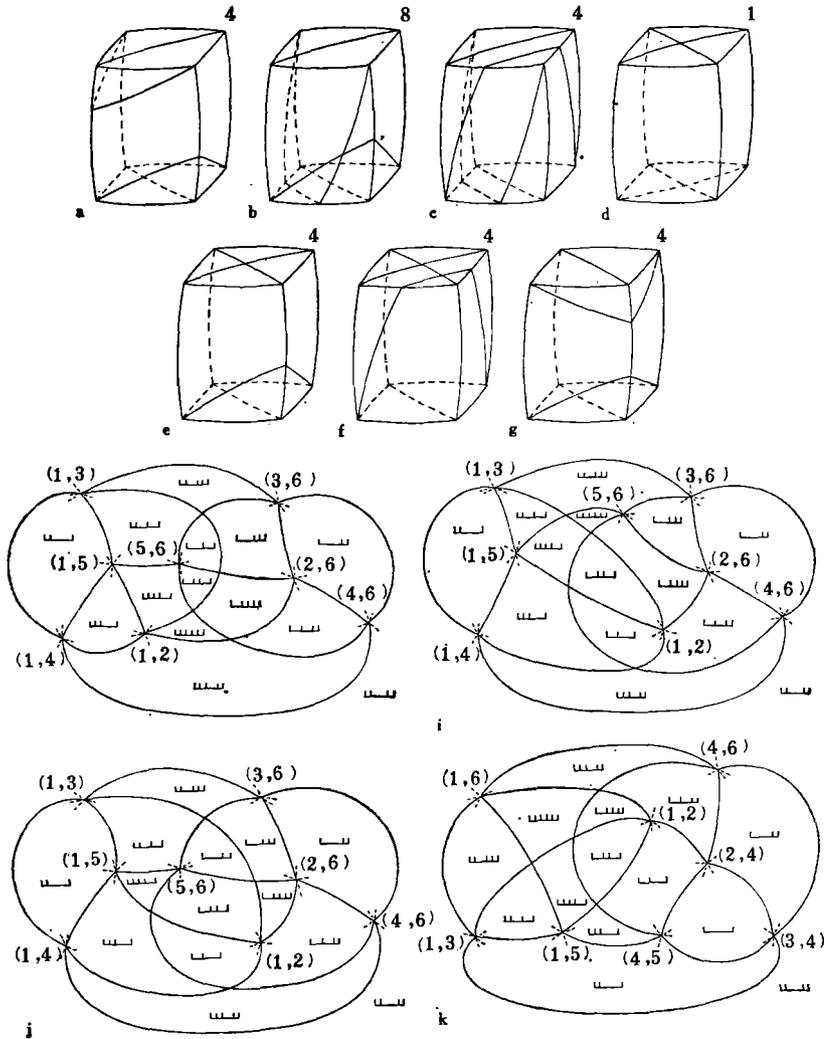


图 1 八点封闭网的七种表象多面体及部分封闭网图

每一多面体右上角的数字代表符合该多面体的封闭网图的数目。可归结于表象多面体 a, b, c 的网有  $\{1|6\}$ ,  $\{1|5\}$ ,  $\{2|6\}$  和  $\{2|5\}$ ; 可归结于表象多面体 d 的有  $\{3|4\}$ ; 可归结于表象多面体 e 和 f 的有  $\{1|4\}$ ,  $\{2|4\}$ ,  $\{3|6\}$  和  $\{3|5\}$ ; 可归结于表象多面体 g 的有  $\{1|3\}$ ,  $\{2|3\}$ ,  $\{4|5\}$  和  $\{4|6\}$ 。h, i, j 是  $\{1|6\}$  的符合表象多面体 b 和 c 的三种封闭网图, k 是  $\{1|4\}$  的符合表象多面体 f 的封闭网图。

某一封闭区域。

比较图 1a, b 和 c 三个表象多面体, 可以看出, 后两个表象多面体, 可以在不改变第一个表象多面体中任何无变度点周围单变度曲线的排列的条件下, 由第一个表象多面体导出。既然图 1b 与 c 和图 1a 三个表象多面体具有完全相同的 Schreinemakers 线锥 (bundle), 那么, 凡是可形成符合图 1a 表象多面体的封闭网图的八点封闭网, 都有符合图 1b 与 c 表象多面体的封闭网图, 不过, 符合图 1b 与 c 的封闭网图与符合图 1a 的封闭网图间有一个重要的区别, 那就是, 前者包含 4 个呆性交义、14 个双变度区域, 后者只包含 2 个呆性交义、12 个双变度区域。

例如, 八点封闭网  $\{1|6\}$  有符合图 1a 表象多面体的封闭网图<sup>[2]</sup>, 它的符合图 1b 和 c 表象多

面体的封闭网图有三种, 分别绘在图 1h, i 和 j 中。图 1h 和 i 都符合图 1b 表象多面体, 不同之处在于图 1h 中 (1, 2, 3) 上有三个呆性交叉, 而图 1i 中 (4, 5, 6) 上有三个呆性交叉。

在不改变各无变度点周围单变度曲线的排列的条件下, 图 1d 和 g 的表象多面体都不可能衍生出拓扑关系不同的新的表象多面体, 然而图 1e 的表象多面体可有一种变化, 即图 1f。文献 [2] 中曾举出 {1|4} 作为具有符合图 1e 表象多面体的封闭网图的例子, 它的符合图 1f 表象多面体的封闭网图见图 1k。显然, 凡具有符合图 1e 表象多面体的封闭网图的八点封闭网, 都具有符合图 1f 表象多面体的封闭网图。这两类封闭网图的区别仍然是后者所包含的呆性交叉与双变度区域都较前者多, 分别为 4 和 14。

经过以上补充后, 共获得 29 个不同的八点封闭网图。

## 二、九点封闭网图

作者给出过 12 个九点封闭网图<sup>1)</sup>, 曾指出, 凡是要求子  $n+3$  相表象多面体的不相邻顶点缺失的三点网拼合元件是不可能的。然而, 同时却没有注意到当三个拼合元件中只有一个这样的三点网时, 仍能拼成合理的网图。具体作法是, 把另两个三点部分封闭网中的一个完全摺入(嵌入)这样的三点网的封闭区域以内, 把第三个三点部分封闭网放在这样的三点网封闭区域以外<sup>1)</sup>, 然后, 将单端线段适当地连结(注意呆性交叉!)文献 [2] 中表 1 内带有星号而被认为不可能有合理封闭网图的九点网 {1|2|4}, {3|5|6}, {1|2|5}, {1|2|6}, {2|5|6} 和 {1|5|6}, 都能经由这样的操作拼出合理的网图来。其中 {1|2|4} 和 {3|5|6} 可拼出完全相同的网图(图 2i), 相应于图 2c 的表象多面体。而 {1|2|5}, {1|2|6}, {2|5|6} 和 {1|5|6} 则能拼出相应于图 2b 的表象多面体的网图来。图 2h 是 {1|5|6} 的网图。需要指出的是, 与 {1|5|6} 含完全相同的九个点的网是 {2|3|4}, 其网图见文献 [2]。很明显, 在不改变任何点的单变度曲线的排列的条件下, 由 {2|3|4} 的网图可以容易地衍生出 {1|5|6} 的网图。

图 2d 和 e 这两个表象多面体可衍生出图 2f 和 g 两个新的表象多面体。凡具有符合前两个表象多面体的封闭网图的九点封闭网, 都应有符合后两个表象多面体的封闭网图。例如, 文献 [2] 中图 5 给出过网图的 {2|3|5} 和 {1|4|6}, 都有符合图 2f 和 g 的封闭网图(图 2j 和 k)。

本文新得到的九点封闭网图有只含三个呆性交叉的, 也有含五个呆性交叉的。凡是含三个呆性交叉的九点封闭网, 都含 14 个双变度区域, 凡是含五个呆性交叉的九点封闭网, 都含全部 16 个双变度区域。

作了以上补充后, 我们共获得 25 个不同的九点封闭网图。

## 三、结 论

综合文献 [2] 和本文的结果, 可得出如下更完整的结论。

在排除封闭环线和几何元素重复出现的前提下, 二元六相多体系的 15 个八点封闭网中, 只有 13 个能给出合理的封闭网图。八点封闭网图的总数为 29 个。其中 13 个网图各含两个呆性交叉和 12 个双变度区域, 另外 16 个网图各含四个呆性交叉和 14 个双变度区域。20 个九

1) 实际上, 所谓封闭区域的内、外, 对这样的三点网拼合元件来说只有相对的意义。

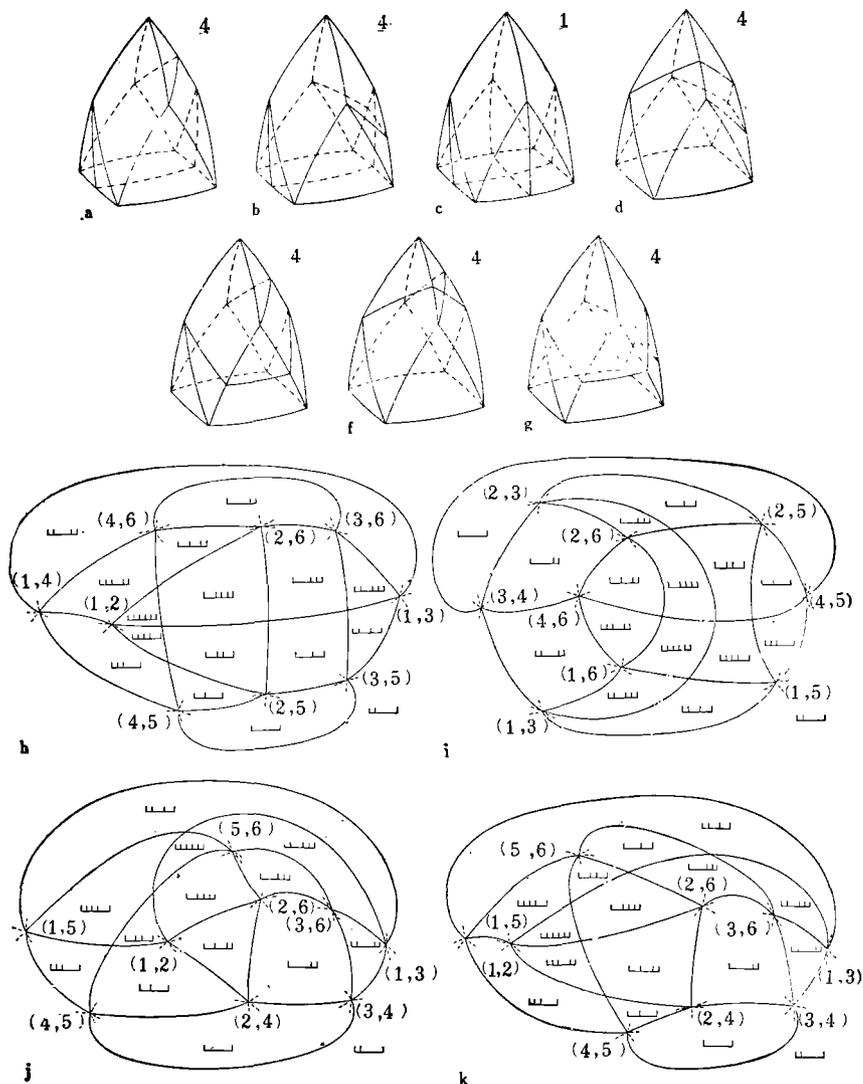


图2 九点封闭网的七种表象多面体及部分封闭网图

每一多面体右上角的数字代表符合该多面体的封闭网图的数目。可归结于表象多面体 a 的网有 {3|4|6}, {3|4|5}, {1|3|4} 和 {2|3|4}; 可归结于表象多面体 b 的网有 {1|2|5}, {1|2|6}, {2|5|6} 和 {1|5|6}; 可归结于表象多面体 c 的网有 {1|2|4} 和 {3|5|6}; 可归结于表象多面体 d, f, g 的网有 {1|3|5}, {1|3|6}, {2|3|5} 和 {2|3|6}; 可归结于表象多面体 e, f, g 的网有 {2|4|6}, {2|4|5}, {1|4|5} 和 {1|4|6}。h 是 {1|5|6} 的符合表象多面体 b 的网图; i 是 {1|2|4} 和 {3|5|6} 的符合表象多面体 c 的网图; j 和 k 分别是 {2|3|5} 和 {1|4|6} 的符合表象多面体 f 和 g 的封闭网图。

点封闭网中,有 18 个能给出合理的封闭网图。九点封闭网图的总数为 25 个。其中 16 个各含三个呆性交叉和 14 个双变度区域,另外 9 个各含五个呆性交叉和 16 个双变度区域。凡是在标记符号的大括号中,连续出现化学成分图解轴最边缘两相相符号的八点封闭网和在标记符号的大括号中,连续出现化学成分图解轴最边缘三相相符号的九点封闭网,都不可能合理的网图。

## 四、讨 论

Roseboom 和 Zen 用叠加稳定区方法 (Method of overlapping stability fields) 导出了二元六相多体系的 62 种网<sup>[3]</sup>。尽管他们的研究途径与作者的很不相同, 但结果是吻合的。在他们的结果中, 只要除去含封闭环线的网, 以及同一无变度点重复出现的网, 所余的网同作者的结果就完全相同。而且, 他们的带封闭环线的网具有这样的显著特征: 封闭环线是加在一个五点网或八点网的适当部位的, 而且, 这个部位是容易确定的。他们含有同一无变度点重复出现的网, 可看作是把重复出现的点嵌在一个五点网或八点网或九点网的适当部位的。这样的部位同样可以容易地确定。总的说来, 作者的五点、八点和九点全网系的各封闭网及其网图是二元六相多体系封闭网图的实质部分。在此基础上, 放宽限制, 即允许封闭环线和同一点两次出现, 就可导出全部热力学上可能的网图, 而不论某些网图的出现几率是何等地小。此时, 五点全网系中的 {1} 和 {6}, 八点全网系中的 {1|2} 和 {5|6}, 以及九点全网系中的 {1|2|3} 和 {4|5|6} 都可能成为热力学上可能的封闭网图的骨架。由此看来, Roseboom 和 Zen 的结果与作者的结果是紧密相通的。同时, 作者的途径还为处理三元  $n+4$  相多体系的封闭网图提供了可能。目前看来, 尚无其它途径可达此目的。

作者感谢美国地质调查所任以安 (E-an Zen) 先生寄来他们的论文预印本, 亦感谢中国科学院地球化学研究所王声远同志的帮助

## 参 考 文 献

- [1] 郭其梯, 中国科学, 1979, 8: 800—808.
- [2] 郭其梯, 中国科学, 1980, 2: 172—179.
- [3] Roseboom, E. H., Jr. and E-an Zen, Unary and binary multisystems; topologic classification of phase diagrams and relation to Euler's theorem on polyhedra, *Amer. Jour. Sci.* (in press).