每个子群都 c - 正规的有限群

李才恒^{②④}, 王燕鸣^{①③*}, 谢浊清^①, 苏宁^①

① 中山大学数学与计算科学学院, 广州 510275;

② 云南大学数学与统计学院, 昆明 650091;

③ 中山大学岭南学院, 广州 510275;

④ School of Mathematics and Statistics, University of Western Australia, Perth, WA 6009, Australia

E-mail: cai.heng.li@uwa.edu.au, stswym@mail.sysu.edu.cn, xiezhaoqing@126.com, mc04sn@mail2.sysu.edu.cn

收稿日期: 2012-02-16; 接受日期: 2012-08-27; * 通信作者
国家自然科学基金 (批准号: 11171353 和 11171292) 资助项目

摘要 在本文中我们研究有限 CN- 群, 即每个子群都 c - 正规的有限群. 我们得到以下结果:

群 G 是 CN- 群当且仅当 G^c 的每个子群都在 G 中正规.

群 G 是 CN- 群当且仅当 G 可解且 c - 正规性是传递的.

设 p 是一个奇素数, P 是一个 p - 群, 则 P 是一个 CN- 群当且仅当 $\Phi(P) \leq Z(P)$.

我们也得到了一些 CN- 群的直积为 CN- 群的判别条件.

关键词 有限群 c - 正规 传递

MSC (2010) 主题分类 20D10, 20D15

1 引言

群 G 的子群 H 称为 c - 正规, 如果存在 G 的正规子群 N 使得 $G = NH$ 且 $N \cap H \leq H_G$, 这里 $H_G = \bigcap_{g \in G} H^g$, 是 H 在 G 中的核. 在 [1] 中, 王燕鸣给出了有限群是可解群的判别法:

(1) G 可解当且仅当 G 的每个极大子群在 G 中 c - 正规;

(2) G 可解当且仅当 G 中存在 c - 正规的可解极大子群.

从那以后, 许多学者开始研究群的 c - 正规性. 我们知道, G 是幂零的当且仅当 G 的每个子群次正规, G 是 Dedekind 群当且仅当 G 的每个子群正规, 这些是群结构的重要结论. 研究每个子群具有某种正规性的群结构是很多学者关心的问题, 一个自然的问题是: 每个子群都 c - 正规的有限群有何结构?

在本文中, 我们研究了每个子群都 c - 正规的有限群. 为方便起见, 我们把这种有限群称为 CN- 群. 由上面提到 [1] 的结果, CN- 群是可解的. 在本文中, 我们将给出 G 是 CN- 群的一些判别条件.

在陈述主要定理之前, 我们先给出一些定义.

设 H 是群 G 的一个子群, 如果存在 $L \leq G$ 使得 $G = HL$ 且 $H \cap L = 1$, 则称 H 是 G 的可补子群, 称 L 为 H 在 G 中的补子群. 按 Hall [2] 的术语, 称群 G 称为可补的, 如果 G 的每个子群 H 都是 G 的可补子群.

群 G 的正规子群 N 被称为 G 的初等交换剩余, 如果 N 是 G 的最小的正规子群使得 G/N 是初等交换群. 我们把 G 的初等交换剩余记为 G^c . 显然 $G^c = \bigcap \{N \leq G \mid G/N \text{ 初等交换}\}$.

定理 1 设 G 是有限群. 如果 G 是 CN- 群, 那么 G 是超可解的. 并且, 如下条件等价:

- (i) G 是 CN- 群;
- (ii) $G/(\Phi(G)G')$ 可补且 $\Phi(G)G'$ 的每个子群在 G 中正规;
- (iii) G^c 的每个子群在 G 中正规;
- (iv) G 可解且 c- 正规在 G 中传递.

当 G 是 p - 群时, 我们有一个简单的判别法:

定理 2 设 P 是 p - 群, 这里 p 是奇数, 那么 P 是 CN- 群当且仅当 $\Phi(P) \leq Z(P)$.

我们还得到一些关于 CN- 群的更为细致的结果.

2 预备知识

在本节中, 我们将证明一些在主要定理中要用到的结果.

引理 2.1 如果 G 是 CN- 群且 $M \leq G$, 那么 $\Phi(M)$ 的每个子群 H 在 G 中的正规.

证明 因为 H 在 G 中 c- 正规, 所以存在 $N \trianglelefteq G$ 使得 $HN = G$ 且 $H \cap N \leq H_G$, 所以 $M = H(M \cap N)$. 由于 $H \leq \Phi(M)$, $M \cap N = M$. 因此 $H = H_G$, 故 $H \trianglelefteq G$. $\square$

如下结果是熟知的, 在文献 [3] 中可找到或参考 [4, 第 7 章定理 4.3] 中证明.

引理 2.2 设 p 是奇素数, G 是交换 p - 群, 假设 $(|G|, |H|) = 1$, 如果 H 平凡地作用在 $\Omega_1(G)$ 上, 这里 $\Omega_1(G) = \langle x \in G \mid x^p = 1 \rangle$, 那么 H 平凡地作用在 G 上.

引理 2.3 设 p 是奇素数, G 是循环群, $|G| = p^e$, $\varphi \in \text{Aut}(G)$, $|\varphi| = p$. 那么 $\varphi(a) = a^{1+ip^{e-1}}$ 对某个 $1 \leq i < p$ 成立, 这里 a 是 G 的生成元.

证明 显然 $\varphi(a) = a^n$, 这里 $n^p \equiv 1 \pmod{p^e}$.

由数论的知识, 方程 $n^p \equiv 1 \pmod{p^e}$ 有 $p-1$ 个解: $n \equiv 1 + ip^{e-1} \pmod{p^e}$, $1 \leq i < p$. $\square$

关于 Sylow p - 子群的 c- 正规性, 我们有如下的简单但有益的结论:

定理 2.1 设 G 是有限群, 那么如下条件等价:

- (1) $G/O_p(G)$ 是 p - 幂零的;
- (2) 在 G 中存在 c- 正规的 Sylow p - 子群;
- (3) $G/F(G)$ 是 p - 幂零的.

特别地, $G/F(G)$ 是幂零的当且仅当所有的 Sylow 子群在 G 中 c- 正规.

证明 (1) $\Rightarrow$ (2). 假设这不对, 令 G 是极小反例. 那么 $O_p(G) = 1$. 所以 G 是 p - 幂零的, 即, 存在 $M \trianglelefteq G$ 使得 $G = PM$ 且 $P \cap M = 1$, 因此 P 在 G 中 c- 正规, 矛盾.

(2) $\Rightarrow$ (1). 假设这不对, 令 G 是极小反例. 令 P 是一个 c- 正规的 Sylow p - 子群. 如果 $O_p(G) > 1$, 那么由 [1, 引理 1], $P/O_p(G)$ 在 $G/O_p(G)$ 中 c- 正规. 由于 G 是极小反例, $G/O_p(G) \cong (G/O_p(G))/(O_p(G)/O_p(G))$

是 p - 幂零的, 矛盾. 所以有 $O_p(G) = 1$. 又因为 P 是一个 c- 正规的 Sylow p - 子群, 所以存在 $N \trianglelefteq G$ 使得 $PN = G$, 以及 $P \cap N \leq O_p(G) = 1$. 从而 G 是 p - 幂零的, 矛盾.

(1) $\Leftrightarrow$ (3). 显然 $F(G) = O_p(G) \times \cdots \times O_q(G)$. 因为 $F(G)/O_p(G)$ 是 p' - 群, 所以

$$G/F(G) \cong (G/O_p(G))/(F(G)/O_p(G))$$

是 p - 幂零的当且仅当 $G/O_p(G)$ 是 p - 幂零的.

特别地, 我们有 $G/F(G)$ 是幂零的当且仅当对所有的素因子 p , $G/F(G)$ 是 p -幂零的, 由 (2), 这等价于所有的 Sylow 子群在 G 中 c -正规. $\square$

因为 $G^\epsilon = \cap \{N \trianglelefteq G \mid G/N \text{ 初等交换}\}$, 我们可以直接得到 G^ϵ 的性质如下:

引理 2.4 令 G 是有限群. 那么

- (1) 如果 $N \trianglelefteq G$ 且 $N \leq G^\epsilon$, 那么 $G^\epsilon/N = (G/N)^\epsilon$;
- (2) 如果 G 是幂零的, 那么 $G^\epsilon = \Phi(G)$.

3 主要定理及证明

群 G 的子群 H 称为可补的, 如果存在 $L \leq G$ 使得 $G = HL$ 且 $H \cap L = 1$; H 称为 c -可补的, 如果存在 $L \leq G$ 使得 $G = HL$ 且 $H \cap L \leq H_G$.

定理 3.1 群 G 是 CN-群当且仅当 $G/(\Phi(G)G')$ 是可补的, 且 $\Phi(G)G'$ 的每个子群在 G 中正规.

证明 我们只需要证明必要性. 因为 G 是 CN-群, 所以 G 每个子群是 c -正规的, 从而也是 c -可补的. 由 [5] 的主要结论, $G/\Phi(G)$ 是可补的. 因为可补性是商群遗传的, 所以

$$G/\Phi(G)G' \cong (G/\Phi(G))/(\Phi(G)G'/\Phi(G))$$

是可补的. 因此我们只需证明 $\Phi(G)G'$ 的每个循环子群在 G 中正规.

任取 $s \in \Phi(G)G'$, 那么 $s = ab$, 这里 $a \in \Phi(G)$ 且 $b \in G'$. 因为 G 是 CN-群, 所以存在 $N \trianglelefteq G$ 使得 $G = \langle ab \rangle N$ 且 $\langle ab \rangle \cap N \trianglelefteq G$. 因为 $\langle ab \rangle N/N$ 是交换的, 所以 $N \geq G'$. 那么 $abN = aN$, 且

$$G/N = \langle ab \rangle N/N = \langle abN \rangle = \langle aN \rangle = (\langle a \rangle N)/N,$$

因此 $G = \langle a \rangle N$. 因为 $a \in \Phi(G)$, $G = N$. 由于 $\langle ab \rangle \cap N \trianglelefteq G$, 所以 $\langle s \rangle = \langle ab \rangle \trianglelefteq G$, 完成证明. $\square$

推论 3.1 令 G 是 CN-群, 那么 $G^\epsilon = \Phi(G)G'$.

证明 因为 G/G^ϵ 是交换的, 所以 $G' \leq G^\epsilon$. 由引理 2.4, $G^\epsilon/G' = (G/G')^\epsilon$, $(G/G')^\epsilon = \Phi(G/G')$. 显然, $\Phi(G/G') \geq (\Phi(G)G')/G'$. 所以 $G^\epsilon \geq \Phi(G)G'$. 由定理 3.1, $G^\epsilon \leq \Phi(G)G'$. 因此, $G^\epsilon = \Phi(G)G'$. $\square$

定理 3.2 令 G 有限群. 那么 G 是 CN-群当且仅当 G^ϵ 的每个子群在 G 中正规.

证明 我们只需要证明必要性.

假设 G 是 CN-群, 由定理 3.1, $G/(\Phi(G)G')$ 是可补的, 且 $\Phi(G)G'$ 的每个子群在 G 中正规. 由 Hall [2] 的主要定理, $G/(\Phi(G)G')$ 的每个 Sylow 子群是初等交换的. 因为 $G/(\Phi(G)G')$ 是交换的, 所以 $G/(\Phi(G)G')$ 是初等交换的. 因此 $G^\epsilon \leq \Phi(G)G'$, 且 G^ϵ 的每个子群在 G 中正规. $\square$

引理 3.1 令 G 是 CN-群. 那么 G^ϵ 是交换的.

证明 因为 G 是 CN-群, 由定理 3.2, 对每个 $H \leq G^\epsilon$, $H \trianglelefteq G$. 假设 G^ϵ 不是交换的, 那么 G^ϵ 是一个 Hamiltonian 群, 所以 $Q_8 \leq \Phi(G)G'$, 这里 Q_8 表示四元数群.

记 $L = C_G(Q_8)Q_8$. 如果 $L = G$, 即 $C_G(Q_8)Q_8 = G$. 那么 $G/(C_G(Q_8)) \cong Q_8/Z(Q_8)$ 是初等交换的, 因此 $G^\epsilon \leq C_G(Q_8)$, 从而 $Q_8 \leq C_G(Q_8)$, 矛盾. 所以, L 是 G 的真子群. 取 $x \in G \setminus L$, x 通过共轭诱导了一个 Q_8 的外自同构. 事实上, 如果存在某个 $b_0 \in Q_8$ 使得对任意的 $a \in Q_8$, $a^x = a^{b_0}$. 那么对任意的 $a \in Q_8$, $a^{xb_0^{-1}} = a$. 因此, $xb_0^{-1} \in C_G(Q_8)$, 所以 $x \in L$, 矛盾.

$$Q_8 = \langle a, b \rangle, \quad a^4 = 1, \quad a^2 = b^2, \quad b^{-1}ab = a^{-1}.$$

因为 G^c 的每个子群在 G 中正规,

$$\langle a \rangle^x = \langle a \rangle, \quad \langle b \rangle^x = \langle b \rangle.$$

因此,

情形 1 $a^x = a, b^x = b^{-1}$; 或者

情形 2 $a^x = a^{-1}, b^x = b^{-1}$.

对于情形 1, 由 Q_8 的定义关系, $b^a = a^{-1}ba = a^3ba = a^2aba = a^2b = b^3 = b^{-1}$. 所以 $b^x = b^a$. 显然, $a^x = a = a^a$. 这与 x 诱导了一个 Q_8 的外自同构矛盾.

对于情形 2, 用类似的方法, 我们有 $a^x = a^{-1} = a^{ab}, b^x = b^{-1} = b^{ab}$, 矛盾, 这完成了定理的证明. $\square$

推论 3.2 令 G 是 CN- 群. 那么 $\Phi(G)G'$ 是交换的.

定理 3.3 群 G 是 CN- 群当且仅当 G 可解且 c- 正规性在 G 中传递.

证明 如果 G 是 CN- 群, 显然 c- 正规性在 G 中传递, 由 [1], G 可解. 反过来, 假设 c- 正规性在 G 中传递. 因为 G 是可解的, 由 [1], G 的每个极大子群是 c- 正规的. 令 $H \leq G$, 那么存在极大子群的链 $H = H_1 < H_2 < \cdots < H_k = G$, 且 H_i 在 H_{i+1} 中 c- 正规. 因为 c- 正规性是传递的, H 在 G 中 c- 正规, 即 G 是 CN- 群. $\square$

定理 3.4 设 p 是奇数, P 是一个 p - 群. 那么 P 是 CN- 群当且仅当 $\Phi(P) \leq Z(P)$.

证明 假设 $\Phi(P) \leq Z(P)$. 那么 $\Phi(P)$ 的每个子群在 P 中正规. 因为 $P/\Phi(P)$ 是初等交换的, 所以是可补的. 由定理 3.1, P 是 CN- 群.

反过来, 假设 P 是 CN- 群但定理不真. 令 P 极小反例.

(1) 对某个 $a \in P, \Phi(P) = \langle a \rangle$.

由推论 3.2, $\Phi(P)$ 可表为

$$\Phi(P) = \langle a_1 \rangle \times \langle a_2 \rangle \times \cdots \times \langle a_s \rangle.$$

若 $s > 1$, 我们选择 $x \in P$ 使得它不中心化 $\Phi(P)$, 那么存在某个 a_i , 不妨假设是 a_1 , 使得 $a_1^x \neq a_1$. 由定理 3.1, $\langle a_s \rangle \trianglelefteq P$, 又有 $P/\langle a_s \rangle$ 是 CN- 群. 所以由 P 的极小性, 存在正整数 v 使得 $a_1^x = a_s^v a_1$. 这矛盾于 $\langle a_1 \rangle \cap \langle a_s \rangle = 1$.

(2) G 的指数等于 p^e , 这里 $p^e = |a|$.

假设这不对, 那么存在 $b \in G$, 它的阶为 p^{e+1} . 记 $a = b^p$, 那么 $\langle a \rangle = \Phi(P)$.

取不中心化 $\Phi(P)$ 的元素 x , 因为 $[b, x] \in \Phi(P)$, 令 $[b, x] = c$, 这里 $c \in \Phi(P)$. $a^x = (b^p)^x = (b^x)^p = (bc)^p = b^p c^p = ac^p$. 另一方面, 因为 $x^p \in \Phi(P)$, 而元素 x 不中心化 $\Phi(P)$, 所以由引理 2.3, $(b^p)^x = a^x = a^{1+ip^{e-1}}, 1 \leq i < p$. 所以 $c^p = a^{ip^{e-1}}$. 因此 $|c| = p^2$. 令 $c_0 = ca^{-ip^{e-2}}$, 那么 $c_0 \in \Phi(P)$, $c_0^p = 1$, 且 $c_0 \in Z(P)$. 因此 $c = c_0 a^{ip^{e-2}} = c_0 b^{ip^{e-1}}$.

为证明 (2), 我们只需证明 $b = b^{x^p} = b^{1+ip^e}$, 这蕴涵着 $|b|$ 整除 ip^e , 矛盾. 事实上,

$$\begin{aligned} b^x &= bc = bb^{ip^{e-1}} c_0 = b^{1+ip^{e-1}} c_0, \\ b^{x^2} &= (b^x)^x = (b^{1+ip^{e-1}} c_0)^x = b^{(1+ip^{e-1})^2} (c_0)^2, \\ &\vdots \\ b^{x^p} &= b^{(1+ip^{e-1})^p} (c_0)^p = b^{(1+ip^{e-1})^p}. \end{aligned}$$

所以, $b = b^{x^p} = b^{(1+ip^{e-1})^p}$ (因为 $x^p \in \Phi(P)$ 且 b 中心化 $\Phi(P)$). 容易看出 $b = b^{x^p} = b^{1+ip^e}$ (由 $|b| = p^{e+1}$ 以及二项式定理).

(3) 最终的矛盾.

因为 $\Phi(P) = P'P^p$, 对任意的 $b \in \Phi(P)$, 我们可以假设 $b = [u, v]s$, 这里 u, v 属于 P 且 s 属于 P^p . 对任意的 $x \in P$, 存在某个 $c \in \Phi(P)$, 使得 $u^x = uc$. 由引理 2.3, 若 x 不中心化 $\Phi(P)$, 那么 $a^x = a^{1+ip^{e-1}}$,

$$(a^p)^x = (a^x)^p = (a^{1+ip^{e-1}})^p = a^p.$$

所以 x 中心化 $\Phi(P)$ 的每个真子群. 若 $c^u \neq c$, 由引理 2.3, $c^u = c^{1+ip^{e-1}}$, 这里 $1 \leq i < p$. 因此 $[c, u] = c^{ip^{e-1}}$, 所以 $[c, u]$ 的阶是 p , 所以 $[c, u] \in Z(P)$. 因此, 由 [3, 引理 3.1.3],

$$(uc)^p = u^p c^p [c, u]^{\binom{p}{2}} = u^p c^p, \quad u^p = (u^p)^x = (u^x)^p = (uc)^p = u^p c^p.$$

$c^p = 1$, 我们有 $c \in Z(P)$, 这矛盾于 $c^u \neq c$. 因此 $c^u = c$, 从而

$$u^p = (u^p)^x = (u^x)^p = (uc)^p = u^p c^p.$$

因此 $c^p = 1$, 所以 $c \in Z(P)$.

类似地, 对某个 $d \in \Phi(P) \cap Z(P)$, 我们有 $v^x = vd$. 由此容易算出 $[u, v]^x = [u, v]$, 且 $s^x = s$ (因为 s 的阶小于 p^e). 因此,

$$b^x = ([u, v]s)^x = [u, v]^x s^x = [u, v]s = b,$$

矛盾, 定理证明完成. $\square$

注 3.1 令 G_n 二面体群 $D_{2 \times 2^n}$, 这里 $n \geq 1$, 那么 $\Phi(G_n)$ 是循环的. 因此 $\Phi(G_n)$ 的所有子群在 G_n 中正规, 所以 G_n 是 CN- 群. 但是, $|\Phi(G_n)| = 2^{n-1}$, 并且 $|Z(G_n)| = 2$. 所以定理 3.1 在 $p = 2$ 时不成立.

由定理 3.1 和 3.4, 当 p 是奇素数时, p - 群 P 是 CN- 群当且仅当 P 是初等交换 p - 群的中心扩张. 下面, 我们计算这种扩张的第二上同调群, 它可以从某种意义上告诉我们这种扩张的同构类.

定理 3.5 设 $G = (Z_p)^n$, $A = \bigoplus_{k=1}^s Z_{p^{e_k}}$, 若 G 平凡地作用在 A 上, 那么 $H^2(G, A) = (Z_p)^{sn(n+1)/2}$.

证明 显然 $\text{Hom}_Z(Z_p, A) = \bigoplus_{k=1}^s \text{Hom}_Z(Z_p, Z_{p^{e_k}}) = (Z_p)^s$. 由万有系数定理 [6, 定理 10.22],

$$H^2(G, A) = \text{Hom}_Z(H_2(G, Z), A) \oplus \text{Ext}_Z^1(H_1(G, Z), A). \quad (3.1)$$

(1) 首先我们计算 $\text{Hom}_Z(H_2(G, Z), A)$.

由 [6, 定理 11.48], $H_2(G, Z) = (Z_p)^{n(n-1)/2}$. 所以

$$\text{Hom}_Z(H_2(G, Z), A) = \text{Hom}_Z((Z_p)^{n(n-1)/2}, A) = (Z_p)^{sn(n-1)/2}. \quad (3.2)$$

(2) 其次我们计算 $\text{Ext}_Z^1(H_1(G, Z), A)$.

由 [6, 推论 10.3], $H_1(G, Z) = G = (Z_p)^n$. 所以

$$\text{Ext}_Z^1(H_1(G, Z), A) = \text{Ext}_Z^1((Z_p)^n, A) = [\text{Ext}_Z^1(Z_p, A)]^n. \quad (3.3)$$

我们选取 Z_p 的投射化解序列如下:

$$0 \rightarrow Z \xrightarrow{f} Z \rightarrow Z_p \rightarrow 0,$$

于是我们得到一个复形

$$0 \leftarrow A \xleftarrow{f^*} A \leftarrow \text{Hom}(Z_p, A) \leftarrow 0,$$

这里 $f: Z \rightarrow Z, n \mapsto pn, f^*: A \rightarrow A, a \mapsto pa$.

由 $\text{Ext}_Z^1(Z_p, A)$ 的定义, 我们有

$$\text{Ext}_Z^1(Z_p, A) = A/\text{Im}f^* = (Z_p)^s.$$

由 (3.3),

$$\text{Ext}_Z^1(H_1(G, Z), A) = [\text{Ext}_Z^1(Z_p, A)]^n = (Z_p)^{sn}. \quad (3.4)$$

(3) 综合 (3.1), (3.2) 和 (3.4), 我们有 $H^2(G, A) = (Z_p)^{sn(n+1)/2}$. $\square$

4 两个 CN- 群的直积是 CN- 群的判别法

正如引言中所提到的, G 是幂零群当且仅当 G 的每个子群次正规, G 是 Dedekind 群当且仅当 G 的每个子群正规. 我们注意到幂零群的直积是幂零的, 但非交换 Dedekind 群的直积不是 Dedekind 群. 在本节中, 我们将研究 CN- 群的直积成为 CN- 群的判别法.

命题 4.1 $A \times B$ 是 CN- 群当且仅当 $(A \times B)/(\varphi_A \times \varphi_B)$ 可补, 且 $\varphi_A \times \varphi_B$ 的每个素幂阶循环子群在 $A \times B$ 中正规, 这里 $\varphi_A = \Phi(A)A', \varphi_B = \Phi(B)B'$.

证明 这是定理 3.1 的直接推论. $\square$

推论 4.1 设 A, B 是 CN- 群, 那么 $A \times B$ 是 CN- 群当且仅当 $\varphi_A \times \varphi_B$ 的每个素幂阶循环子群在 $A \times B$ 中正规.

注意到一般情形下 Dedekind 群的直积不是 Dedekind 群, 而正规性是比 c- 正规性更强的性质. 所以我们在考虑更细致的 CN 群直积的时候, 有必要进行适当的限制. 下面的定理 4.1 和 4.2 可以部分揭示 CN 群的直积仍然是 CN 群的特征. 在陈述定理 4.1 和 4.2 之前, 我们先规定一些记号. A_p 表示 A 的一个 Sylow p - 子群, $A_{p'}$ 表示 A 的一个 Hall p' - 子群. $\varphi_A = \Phi(A)A', \varphi_B = \Phi(B)B', \pi = \{p: p \mid |(\Phi(A)A')|, p \mid |(\Phi(B)B')|\}$, $p^e = \exp((\varphi_A)_p)$, $p^f = \exp((\varphi_B)_p)$.

定理 4.1 令 $A \times B$ 是 CN- 群, 且 $p \in \pi$ 且 p 是奇素数. 那么如下的三种情形必有一个出现.

(I) $(\varphi_A)_p \times (\varphi_B)_p \leq Z(A \times B)$.

(II) $(\varphi_A)_p \leq Z(A)$, $(\varphi_B)_p$ 中心化 $B_{p'}$ 且 $e < f$.

(III) $(\varphi_B)_p \leq Z(B)$, $(\varphi_A)_p$ 中心化 $A_{p'}$ 且 $f < e$.

证明 假设 $A \times B$ 是 CN- 群. 如果 $(\varphi_A)_p$ 不中心化 $A_{p'}$, 那么存在 $a \in (\varphi_A)_p$ 以及 $x \in A_{p'}$ 使得 $a^x \neq a$. 由定理 3.1 及 $(\varphi_A)_p \leq \Phi(A)A'$, 有 $\langle a \rangle \trianglelefteq A$, 我们可以把 $\langle x \rangle$ 看作 $\langle a \rangle$ 的一个 p' - 自同构群. 因为 p 是奇素数, 由引理 2.2, 为了找到矛盾, 我们只需要考虑 $|a| = p$ 的情形. $a^x \neq a$, 因此 $a^x = a^k$, $1 < k < p$. 取 $b \in (\varphi_B)_p$ 使得 $|b| = p$. 记 $h = ab$, $|h| = p$, $\langle h \rangle \trianglelefteq A \times B$.

$$h^x = h^i = a^i b^i = a^x b = a^k b, \quad 1 \leq i \leq p$$

在上面的等式中, 比较 a 与 b 的指数, 我们有 $k = i = 1$. 所以 $a^x = a$, 矛盾. 因此, $(\varphi_A)_p$ 中心化 $A_{p'}$. 类似地, $(\varphi_B)_p$ 中心化 $B_{p'}$. 如果进一步假设 $(\varphi_A)_p$ 中心化 A_p 且 $(\varphi_B)_p$ 中心化 B_p , 那么 $(\varphi_A)_p \times (\varphi_B)_p \leq Z(A \times B)$, 这正是 (I) 的情形. 若 $(\varphi_A)_p$ 不中心化 A_p , 那么存在 $a \in (\varphi_A)_p$ 与 $x \in A_p$ 使得 $a^x = a^i$ 且 $1 \leq i < p^e$. 若 $f \geq e$, 那么对某个阶为 p^e 的元素 $b \in (\varphi_B)_p$, $(ab)^x = a^x b = a^i b$ 不包含在 $\langle ab \rangle$ 中, 这矛盾于 $\langle ab \rangle \trianglelefteq A \times B$. 因此 $f < e$, 这迫使 $(\varphi_B)_p$ 中心化 B_p , 这样我们得到 (III).

类似地, 我们可以得到 (II). 定理证毕. $\square$

由上面的思路, 我们有如下定理.

定理 4.2 设 A, B 是 CN- 群, 有下列结论成立:

- (1) 如果对每个 $p \in \pi$, $(\varphi_A)_p \times (\varphi_B)_p \leq Z(A \times B)$, 那么 $A \times B$ 是 CN- 群;
- (2) 如果 $2 \notin \pi$, 那么 $A \times B$ 是 CN- 群, 若对每个 $p \in \pi$, 如下条件之一成立,
 - (I) $(\varphi_A)_p \leq Z(A)$, $(\varphi_B)_p$ 中心化 $B_{p'}$ 且 $e < f$;
 - (II) $(\varphi_B)_p \leq Z(B)$, $(\varphi_A)_p$ 中心化 $A_{p'}$ 且 $f < e$.

证明 (1) 是显然的.

(2) 对于 (I), 令 $b \in P_0$ 以及 $P_0 \leq P$, 这里 $P_0 \in \text{Syl}_p(\varphi_B)$ 且 $P \in \text{Syl}_p(B)$. 我们要证明 b 的阶等于 p^f , 如果 b 不在 $Z(B)$ 中. 显然, b 不在 $Z(P)$ 中. 因为 B 是 CN- 群, 由推论 3.2, φ_B 是交换的. 所以 P_0 可表为

$$P_0 = \langle a_1 \rangle \times \langle a_2 \rangle \times \cdots \times \langle a_s \rangle,$$

这里 a_s 的阶等于 p^f .

若存在 $d \in P_0$ 使得 $\langle a_s \rangle \cap \langle d \rangle = 1$, 令 d 的阶为 p^s . $\langle d \rangle$ 被 x 正规化, 且被 x^p 中心化, 这里 $x \in P$. 若 d 不被 x 中心化, 那么 $d^x = d^{1+jp^{s-1}}$. 由引理 2.3, $1 \leq j < p$. 我们有 $(a_s d)^x = (a_s d)^{1+kp^{f-1}} = a_s^{1+kp^{f-1}} d^{1+kp^{f-1}}$, 这里 $1 \leq k < p$. 另一方面, $(a_s d)^x = a_s^x d^x = a_s^{1+ip^{f-1}} d^{1+jp^{s-1}}$. 因为 $\langle a_s \rangle \cap \langle d \rangle = 1$, $s = f$, $i = j = k$.

因为 $a_s^x = a_s^{1+ip^{f-1}}$,

$$(a_s^p)^x = (a_s^x)^p = (a_s^{1+ip^{f-1}})^p = a_s^p,$$

所以 x 中心化 a_s^p .

因此, 如果 b 不在 $Z(B)$ 中, b 的阶等于 p^f .

取 $a \in (\varphi_A)_p$. 由假设和上面的分析, 若 $g \in B$ 以及 $b^g \neq b$ 对某个 $b \in (\varphi_B)_p$ 成立, 那么 $b^g = b^{1+ip^{f-1}}$. 另一方面, 因为 $e < f$,

$$(ab)^g = ab^g = ab^{1+ip^{f-1}} = a^{1+ip^{f-1}} b^{1+ip^{f-1}} = (ab)^{1+ip^{f-1}}.$$

对于 $g \in B$ 并且 $b^g = b$ 的情况, 显然 $(ab)^g = ab$. 综上, $\langle ab \rangle^g = \langle ab \rangle$; 即, $\langle s \rangle = \langle ab \rangle \trianglelefteq A \times B$.

同理可证, (II) 蕴涵着 $\langle s \rangle = \langle ab \rangle \trianglelefteq A \times B$.

由推论 4.1, $A \times B$ 是 CN- 群. $\square$

注 4.1 令 $A = Z_8$, $B = D_{2 \times 16}$. 那么 $\Phi(A) \leq Z(A)$, $\Phi(B)$ 中心化 B 的 Hall $2'$ - 子群且 $e < f$, 但是 $A \times B$ 不是 CN- 群. 事实上, $B \cong \langle b \rangle \rtimes \langle g \rangle$, 这里 $|\langle b \rangle| = 16$, $b^g = b^{-1}$, $|\langle g \rangle| = 2$. 因此 $(a^2 b^2)^g = a^2 b^{-2}$, 这里 $A = \langle a \rangle$. 所以 $\Phi(A \times B)$ 的子群 $\langle a^2 b^2 \rangle$ 不是 $A \times B$ 的正规子群. 因此当 $2 \in \pi$ 时, 定理 4.2(2) 不成立.

推论 4.2 假设 $(|\varphi_A|, |\varphi_B|) = 1$, 那么 $A \times B$ 是 CN- 群当且仅当 A 与 B 是 CN- 群.

定理 4.3 令 $G = \langle a \rangle \langle b \rangle$, $\langle a \rangle$ 被 $\langle b \rangle$ 扩张, 且 $|a|$ 与 $|\Phi(\langle b \rangle)|$ 互素. 那么 G 是 CN- 群当且仅当 $\Phi(\langle b \rangle)$ 中心化 a .

证明 假设 G 是 CN- 群. 由引理 2.1, $\Phi(\langle b \rangle) \trianglelefteq G$. 因为 $\Phi(\langle b \rangle) \cap \langle a \rangle = 1$, $\Phi(\langle b \rangle)$ 中心化 a .

反过来, $(\langle a \rangle \langle b \rangle) / (\langle a \rangle \Phi(\langle b \rangle))$ 是初等交换群. 由定理 3.2, 现在只需证明 $\langle a \rangle \Phi(\langle b \rangle)$ 的每个子群在 G 中正规. 显然, $\langle a \rangle$ 和 $\Phi(\langle b \rangle)$ 的每个子群在 G 中正规. 因为 $|a|$ 与 $|\Phi(\langle b \rangle)|$ 互素, 对任意的 $L \leq \langle a \rangle \Phi(\langle b \rangle)$, $L = (L \cap \langle a \rangle)(L \cap \Phi(\langle b \rangle))$. 因此, $L \trianglelefteq G$. $\square$

致谢 感谢审稿人对本文修改提出的很好的建议.

参考文献

- 1 Wang Y. C-normality of groups and its properties. J Algebra, 1996, 78: 101–108
- 2 Hall P. Complemented groups. J Lond Math Soc, 1937, 12: 201–204
- 3 Huppert B. Endliche Gruppen I. New York: Springer-Verlag 1967
- 4 徐明曜. 有限群导引 (下册). 北京: 科学出版社, 1999
- 5 Ballester-Bolinches A, Wang Y M, Guo X Y. C-supplemented subgroups of finite groups. Glasg Math J, 2000, 42: 383–389
- 6 Joseph J R. An Introduction to Homological Algebra. New York-London: Academic Press Inc, 1979

Finite groups in which every subgroup is c-normal

LI CaiHeng, WANG YanMing, XIE ZhuoQing & SU Ning

Abstract In this paper, we study the structure of finite CN-groups, which are groups with every subgroup c-normal. We obtain the following results:

A group G is a CN-group if and only if each subgroup of G^ϵ is normal in G .

A group G is a CN-group if and only if the G is solvable and c-normality is transitive in G .

Let P be a p -group where p is a odd prime. Then P is a CN-group if and only if $\Phi(P) \leq Z(P)$.

We also get some criteria of CN-group in terms of direct product of CN-groups.

Keywords finite group, c-normal, transitive

MSC(2010) 20D10, 20D15

doi: 10.1360/012012-123