中国科学: 数学　2017 年　第 47 卷　第 1 期: 97～108
SCIENTIA SINICA　Mathematica
《中国科学》杂志社 SCIENCE CHINA PRESS

论　文

依状态切换的随机微分方程的几乎自守解

献给张芷芬教授 90 华诞

陈锋, 杨雪, 李勇*

东北师范大学数学与统计学院数学交叉科学中心, 长春 130024
E-mail: chenf101@nenu.edu.cn, yangxuemath@163.com, yongli@nenu.edu.cn

收稿日期: 2016-06-30; 接受日期: 2016-09-13; 网络出版日期: 2016-09-29; * 通信作者
国家自然科学基金 (批准号: 11301541, 11201173, 11171132 和 11571065)、国家重点基础研究发展计划 (批准号: 2013CB834100) 和中央高校基本科研业务费 (批准号: 2412015KJ002) 资助项目

摘要　本文研究依状态切换的随机微分方程解的一种好的常返性: 几乎自守性. 当该类随机微分方程的系数满足适当的条件时, 得到依分布几乎自守解的存在唯一性. 同时举例说明, 当随机微分方程的系数是几乎自守时, 方程可以没有二阶矩意义下的几乎自守解.

关键词　随机微分方程　依状态切换　分布　几乎自守解

MSC (2010) 主题分类　34C27, 60H10

1　引言

在确定系统中, Birkhoff [1] 引入回复运动 (recurrent motion) 来描述动力系统的基本演化行为. Bohr [2] 显式地构造了一类回复运动: 概周期运动. Bochner [3] 推广了概周期运动, 得到了一类更一般的回复运动: 几乎自守运动. 许多学者研究了几乎自守函数和微分方程的几乎自守解, 如文献 [4–9].

在概率论中, 人们也关心随机过程类似的回复性质. Kolmogorov 在研究 Markov 链时首次引入了常返性 (recurrence) 的概念. Harris [10] 研究了常返的 Markov 过程, 该随机过程被称为 Harris 常返的 Markov 过程. Maruyama 等 [11–13] 研究了时间连续的 Markov 过程的常返性. 在此基础上, 一个重要的问题是, 当随机微分方程的系数具有概周期性或几乎自守性时, 其是否有解也具有随机概周期性或几乎自守性. 许多学者研究了随机微分方程的概周期和伪概周期解, 参见文献 [14–18]. 现在有两种方式来定义随机微分方程解的概周期行为: 二阶矩意义下的概周期解和依分布概周期解. 最近, Mellah 和 Raynaud de Fitte [17] 通过举出反例证明了当随机微分方程的系数是概周期时, 方程没有二阶矩意义下概周期解. 所以只能研究随机微分方程分布意义下解的概周期行为. 更进一步, 他们在文献 [16] 中得到了随机微分方程的依分布概周期解. Liu 和 Wang [19] 利用 Favard 分离方法研究了随机微分方程依分布的概周期解.

Bedouhene 等 [20] 指出, Fu 和 Liu [21] 于 2010 年引入几乎自守过程以后, 许多学者研究了随机微分方程的几乎自守解, 但是只有很少的文献研究了依分布几乎自守解, 即文献 [22–24]. Fu 和 Chen [22,23]

英文引用格式: Chen F, Yang X, Li Y. Almost automorphic solutions for stochastic differential equations with state-dependent switching (in Chinese). Sci Sin Math, 2017, 47: 97–108, doi: 10.1360/N012016-00127

得到了随机微分方程的依分布几乎自守解. 更进一步, Liu 和 Sun [24] 得到了 Lévy 噪声驱动的随机微分方程的依分布几乎自守解. Bedouhene 等[20] 引入了依分布伪几乎自守的概念, 并得到了随机微分方程的依分布伪几乎自守解.

Griego 和 Hersh [25] 利用有限状态 Markov 链来模拟许多现实模型受到随机因素的影响. Hersh [26] 综述了多时间尺度 Markov 链. Hamilton 和 Susmel [27] 建立了依状态切换的 ARCH (autoregressive conditional heteroskedasticity) 模型. 该类模型是一个具有有限多个状态的随机微分系统, 其中不同状态之间的切换是由一个与系统状态相关的 Markov 链控制的, 它是金融数学中的一个基本模型, 可以用来模拟经济形势对有价证券价格的影响, 也可以模拟种群动力学和智能交通控制系统等实际问题. Yin 和 Zhu [28,29] 研究了依状态切换的随机微分方程的存在唯一性和稳定性. Bao 等[30,31] 研究了依状态切换随机偏微分方程解的动力学行为. 本文将研究该类随机切换系统依分布的几乎自守性. 由于该类随机微分方程的系数中含有连续时间 Markov 链, 使得这类随机微分方程的结构变得复杂, 因此, 证明几乎自守解的存在唯一性具有一定的复杂性.

本文的第 2 节将介绍随机几乎自守过程的定义; 第 3 节将给出本文的主要结果, 得到依状态切换的随机微分方程依分布的几乎自守解. 我们也举例说明, 当随机微分方程的系数是几乎自守时, 方程可以没有二阶矩意义下的几乎自守解. 因此, 研究依分布几乎自守解是恰当合理的.

2 预备知识

设 $\mathbb{H}$ 是一个实可分的 Hilbert 空间, 并且记 $(\Omega,\mathcal{F},(\mathcal{F}_t)_{t\geqslant 0},P)$ 为概率空间, $\mathcal{L}^2(P,\mathbb{H})$ 表示所有 $\mathbb{H}$-值使得 $\mathrm{E}\|x\|^2=\int_\Omega\|x\|^2dP<\infty$ 的随机变量. 设 $(U,\|\cdot\|_U)$ 为可分的 Hilbert 空间, $\mathbb{L}(U,\mathbb{H})$ 表示从 U 到 $\mathbb{H}$ 所有有界线性算子的空间.

定义 1 随机过程 $x(t):\mathbb{R}\to\mathcal{L}^2(P,\mathbb{H})$ 是 $\mathcal{L}^2$- 连续的, 如果对于所有的 $s\in\mathbb{R}$,

$$\lim_{t\to s}E\|x(t)-x(s)\|^2=0.$$

如果 $\sup_{t\in\mathbb{R}}E\|x(t)\|^2<\infty$, 则该随机过程 $\mathcal{L}^2$- 有界.

定义 2 $\mathcal{L}^2$- 连续随机过程 $x(t):\mathbb{R}\to\mathcal{L}^2(P,\mathbb{H})$ 是二阶矩意义下几乎自守的, 如果对于序列 $\{s_n'\}\subset\mathbb{R}$, 存在一个子列 $\{s_n\}\subset\{s_n'\}$ 和一个随机过程 $y(t):\mathbb{R}\to\mathcal{L}^2(P,\mathbb{H})$ 使得

$$\lim_{n\to\infty}E\|x(t+s_n)-y(t)\|^2=0,\quad \lim_{n\to\infty}E\|y(t-s_n)-x(t)\|^2=0$$

对于所有的 $t\in\mathbb{R}$ 都成立.

接下来将介绍依分布几乎自守过程的概念. 令 $(\mathbb{X},d)$ 是可分完备的度量空间, $\Pr(\mathbb{X})$ 是 $\mathbb{X}$ 上的 Borel 概率测度集. 记 $\mathcal{C}(\mathbb{R},\mathbb{X})$ 为从 $\mathbb{R}$ 到 $\mathbb{X}$ 的所有连续函数类, $\mathcal{C}_b(\mathbb{X})$ 表示范数为 $\|h\|_\infty:=\sup_{x\in\mathbb{X}}|h(x)|<\infty$ 的所有连续函数 $h:\mathbb{X}\to\mathbb{R}$ 的集合.

对于 $h\in\mathcal{C}_b(\mathbb{X})$, $\mu,\nu\in\Pr(\mathcal{C}(\mathbb{R},\mathbb{X}))$, 我们定义

$$\begin{aligned}
&\|h\|_L=\sup\left\{\frac{|h(x)-h(y)|}{d(x,y)};x,y\in\mathbb{X},x\neq y\right\},\\
&\|h\|_{BL}=\max\{\|h\|_\infty,\|h\|_L\},\\
&d_{BL}(\mu,\nu)=\sup_{\|h\|_{BL}\leqslant 1}\left|\int_{\mathbb{X}}hd(\mu-\nu)\right|.
\end{aligned}$$

d_{BL} 是 $\Pr(\mathbb{X})$ 上的完备度量空间, 它生成一个弱拓扑[18]. 对于随机变量 $x:(\Omega,\mathcal{F},P)\to\mathbb{X}$, 记 $\mu_x := P\circ x^{-1}$ 为其分布, $E(x)$ 为其期望, 其中 $P\circ x^{-1}(\Lambda)=P(\omega : x(\omega)\in\Lambda)$, $\Lambda\subset\mathbb{X}$ 是一个可测集合.

定义 3 一个 $\mathbb{H}$- 值的随机过程 x 称为依分布几乎自守的, 如果

$$t\to\mu_t := \mu(x(t)) : \mathbb{R}\to P(\mathbb{R},\mathbb{H})$$

是几乎自守的, 其中 $\mu(x(t)) := P\circ[x(t)]^{-1}$ 为在 P 下的分布.

等价地, 如果对于每个序列 $\{s_n'\}\subset\mathbb{R}$, 存在一个子序列 $\{s_n\}\subset\{s_n'\}$ 使得

$$\lim_{m\to\infty}\lim_{n\to\infty} d_{BL}(P\circ[x(t+s_n-s_m)]^{-1}, P\circ[x(t)]^{-1})=0,$$

则称 $x(t)$ 是依分布几乎自守的.

注 1 [20, 24] 由于对于一个随机变量的 L^2- 收敛可以推导出依分布收敛, 因此, 二阶矩意义下的几乎自守的随机过程是依分布意义下的几乎自守过程; 反之则不然.

3 依状态切换的随机微分方程的几乎自守解

考虑依状态切换的随机微分方程

$$dx(t)=Ax(t)dt+f(t,x(t),\alpha(t))dt+\gamma(t,x(t),\alpha(t))dW(t), \tag{3.1}$$

其中 A 是 $\mathcal{C}_0$- 半群 $(T(t)_{t\geqslant 0})$ 的无穷小生成元, 使得对于所有的 $t\geqslant 0$,

$$\|T(t)\|\leqslant K\mathrm{e}^{-\omega t}, \tag{3.2}$$

且 $K>0$, $\omega>0$, $\alpha(t)$ 是具有有限状态空间 $\mathbb{S}:=\{1,\ldots,m_0\}$ 的连续时间 Markov 链; $f:\mathbb{R}\times\mathbb{H}\times\mathbb{S}\to\mathbb{H}$ 和 $\gamma:\mathbb{R}\times\mathbb{H}\times\mathbb{S}\to\mathbb{L}(U,\mathbb{H})$ 是随机过程, 并且 $W(t)$ 是 U- 值 Brown 运动.

定义 4 $\mathcal{F}_t$- 可测随机过程 $\{x(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ 称为 (3.1) 的温和解, 如果随机积分方程

$$x(t)=T(t-a)x(a)+\int_a^t T(t-s)f(s,x(s),\alpha(s))ds+\int_a^t T(t-s)\gamma(s,x(s),\alpha(s))dW(s) \tag{3.3}$$

对于任意的 $t\geqslant a$ 和每一个 $a\in\mathbb{R}$ 都成立.

定理 1 假设对每一个 $x\in\mathcal{L}^2(P,\mathbb{H})$, f 和 γ 是关于 $t\in\mathbb{R}$ 的几乎自守函数. 假设 f 和 γ 满足 Lipschitz 条件, 即存在与 t 无关的常数 L 和 L', 对于所有的 $x,y\in\mathcal{L}^2(P,\mathbb{H})$ 和 $t\in\mathbb{R}$, $i\in\mathbb{S}$,

$$E\|f(t,x,i)-f(t,y,i)\|^2\leqslant LE\|x-y\|^2,$$
$$E\|\gamma(t,x,i)-\gamma(t,y,i)\|^2\leqslant L'E\|x-y\|^2,$$

则方程 (3.1) 存在唯一的 $\mathcal{L}^2$- 有界解, 只要

$$\frac{4K^2L}{\omega^2}+\frac{2K^2L'}{\omega}<1. \tag{3.4}$$

进一步, 该唯一的 $\mathcal{L}^2$- 有界解是依分布几乎自守的, 只要

$$\frac{6K^2L}{\omega^2}+\frac{6K^2L'}{\omega}<1. \tag{3.5}$$

我们需要下述引理来证明定理 1 (参见文献 [16, 引理 3.3]).

引理 1 (Gronwall 引理的变体) 设 $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 是一个连续的函数, 使得对每一个 $t\in\mathbb{R}$, 有

$$0\leqslant g(t)\leqslant \alpha(t)+\beta_1\int_{-\infty}^{t}\mathrm{e}^{-\delta_1(t-s)}g(s)ds+\cdots+\beta_n\int_{-\infty}^{t}\mathrm{e}^{-\delta_n(t-s)}g(s)ds, \tag{3.6}$$

其中 $\alpha:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 为局部可积的函数, $\beta_1,\ldots,\beta_n\geqslant 0$ 和 $\delta_1,\ldots,\delta_n>\beta$ 为常数, 并且 $\beta:=\sum_{i=1}^{n}\beta_i$. 假设不等式 (3.6) 的右端的积分是收敛的. 令 $\delta=\min_{1\leqslant i\leqslant n}\delta_i$, 则对使得 $\int_{-\infty}^{0}\mathrm{e}^{\gamma s}\alpha(s)ds$ 收敛的每一个 $\gamma\in(0,\delta-\beta)$, 我们有

$$g(t)\leqslant \alpha(t)+\beta\int_{-\infty}^{t}\mathrm{e}^{-\gamma(t-s)}\alpha(s)ds,\quad t\in\mathbb{R}.$$

特别地, 如果 $\alpha(t)$ 是常数, 那么有

$$g(t)\leqslant \alpha\frac{\delta}{\delta-\beta}.$$

定理 1 的证明 考虑随机过程

$$x(t)=\int_{-\infty}^{t}T(t-s)f(s,x(s),\alpha(s))ds+\int_{-\infty}^{t}T(t-s)\gamma(s,x(s),\alpha(s))dW(s), \tag{3.7}$$

它满足方程 (3.1), 则随机过程 (3.7) 是方程 (3.1) 的温和解.

第 1 步 $\mathcal{L}^2$- 有界解是 $\mathcal{L}^2$- 连续的. 利用 Liu 和 Sun 在文献 [24] 中的方法来证明本部分的结果. 设 $x(t)$ 是方程 (3.1) 的一个 $\mathcal{L}^2$- 有界解, 并且满足方程 (3.7). 对于 $t\geqslant t_0$, 根据 Cauchy-Schwarz 不等式和 Itô 等距公式, 有

$$\begin{aligned}E\|x(t)-x(t_0)\|^2&\leqslant 3E\|T(t-t_0)x(t_0)-x(t_0)\|^2+3E\bigg\|\int_{t_0}^{t}T(t-s)f(s,x(s),\alpha(s))ds\bigg\|^2\\&\quad+3E\bigg\|\int_{t_0}^{t}T(t-s)\gamma(s,x(s),\alpha(s))dW(s)\bigg\|^2\\&\leqslant 3E\|T(t-t_0)x(t_0)-x(t_0)\|^2+3M^2\mathrm{e}^{2\kappa(t-t_0)}\int_{t_0}^{t}ds\cdot\int_{t_0}^{t}E\|f(s,x(s),\alpha(s))\|^2ds\\&\quad+3M^2\mathrm{e}^{2\kappa(t-t_0)}\int_{t_0}^{t}E\|\gamma(s,x(s),\alpha(s))\|^2ds,\end{aligned}$$

其中 $M,\kappa>0$ 是常数. 由于 $T(\cdot)$ 是一个 $\mathcal{C}_0$- 半群, 则对于任意的 $x\in\mathbb{H}$, 当 $t\to t_0^{\pm}$ 时,

$$\|T(t-t_0)x-x\|\to 0.$$

由于 $\|T(t-t_0)-\mathrm{Id}\|^2E\|x(t_0)\|^2<\infty$, 其中 Id 是恒等映射, 并且利用 Lebesgue 控制收敛定理, 当 $t\to t_0^{\pm}$ 时, $E\|T(t-t_0)x(t_0)-x(t_0)\|^2\to 0$. 由于 f 和 γ 关于 x 和 α 满足 Lipschitz 条件, 关于 s 是二阶矩几乎自守的, 并且 $x(\cdot)$ 是 $\mathcal{L}^2$- 有界的, 因此有

$$\sup_{s\in\mathbb{R}}E\|f(s,x(s),\alpha(s))\|^2<\infty$$

和

$$\sup_{s\in\mathbb{R}}E\|\gamma(s,x(s),\alpha(s))\|^2<\infty.$$

从而, 当 $t \to t_0^{\pm}$ 时,

$$E\|x(t)-x(t_0)\|^2 \to 0.$$

于是, $x(t)$ 是 $\mathcal{L}^2$- 连续的.

第 2 步 $\mathcal{L}^2$- 有界解的存在唯一性. $\mathcal{C}_b(\mathbb{R},\mathcal{L}^2(P,\mathbb{H}))$ 记为所有 $\mathcal{L}^2$- 连续一致有界随机过程构成的 Banach 空间, 其范数为 $\|X\|_\infty^2=\sup_{t\in\mathbb{R}} E\|X(t)\|^2$. 对于所有的 $x(t)\in\mathcal{C}_b(\mathbb{R},\mathcal{L}^2(P,\mathbb{H}))$, 定义 Banach 空间 $\mathcal{C}_b(\mathbb{R},\mathcal{L}^2(P,\mathbb{H}))$ 上的算子 $\mathcal{S}$:

$$(\mathcal{S}x)(t)=\int_{-\infty}^t T(t-s)f(s,x(s),\alpha(s))ds+\int_{-\infty}^t T(t-s)\gamma(s,x(s),\alpha(s))dW(s).$$

显然, $\mathcal{S}x(\cdot)$ 是 $\mathcal{L}^2$- 连续的随机过程. 我们将证明 $\mathcal{S}(x)$ 是 $\mathcal{C}_b(\mathbb{R},\mathcal{L}^2(P,\mathbb{H}))$ 上的一个压缩映射. 对于 $x(t),y(t)\in\mathcal{C}_b(\mathbb{R},\mathcal{L}^2(P,\mathbb{H}))$ 和每一个 $t\in\mathbb{R}$, 有

$$\begin{aligned}
E\|(\mathcal{S}x)(t)-(\mathcal{S}y)(t)\|^2 &= E\bigg\|\int_{-\infty}^t T(t-s)[f(s,x(s),\alpha(s))-f(s,y(s),\tilde{\alpha}(s))]ds\\
&\quad+\int_{-\infty}^t T(t-s)[\gamma(s,x(s),\alpha(s))-\gamma(s,y(s),\tilde{\alpha}(s))]dW(s)\bigg\|^2\\
&\leqslant 2E\bigg\|\int_{-\infty}^t T(t-s)[f(s,x(s),\alpha(s))-f(s,y(s),\tilde{\alpha}(s))]ds\bigg\|^2\\
&\quad+2E\bigg\|\int_{-\infty}^t T(t-s)[\gamma(s,x(s),\alpha(s))-\gamma(s,y(s),\tilde{\alpha}(s))]dW(s)\bigg\|^2\\
&=: 2I_1+2I_2.
\end{aligned}\tag{3.8}$$

利用 Cauchy-Schwarz 不等式和 $T(t)$ 的指数耗散性, 可得

$$\begin{aligned}
I_1 &\leqslant 2E\bigg\|\int_{-\infty}^t T(t-s)[f(s,x(s),\alpha(s))-f(s,y(s),\alpha(s))]ds\bigg\|^2\\
&\quad+2E\bigg\|\int_{-\infty}^t T(t-s)[f(s,y(s),\alpha(s))-f(s,y(s),\tilde{\alpha}(s))]ds\bigg\|^2\\
&\leqslant 2K^2\bigg(\int_{-\infty}^t \mathrm{e}^{-\omega(t-s)}ds\bigg)\bigg(\int_{-\infty}^t \mathrm{e}^{-\omega(t-s)}E\|f(s,x(s),\alpha(s))-f(s,y(s),\alpha(s))\|^2ds\bigg)+I_{12}\\
&\leqslant 2K^2L\bigg(\int_{-\infty}^t \mathrm{e}^{-\omega(t-s)}ds\bigg)^2\sup_{t\in\mathbb{R}}E\|x(t)-y(t)\|^2+I_{12}\\
&\leqslant \frac{2K^2L}{\omega^2}\sup_{t\in\mathbb{R}}E\|x(t)-y(t)\|^2+I_{12}.
\end{aligned}\tag{3.9}$$

由于 f 中含有连续时间 Markov 链, 使得 I_{12} 的估计变得复杂, 下面将给出 I_{12} 的估计. 利用 Hölder 不等式, 可得

$$\begin{aligned}
I_{12} &\leqslant 2\int_{-\infty}^t T(t-s)dsE\int_{-\infty}^t T(t-s)\|f(s,y(s),\alpha(s))-f(s,y(s),\tilde{\alpha}(s))\|^2ds\\
&\leqslant \frac{2K^2}{\omega}C\sum_{k=-\infty}^{0}E\bigg(\int_{t_k}^{t_{k+1}}\mathrm{e}^{-\omega(t-s)}\|f(s,y(s),\alpha(s))-f(s,y(t_k),\alpha(s))\|^2ds\\
&\quad+\int_{t_k}^{t_{k+1}}\mathrm{e}^{-\omega(t-s)}\|f(s,y(t_k),\alpha(s))-f(s,y(t_k),\tilde{\alpha}(s))\|^2ds
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+\int_{t_k}^{t_{k+1}} \mathrm{e}^{-\omega(t-s)}\|f(s,y(t_k),\tilde{\alpha}(s))-f(s,y(s),\tilde{\alpha}(s))\|^2 ds\Big)\\
=:&\,\frac{2K^2}{\omega}C\sum_{k=-\infty}^{0}[I_{121}+I_{122}+I_{123}],
\end{aligned}\tag{3.10}
$$

其中 $t_{-\infty}=-\infty\leqslant\cdots\leqslant t_k\leqslant t_{k+1}\leqslant t_0=t$, 并且 $t_{k+1}-t_k=\eta$, 即我们考虑区间 $(-\infty,t]$ 上的均匀分割. 利用 Lipschitz 条件和文献 [28, 估计式 (3.7)], 我们有

$$
\begin{aligned}
I_{121}&\leqslant L\int_{t_k}^{t_{k+1}} \mathrm{e}^{-\omega(t-s)}E\|y(s)-y(t_k)\|^2 ds\\
&\leqslant L\int_{t_k}^{t_{k+1}} \mathrm{e}^{-\omega(t-s)}(s-t_k)ds\\
&\leqslant L\int_{t_k}^{t_{k+1}} \mathrm{e}^{-\omega(t-s)}\cdot\eta ds.
\end{aligned}\tag{3.11}
$$

同样地, 我们有

$$
I_{123}\leqslant C\int_{t_k}^{t_{k+1}} \mathrm{e}^{-\omega(t-s)}\cdot\eta ds.\tag{3.12}
$$

我们将仔细计算 I_{122} (参见文献 [28, 第 2419–2422 页]):

$$
\begin{aligned}
I_{122}\leqslant&\, CE\Big(\int_{t_k}^{t_{k+1}} \mathrm{e}^{-\omega(t-s)}\|f(s,y(t_k),\alpha(s))-f(s,y(t_k),\alpha(t_k))\|^2 ds\\
&+\int_{t_k}^{t_{k+1}} \mathrm{e}^{-\omega(t-s)}\|f(s,y(t_k),\alpha(t_k))-f(s,y(t_k),\tilde{\alpha}(s))\|^2 ds\Big)\\
=:&\,C(\tilde{I}_1+\tilde{I}_2).
\end{aligned}\tag{3.13}
$$

我们估计 $\tilde{I}_1$:

$$
\begin{aligned}
\tilde{I}_1&=E\sum_{i\in\mathbb{S}}\sum_{j\neq i}\int_{t_k}^{t_{k+1}} \mathrm{e}^{-\omega(t-s)}\|f(s,y(t_k),j)-f(s,y(t_k),i)\|^2\mathbf{1}_{\{\alpha(s)=j\}}\mathbf{1}_{\{\alpha(t_k)=i\}}ds\\
&\leqslant LE\sum_{i\in\mathbb{S}}\sum_{j\neq i}\int_{t_k}^{t_{k+1}} \mathrm{e}^{-\omega(t-s)}[1+|y(t_k)|^2]\mathbf{1}_{\{\alpha(t_k)=i\}}E[\mathbf{1}_{\{\alpha(s)=j\}}\mid y(t_k),\alpha(t_k)=i]ds\\
&\leqslant LE\sum_{i\in\mathbb{S}}\int_{t_k}^{t_{k+1}} \mathrm{e}^{-\omega(t-s)}[1+|y(t_k)|^2]\mathbf{1}_{\{\alpha(t_k)=i\}}\Big[\sum_{j\neq i}q_{ij}(y(t_k))(s-t_k)+o(s-t_k)\Big]ds\\
&\leqslant L\int_{t_k}^{t_{k+1}} \mathrm{e}^{-\omega(t-s)}O(\eta)ds,
\end{aligned}\tag{3.14}
$$

其中 $q_{ij}(y)$ 是依状态切换过程的生成元, 满足 q- 性质 (参见文献 [32]).

由下述估计 (参见文献 [28, 第 2420–2422 页]):

$$
\begin{aligned}
&E[\mathbf{1}_{\tilde{\alpha}(s)=j}\mid\tilde{\alpha}(t_k)=i_1,\alpha(t_k)=i,x(t_k),y(t_k)]\\
&\quad=\sum_{l\in\mathbb{S}}E[\mathbf{1}_{\tilde{\alpha}(s)=j},\mathbf{1}_{\alpha=l}\mid\tilde{\alpha}(t_k)=i_1,\alpha(t_k)=i,x(t_k),y(t_k)]\\
&\quad=\sum_{l\in\mathbb{S}}q(i_1,i)(j,l)(s-t_k)+o(s-t_k)=O(\eta),
\end{aligned}
$$

我们有

$$
\begin{aligned}
\tilde{I}_2 &= E\sum_{i\in\mathbb{S}}\sum_{j\neq i}\int_{t_k}^{t_{k+1}} \mathrm{e}^{-\omega(t-s)}\|f(s,y(t_k),j)-f(s,y(t_k),i)\|^2[\mathbf{1}_{\{\tilde{\alpha}(s)=j\}}\mathbf{1}_{\{\alpha(t_k)=i\}}ds \\
&\leqslant LE\sum_{i\in\mathbb{S}}\sum_{j\neq i}\int_{t_k}^{t_{k+1}} \mathrm{e}^{-\omega(t-s)}[1+|y(t_k)|^2]\mathbf{1}_{\{\alpha(t_k)=i\}}\mathbf{1}_{\{\tilde{\alpha}(t_k)=i_1\}} \\
&\quad\times E[\mathbf{1}_{\tilde{\alpha}(s)=j}\mid \tilde{\alpha}(t_k)=i_1,\alpha(t_k)=i,x(t_k),y(t_k)]ds \\
&\leqslant L\int_{t_k}^{t_{k+1}} \mathrm{e}^{-\omega(t-s)}O(\eta)ds. \qquad (3.15)
\end{aligned}
$$

由 (3.10)–(3.15), 如果 $\eta\to 0$, 则

$$
I_{12}\leqslant C\int_{-\infty}^{t}\mathrm{e}^{-\omega(t-s)}\eta ds=\frac{C\eta}{\omega}\to 0. \qquad (3.16)
$$

利用 (3.9) 和 (3.16), 我们得到

$$
I_1\leqslant \frac{2K^2L}{\omega^2}\sup_{t\in\mathbb{R}}E\|x(t)-y(t)\|^2. \qquad (3.17)
$$

由 (3.2), 有

$$
\begin{aligned}
I_2 &= E\bigg\|\int_{-\infty}^{t}T(t-s)[\gamma(s,x(s),\alpha(s))-\gamma(s,y(s),\tilde{\alpha}(s))]dW(s)\bigg\|^2 \\
&\leqslant K^2E\int_{-\infty}^{t}\mathrm{e}^{-2\omega(t-s)}\|\gamma(s,x(s),\alpha(s))-\gamma(s,y(s),\tilde{\alpha}(s))\|^2ds.
\end{aligned}
$$

类似于 I_1 的计算, 可得

$$
I_2\leqslant \frac{K^2L}{\omega}\sup_{t\in\mathbb{R}}E\|x(t)-y(t)\|^2, \qquad (3.18)
$$

则对每一个 $t\in\mathbb{R}$, 我们有

$$
E\|(\mathcal{S}x)(t)-(\mathcal{S}y)(t)\|^2\leqslant\left(\frac{4K^2L}{\omega^2}+\frac{2K^2L}{\omega}\right)\sup_{t\in\mathbb{R}}E\|x(t)-y(t)\|^2. \qquad (3.19)
$$

由于 $\frac{4K^2L}{\omega^2}+\frac{2K^2L}{\omega}<1$, $\mathcal{S}$ 是 $\mathcal{C}_b(\mathbb{R},\mathcal{L}^2(P,\mathbb{H}))$ 上的一个压缩映射. 因此, $\mathcal{S}$ 有唯一的不动点 $x_*(t,\omega)$, 即方程 (3.7) 存在唯一有界的温和解.

第 3 步 $\mathcal{L}^2$- 有界解的几乎自守性. 令 $\{s'_n\}$ 是任意的实数系列. 由于 f 和 γ 是二阶矩意义下几乎自守的, 则存在 $\{s'_n\}$ 的一个子列 $\{s_n\}$ 及函数 $\tilde{f}$ 和 $\tilde{\gamma}$, 使得对每一个 $t\in\mathbb{R}$, $x\in\mathcal{L}^2(P,\mathbb{H})$ 和 $i\in\mathbb{S}$, 下述关系式成立:

$$
\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty}E\|f(t+s_n,x,i)-\tilde{f}(t,x,i)\|^2=0, \\
&\lim_{n\to\infty}E\|f(t-s_n,x,i)-\tilde{f}(t,x,i)\|^2=0, \\
&\lim_{n\to\infty}E\|\gamma(t+s_n,x,i)-\tilde{\gamma}(t,x,i)\|^2=0, \\
&\lim_{n\to\infty}E\|\gamma(t-s_n,x,i)-\tilde{\gamma}(t,x,i)\|^2=0.
\end{aligned}
$$

令 $\tilde{x}(\cdot)$ 满足积分方程

$$\tilde{x}(t)=\int_{-\infty}^{t}T(t-s)\tilde{f}(s,\tilde{x}(s),\tilde{\alpha}(s))ds+\int_{-\infty}^{t}T(t-s)\tilde{\gamma}(s,\tilde{x}(s),\tilde{\alpha}(s))dW(s).$$

利用变量替换 $\sigma-s_n=s$, 随机过程

$$x(t+s_n)=\int_{-\infty}^{t+s_n}T(t+s_n-s)f(s,x(s),\alpha(s))ds+\int_{-\infty}^{t+s_n}T(t+s_n-s)\gamma(s,x(s),\alpha(s))dW(s)$$

变化为

$$\begin{aligned}x(t+s_n)=&\int_{-\infty}^{t}T(t-s)f(s+s_n,x(s+s_n),\alpha(s+s_n))ds\\&+\int_{-\infty}^{t}T(t-s)\gamma(s+s_n,x(s+s_n),\alpha(s+s_n))d\tilde{W}_n(s),\end{aligned}$$

其中 $\tilde{W}_n(s)=W(s+s_n)-W(s_n)$ 是与 $W(s)$ 具有相同分布的 Brown 运动.

类似于文献 [16] 中的方法, 考虑随机过程 x_n 满足积分方程

$$x_n(t)=\int_{-\infty}^{t}T(t-s)f(s+s_n,x_n(s),\alpha(s))ds+\int_{-\infty}^{t}T(t-s)\gamma(s+s_n,x_n(s),\alpha(s))dW(s).$$

注意到对每一个 $t\in\mathbb{R}$, $x(t+s_n)$ 和 $x_n(t)$ 具有相同的分布.

我们将证明对每一个固定的 $t\in\mathbb{R}$, $x_n(t)$ 二阶矩意义下收敛到 $\tilde{x}(t)$. 我们有

$$\begin{aligned}E\|x_n(t)-\tilde{x}(t)\|^2\leqslant&\,2E\bigg\|\int_{-\infty}^{t}T(t-s)[f(s+s_n,x_n(s),\alpha(s))-\tilde{f}(s,\tilde{x}(s),\tilde{\alpha}(s))]ds\bigg\|^2\\&+2E\bigg\|\int_{-\infty}^{t}T(t-s)[\gamma(s+s_n,x_n(s),\alpha(s))-\tilde{\gamma}(s,\tilde{x}(s),\tilde{\alpha}(s))]dW(s)\bigg\|^2\\\leqslant&\,6E\bigg\|\int_{-\infty}^{t}T(t-s)[f(s+s_n,x_n(s),\alpha(s))-f(s+s_n,\tilde{x}(s),\alpha(s))]ds\bigg\|^2\\&+6E\bigg\|\int_{-\infty}^{t}T(t-s)[f(s+s_n,\tilde{x}(s),\alpha(s))-f(s+s_n,\tilde{x}(s),\tilde{\alpha}(s))]ds\bigg\|^2\\&+6E\bigg\|\int_{-\infty}^{t}T(t-s)[f(s+s_n,\tilde{x}(s),\tilde{\alpha}(s))-\tilde{f}(s,\tilde{x}(s),\tilde{\alpha}(s))]ds\bigg\|^2\\&+6E\bigg\|\int_{-\infty}^{t}T(t-s)[\gamma(s+s_n,x_n(s),\alpha(s))-\gamma(s+s_n,\tilde{x}(s),\alpha(s))]dW(s)\bigg\|^2\\&+6E\bigg\|\int_{-\infty}^{t}T(t-s)[\gamma(s+s_n,\tilde{x}(s),\alpha(s))-\gamma(s+s_n,\tilde{x}(s),\tilde{\alpha}(s))]dW(s)\bigg\|^2\\&+6E\bigg\|\int_{-\infty}^{t}T(t-s)[\gamma(s,\tilde{x}(s+s_n),\tilde{\alpha}(s))-\tilde{\gamma}(s,\tilde{x}(s),\tilde{\alpha}(s))]dW(s)\bigg\|^2\\=&\sum_{i=1}^{6}\bar{I}_i.\end{aligned}$$

利用 Cauchy-Schwarz 不等式,

$$\bar{I}_1=6E\bigg\|\int_{-\infty}^{t}T(t-s)[f(s+s_n,x_n(s),\alpha(s))-f(s+s_n,\tilde{x}(s),\alpha(s))]ds\bigg\|^2$$

$$
\begin{aligned}
&\leqslant 6K^2E\bigg(\int_{-\infty}^{t}\mathrm{e}^{-\omega(t-s)}\|f(s+s_n,x_n(s),\alpha(s))-f(s+s_n,\tilde{x}(s),\alpha(s))\|ds\bigg)^2\\
&\leqslant 6K^2\bigg(\int_{-\infty}^{t}\mathrm{e}^{-\omega(t-s)}ds\bigg)E\bigg(\int_{-\infty}^{t}\mathrm{e}^{-\omega(t-s)}\|f(s+s_n,x_n(s),\alpha(s))-f(s+s_n,\tilde{x}(s),\alpha(s))\|^2ds\bigg)\\
&\leqslant 6K^2L\bigg(\int_{-\infty}^{t}\mathrm{e}^{-\omega(t-s)}ds\bigg)\int_{-\infty}^{t}\mathrm{e}^{-\omega(t-s)}E\|x_n(s)-\tilde{x}(s)\|^2ds\\
&\leqslant \frac{6K^2L}{\omega}\int_{-\infty}^{t}\mathrm{e}^{-\omega(t-s)}E\|x_n(s)-\tilde{x}(s)\|^2ds,
\end{aligned}
$$

则

$$
\begin{aligned}
\bar{I}_3&=6E\bigg\|\int_{-\infty}^{t}T(t-s)[f(s+s_n,\tilde{x}(s),\tilde{\alpha}(s))-\tilde{f}(s,\tilde{x}(s),\tilde{\alpha}(s))]ds\bigg\|^2\\
&\leqslant 6K^2E\bigg(\int_{-\infty}^{t}\mathrm{e}^{-\omega(t-s)}\|f(s+s_n,\tilde{x}(s),\tilde{\alpha}(s))-\tilde{f}(s,\tilde{x}(s),\tilde{\alpha}(s))\|ds\bigg)^2\\
&\leqslant 6K^2\bigg(\int_{-\infty}^{t}\mathrm{e}^{-\omega(t-s)}ds\bigg)E\bigg(\int_{-\infty}^{t}\mathrm{e}^{-\omega(t-s)}\|f(s+s_n,\tilde{x}(s),\tilde{\alpha}(s))-\tilde{f}(s,\tilde{x}(s),\tilde{\alpha}(s))\|^2ds\bigg)\\
&\leqslant 6K^2\bigg(\int_{-\infty}^{t}\mathrm{e}^{-\omega(t-s)}ds\bigg)^2\sup_{s\in\mathbb{R}}\|f(s+s_n,\tilde{x}(s),\tilde{\alpha}(s))-\tilde{f}(s,\tilde{x}(s),\tilde{\alpha}(s))\|^2\\
&\leqslant \frac{6K^2}{\omega^2}\sup_{s\in\mathbb{R}}\|f(s+s_n,\tilde{x}(s),\tilde{\alpha}(s))-f(s,\tilde{x}(s),\tilde{\alpha}(s))\|^2.
\end{aligned}
$$

由于 f 关于 t 是几乎自守函数, 并且 $E\|\tilde{x}(t)\|^2<\infty$, 则当 $n\to\infty$ 时, $\bar{I}_3\to 0$.

利用与 (3.16) 相同的计算, 我们有

$$\bar{I}_2\to 0.$$

同理,

$$
\begin{aligned}
\bar{I}_4&=6E\bigg\|\int_{-\infty}^{t}T(t-s)[\gamma(s+s_n,x_n(s),\alpha(s))-\gamma(s+s_n,\tilde{x}(s),\alpha(s))]dW(s)\bigg\|^2\\
&\leqslant 6K^2L'\int_{-\infty}^{t}\mathrm{e}^{-2\omega(t-s)}E\|x_n(s)-\tilde{x}(s)\|^2ds,
\end{aligned}
$$

并且

$$
\begin{aligned}
\bar{I}_6&=6E\bigg\|\int_{-\infty}^{t}T(t-s)[\gamma(s+s_n,\tilde{x}(s),\tilde{\alpha}(s))-\tilde{\gamma}(s,\tilde{x}(s),\tilde{\alpha}(s))]dW(s)\bigg\|^2\\
&\leqslant \frac{3K^2}{\omega}\sup_{s\in\mathbb{R}}\|\gamma(s+s_n,\tilde{x}(s),\tilde{\alpha}(s))-\tilde{\gamma}(s,\tilde{x}(s),\tilde{\alpha}(s))\|^2ds.
\end{aligned}
$$

与 $\bar{I}_2$ 和 $\bar{I}_3$ 的估计类似, 当 $n\to\infty$ 时, 可以得到 $\bar{I}_5\to 0$, $\bar{I}_6\to 0$. 因此有

$$
\begin{aligned}
E\|x_n(t)-\tilde{x}(t)\|^2\leqslant{}&\alpha_n+\frac{6K^2L}{\omega}\int_{-\infty}^{t}\mathrm{e}^{-\omega(t-s)}E\|x_n(s)-\tilde{x}(s)\|^2ds\\
&+6K^2L'\int_{-\infty}^{t}\mathrm{e}^{-2\omega(t-s)}E\|x_n(s)-\tilde{x}(s)\|^2ds,
\end{aligned}
$$

其中 α_n 是数列且 $\lim_{n\to\infty}\alpha_n=0$. 由引理 1 和 $\frac{6K^2L}{\omega^2}+\frac{6K^2L'}{\omega}<1$, 则有下述结论: 对每一个 $t\in\mathbb{R}$,

$$E\|x_n(t)-\tilde{x}(t)\|^2\to 0,\quad n\to\infty.$$

由于 $x(t+s_n)$ 和 $x_n(t)$ 有相同的分布, 则对每一个 $t\in\mathbb{R}$, 当 $n\to\infty$ 时, $x(t+s_n)\xrightarrow{d}\tilde{x}(t)$, 其中 $\xrightarrow{d}$ 表示为依分布收敛. 类似地, 对每一个 $t\in\mathbb{R}$, 当 $n\to\infty$ 时, $\tilde{x}(t-s_n)\xrightarrow{d}x(t)$. 证毕. □

文献 [17] 给出了系数是概周期的随机微分方程存在二阶矩意义下概周期解的几个反例. 因此随机微分方程不能研究二阶矩意义下的几乎自守解. 所以只能研究随机微分方程依分布的几乎自守解. 我们将给出简单的例子来阐明这个事实.

考虑方程

$$dx(t)=-\alpha x(t)dt+\beta dW(t), \tag{3.20}$$

其中 $W(t)$ 为标准 Brown 运动, 则方程 (3.20) 的唯一 $\mathcal{L}^2$- 有界解满足下述积分方程:

$$x(t)=\int_{-\infty}^{t}\mathrm{e}^{-\alpha(t-s)}\beta dW(s).$$

如果方程 (3.20) 存在一个二阶矩意义下的几乎自守解, 则对于每个序列 $\{s_n'\}\subset\mathbb{R}$, 存在一个子序列 $\{s_n\}\subset\{s_n'\}$ 使得

$$\lim_{m\to\infty}\lim_{n\to\infty}E\|x(t+s_n-s_m)-x(t)\|^2=0.$$

然而,

$$\begin{aligned}
&E\bigg\|\int_{-\infty}^{t+s_n-s_m}\mathrm{e}^{-\alpha(t+s_n-s_m-s)}\beta dW(s)-\int_{-\infty}^{t}\mathrm{e}^{-\alpha(t-s)}\beta dW(s)\bigg\|^2\\
&=E\bigg\|(\mathrm{e}^{-\alpha(s_n-s_m)}-1)\int_{-\infty}^{t}\mathrm{e}^{-\alpha(t-s)}\beta dW(s)+\int_{t}^{t+s_n-s_m}\mathrm{e}^{-\alpha(t+s_n-s_m-s)}\beta dW(s)\bigg\|^2\\
&=\frac{\beta^2}{\alpha}(1-\mathrm{e}^{-\alpha(s_n-s_m)})\nrightarrow 0,
\end{aligned}$$

这说明 (3.20) 没有二阶矩意义下的几乎自守解. 注意到

$$x(t+s_n-s_m)=\int_{-\infty}^{t+s_n-s_m}\mathrm{e}^{-\alpha(t+s_n-s_m-s)}\beta dW(s)=\int_{-\infty}^{t}\mathrm{e}^{-\alpha(t-s)}\beta d\hat{W}(s)$$

与 $x(t)=\int_{-\infty}^{t}\mathrm{e}^{-\alpha(t-s)}\beta dW(s)$ 有相同的分布, 其中

$$\hat{W}(s)=W(s+s_n-s_m)-W(s_n-s_m),$$

则方程 (3.20) 有唯一的依分布几乎自守解.

致谢 衷心感谢审稿人提出的宝贵意见.

参考文献

1 Birkhoff G D. Dynamical Systems. With an Addendum by Jurgen Moser. American Mathematical Society Colloquium Publications, vol. 9. Providence: Amer Math Soc, 1966

2 Bohr H. Zur theorie der fast periodischen funktionen, I: Eine verallgemeinerung der theorie der fourierreihen. Acta Math, 1925, 45: 29–127

3 Bochner S. Curvature and Betti numbers in real and complex vector bundles. Rend Semin Mat Univ Politec Torino, 1955–1956, 15: 225–253

4 N'Guérékata G M. Almost Automorphic and Almost Periodic Functions in Abstract Spaces. New York: Kluwer Academic/Plenum Publishers, 2001

5 N'Guérékata G M. Existence and uniqueness of almost automorphic mild solutions to some semilinear abstract differential equations. Semigroup Forum, 2004, 69: 80–86

6 N'Guérékata G M. Topics in Almost Automorphy. New York: Springer, 2005

7 Johnson R. A linear, almost periodic equation with an almost automorphic solution. Proc Amer Math Soc, 1981, 82: 199–205

8 Shen W, Yi Y. Almost Automorphic and Almost Periodic Dynamics in Skew-Product Semiflows. Providence: Amer Math Soc, 1998

9 Veech W A. Almost automorphic functions on groups. Amer J Math, 1965, 87: 719–751

10 Harris T E. The existence of stationary measures for certain Markov processes. In: Proceedings of the Third Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability, vol. 2. Berkeley/Los Angeles: University of California Press, 1956, 113–124

11 Khasminskii R Z. Ergodic properties of recurrent diffusion processes and stabilization of the solution to the Cauchy problem for parabolic equations. Theory Probab Appl, 1960, 5: 179–195

12 Maruyama G, Tanaka H. Ergodic property of N-dimensional recurrent Markov processes. Mem Fac Sci Kyushu Univ Ser A, 1959, 13: 157–172

13 Meyn S P, Tweedie R L. Stability of Markovian processes, II: Continuous-time processes and sampled chains. Adv Appl Probab, 1993, 25: 487–517

14 Arnold L, Tudor C. Stationary and almost periodic solutions of almost periodic affine stochastic differential equations. Stochastics, 1998, 64: 177–193

15 Da Prato G, Tudor C. Periodic and almost periodic solutions for semilinear stochastic equations. Stoch Anal Appl, 1995, 13: 13–33

16 Kamenskii M, Mellah O, Raynaud de Fitte P. Weak averaging of semilinear stochastic differential equations with almost periodic coefficients. J Math Anal Appl, 2015, 427: 336–364

17 Mellah O, de Fitte P R. Counterexample to mean square almost periodicity of the solutions of some SDEs with almost periodic coefficients. Electron J Differential Equations, 2013, 91: 1–7

18 Morozan T, Tudor C. Almost periodic solutions of affine Itô equations. Stoch Anal Appl, 1989, 7: 451–474

19 Liu Z, Wang W. Favard separation method for almost periodic stochastic differential equations. J Differential Equations, 2016, 260: 8109–8136

20 Bedouhene F, Challali N, Mellah O, et al. Almost automorphy and various extensions for stochastic processes. J Math Anal Appl, 2015, 429: 1113–1152

21 Fu M, Liu Z. Square-mean almost automorphic solutions for some stochastic differential equations. Proc Amer Math Soc, 2010, 138: 3689–3701

22 Fu M. Almost automorphic solutions for nonautonomous stochastic differential equations. J Math Anal Appl, 2012, 393: 231–238

23 Fu M, Chen F. Almost automorphic solutions for some stochastic differential equations. Nonlinear Anal, 2013, 80: 66–75

24 Liu Z, Sun K. Almost automorphic solutions for stochastic differential equations driven by Lévy noise. J Funct Anal, 2014, 266: 1115–1149

25 Griego R J, Hersh R. Random evolutions, Markov chains, and systems of partial differential equations. Proc Natl Acad Sci USA, 1969, 62: 305–308

26 Hersh R. Random evolutions: A survey of results and problems. Rocky Mountain J Math, 1974, 4: 443–477

27 Hamilton J D, Susmel R. Autoregressive conditional heteroskedasticity and changes in regime. J Econometrics, 1994, 64: 307–333

28 Yin G, Zhu C. Properties of solutions of stochastic differential equations with continuous-state-dependent switching. J Differential Equations, 2010, 249: 2409–2439

29 Zhu C, Yin G. On strong Feller, recurrence, and weak stabilization of regime-switching diffusions. SIAM J Control Optim, 2009, 48: 2003–2031

30 Bao J, Yin G, Yuan C. Two-time-scale stochastic partial differential equations driven by α-stable noises: Averaging Principles. Bernoulli, in press

31 Bao J, Mao X, Yuan C. Lyapunov exponents of hybrid stochastic heat equations. Systems Control Lett, 2012, 61: 165–172

32 Yin G, Zhang Q. Continuous-Time Markov Chains and Applications: A Singular Perturbation Approach. New York: Springer-Verlag, 1998

Almost automorphic solutions for stochastic differential equations with state-dependent switching

CHEN Feng, YANG Xue & LI Yong

Abstract This paper concerns a kind of reccurence: Almost automorphy for stochastic differential equations with state-dependent switching. The existence and uniqueness of almost automorphic solutions in distribution are established provided the coefficients satisfy some suitable conditions. We also give an example to illustrate that a stochastic differential equation with almost automorphic coefficients might have no square-mean almost automorphic solution.

Keywords **stochastic differential equations, state-dependent switching, distribution, almost automorphic solutions**

MSC(2010) **34C27, 60H10**

doi: 10.1360/N012016-00127