中 国 科 学

1985 年 2 月 A 辑 第 2 期

对称群表示的既约分解

石 赫

(中国科学院系统科学研究所，北京)

摘 要

S_n 是 n 个文字的对称群，T^d 为 $\boldsymbol{C}[x_1, x_2, \cdots, x_n]$ 中 d 次齐式所成的子空间. T^d 做为 S_n 模所确定的 S_n 的表示记为 ρ^d. $\pi(\alpha)$ 为与分析 α 相对应的既约表示. 记 N_α^d 为 $\pi(\alpha)$ 进入 ρ^d 的重数. 做为文献 [1] 的继续，本文简化了幂级数 $\sum_d N_\alpha^d t^d$ 所满足的递推公式，并具体求出了母函数 $F_\alpha(t) = \sum_d N_\alpha^d t^d$ 的表达式.

设 S_n 为 n 个文字的对称群，$\alpha = ((n)^{k_n}, (n-1)^{k_{n-1}}, \cdots, (1)^{k_1})$，$\sum_i k_i \cdot i = n$，为 n 的一个分析. 对称群表示的经典事实是: S_n 的既约表示由 n 的分析所确定. 今后我们把分析 α 所确定的既约表示记为 $\pi(\alpha)$.

记 $T = \boldsymbol{C}[x_1, x_2, \cdots, x_n]$ 为复数域 $\boldsymbol{C}$ 上的多项式环. 对于 $\omega \in S_n$，$f \in T$，定义算子

$$\omega f(x) = f(\omega^{-1} x), \tag{1}$$

则 T 是 S_n 模. 记 T^d 为 T 中全体 d 次齐式所成子空间，则 T^d 亦为 S_n 模. T^d 中全体 S_n 不变的齐式所成子空间记为 I^d. 它的维数 $\dim I^d$，即线性无关的、S_n 下不变的 d 次齐式的个数由 Molien 公式(见文献 [2]) 和 Chevalley 定理(见文献 [3]) 给出:

$$\frac{1}{n!} \sum_{\omega \in S_n} \frac{1}{\det(I - tW)} = \sum_{d=0}^{\infty} (\dim I^d) t^d = \prod_{i=1}^{n-1} \frac{1}{(1 - t^{i+1})}, \tag{2}$$

其中 I 为 n 阶单位方阵，W 为 $\omega \in S_n$ 所对应的置换矩阵.

如果从群表示的角度来考察 (2) 式，则其意义为: T^d 作为 S_n 模，由 (1) 式所给出的 S_n 的表示一般不是既约的，因此它可以分解成既约表示之和. 而每一恒等表示显然对应着 I^d 中的一个元素. 因此 Molien 公式实际上给出了恒等表示进入由 T^d 所决定的表示，记为 ρ^d，的重数.

由此观察出发，钟家庆[1]对 (2) 式进行了下述推广: 将 T^d 看成 S_n 的表示空间，对于任给分析 α，既约表示 $\pi(\alpha)$ 进入以上表示 ρ^d 的重数记为 N_α^d，则 N_α^d 的计算有赖于形式幂级数 $\sum_d N_\alpha^d t^d$ 的计算. 我们将此形式幂级数记为

本文 1983 年 9 月 24 日收到.

$$F_\alpha(t) \equiv \sum_d N_\alpha^d t^d,$$

文献 [1] 中主要结果之一是证明了(文献 [1] 定理 5)

$$F_\alpha(t) = \frac{1}{n!}\sum_{\omega\in S_n}\frac{\chi_\alpha(\omega)}{\det(I - tW)}, \tag{3}$$

其中 χ_α 为 $\pi(\alpha)$ 的特征.

鉴于 $\boldsymbol{C}[x_1, x_2, \cdots, x_n] = \oplus T^d$ 是 S_n 的最重要的表示空间,因而具体算出完全确定了其既约分解的这一母函数 $F_\alpha(t)$ 自然是有意义的.

为此目的,文献 [1] 的另一主要结果是给出了计算 $F_\alpha(t)$ 的递推公式(见文献 [1],定理 6). 并利用此递推公式求得一些特殊情况的母函数,例如:

$$F_{(n,0,\cdots,0)}(t) = \frac{1}{(1-t^2)(1-t^3)\cdots(1-t^n)},$$

$$F_{(1,1,\cdots,1)}(t) = \frac{t^{\frac{1}{2}n(n-1)}}{(1-t^2)(1-t^3)\cdots(1-t^n)},$$

以及 $F_{(n-1,1,0,\cdots,0)}(t)$, $F_{(n-k,k,0,\cdots,0)}(t)$ 等,其中 $F_{(n,0,\cdots,0)}(t)$ 的结果实际上就是 Molien 公式. 但是,如何对一般的 α 给出其统一的公式,则仍是一个尚待回答的问题.

本文从此递推公式出发 (即第一节中的公式 (z)), 加以变化, 使之成为便于应用的形式 (即第一节中的公式 (1.10)), 对一般的既约表示 $\pi(\alpha)$ 具体求出了母函数 $F_\alpha(t)$ (即第三节中的基本公式),这是本文的主要结果.

须要强调指出的是,在计算过程中,所谓勾形 (Hook) 函数 $\langle m, (1)^k\rangle$ 起着重要作用.联系到“Hook”在对称群表示的近代理论中所扮演的角色重要而又有若干神秘, 这一事实是颇为耐人寻味的.

一、符号和递推公式

我们沿用文献 [1] 中的符号: $\langle k\rangle \equiv \prod_{i=2}^{k}\frac{1}{(1-t^i)}$, $k \geqslant 2$; $\langle 1\rangle \equiv 1$, $\langle 0\rangle \equiv 1 - t$, 并且记

$$\Lambda_n = \begin{pmatrix} \lambda_0 & \lambda_1 & \cdots\cdots & \lambda_n \\ & \lambda_0 & \lambda_1 \cdots & \lambda_{n-1} \\ & & \ddots & \vdots \\ 0 & & & \lambda_1 \\ & & & \lambda_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle 0\rangle & \langle 1\rangle & \cdots\cdots & \langle n\rangle \\ & \langle 0\rangle & \langle 1\rangle \cdots & \langle n-1\rangle \\ & & \ddots & \vdots \\ 0 & & & \langle 1\rangle \\ & & & \langle 0\rangle \end{pmatrix}^{-1}. \tag{1.1}$$

如果把分拆 α 记为

$$\alpha = (m_1, m_2, \cdots, m_\nu), \quad \sum_{i=1}^{\nu} m_i = n, \quad m_i \geqslant m_{i+1},$$

并把与 α 相应的母函数记为 $F_\alpha(t) \equiv \langle m_1, m_2, \cdots, m_\nu\rangle$, 则母函数满足如下的递推公式 (见文献 [4], 定理 6).

$$\langle m_1, m_2, \cdots, m_\nu\rangle = (\langle m_1\rangle, \langle m_1+1\rangle, \cdots, \langle m_1+\nu-1\rangle)\cdot\Lambda_{\nu-1}\cdot L_\nu(\alpha), \tag{z}$$

其中 $L_\nu(\alpha)$ 为列向量

$$L_\nu(\alpha)=\begin{pmatrix}\langle 0, \quad m_2,\cdots,m_\nu\rangle\\ \langle -1,m_2,\cdots,m_\nu\rangle\\ \vdots\\ \langle -\nu+1,m_2,\cdots,m_\nu\rangle\end{pmatrix},$$

这里我们采用如下的符号规定：当 $m_i<m_{i+1}$ 时，则

$$\langle m_1,\cdots,m_i,m_{i+1},\cdots,m_\nu\rangle=-\langle m_1,\cdots,m_{i+1}-1,m_i+1,\cdots,m_\nu\rangle. \tag{1.2}$$

若换到最后一位的数字仍为负的时，该母函数为零．为简化这一递推公式 (z)，首先计算Λ_n.

引理 1.1. 设 Λ_n 由 (1.1) 式给出，λ_n 为 Λ_n 中元素，则有

$$\lambda_n=(-1)^n\frac{1}{\langle 0\rangle^2}\cdot A(n),\ n=1,2,\cdots, \tag{1.3}$$

其中

$$A(n)=\mathscr{F}_{(1,1,\cdots,1)}(t)\equiv\frac{t^{\frac{1}{2}n(n-1)}}{(1-t^2)(1-t^3)\cdots(1-t^n)}.$$

证．根据 Λ_n 的定义可知，

$$\lambda_n\langle 0\rangle+\lambda_{n-1}\langle 1\rangle+\cdots+\lambda_0\langle n\rangle=0. \tag{1.4}$$

另一方面，由公式(z)知，

$$A(n)=(\langle 1\rangle,\langle 2\rangle,\cdots,\langle n\rangle)\cdot\Lambda_{n-1}\cdot L_n((1)^n).$$

但由 (1.2) 式知，$L_n((1)^n)$ 内只有 $\langle -n+1,(1)^{n-1}\rangle=(-1)^{n-1}\langle 0\rangle$，其余各项均为零，故有，

$$A(n)=(-1)^{n-1}\langle 0\rangle\{\lambda_{n-1}\langle 1\rangle+\lambda_{n-2}\langle 2\rangle+\cdots+\lambda_0\langle n\rangle\}, \tag{1.5}$$

代入 (1.4) 式得到

$$A(n)=(-1)^n\langle 0\rangle^2\cdot\lambda_n.$$

引理 1.1 证毕．

形如 $(m,(1)^k)$ 的分拆，$m\geqslant 1$，$k\geqslant 1$ 称为勾形分拆，简称为勾股（见文献 [4]）．我们称相应于勾股的母函数为勾形函数．根据公式 (z)，对勾形函数有

$$\langle m,(1)^k\rangle=(\langle m\rangle,\langle m+1\rangle,\langle m+k\rangle)\Lambda_k L_{k+1}((m,(1)^k)).$$

但是，$L_{k+1}((m,(1)^k))$ 中只有最后一项为 $(-1)^k<0\rangle$，其余各项均为零．所以

$$\langle m,(1)^k\rangle=(-1)^k\langle 0\rangle\{\lambda_0\langle m+k\rangle+\lambda_1\langle m+k-1\rangle+\cdots+\lambda_k\langle m\rangle\},\quad k=12,\cdots. \tag{1.6}$$

然而这恰好是 $(\langle m\rangle,\langle m+1\rangle,\cdots,\langle m+k\rangle)\Lambda_k$ 中相应的项．因此有

引理 1.2. 母函数满足下列等式

$$(\langle m\rangle,\langle m+1\rangle,\cdots,\langle m+k\rangle)\Lambda_k=\frac{1}{\langle 0\rangle}(\langle m\rangle,(-1)\langle m,1\rangle,\cdots,(-1)^k\langle m,(1)^k\rangle). \tag{1.7}$$

这样公式(z)可以简化为如下的形式

$$\langle m_1,m_2\cdots,m_\nu\rangle=\frac{1}{\langle 0\rangle}(\langle m_1\rangle,(-1)\langle m_1,1\rangle,\cdots,(-1)^{\nu-1}\langle m_1,(1)^{\nu-1}\rangle)\cdot L_\nu(\alpha), \tag{1.8}$$

这个递推公式当 ν 较小时是很方便的．但对一般的分拆 α，则还须对列向量进行一些讨论．现

取分拆 α 有如下的形式

$$\alpha=((m)^{k_m},(m-1)^{k_{m-1}},\cdots,(1)^{k_1}),\quad k_m\geqslant 1,\quad k_i\geqslant 0,\quad i=1,\cdots,m-1,$$

则根据(1.2)式的约定，$L_\nu(\alpha)$ 中最多有 m 项不为零，其余全为零. 即若把 $L_\nu(\alpha)$ 转置为行向量，则不失一般性，

$$\begin{aligned}{}'L_\nu(\alpha)=(0,\cdots,0,&(-1)^{S_m^{m-1}}\langle(m-1)^{k_m+k_{m-1}},(m-2)^{k_{m-2}},\cdots,(1)^{k_1}\rangle,0,\cdots,\\&0,(-1)^{S_{m-1}^{m-1}}\langle(m-1)^{k_m-1},(m-2)^{k_{m-1}+k_{m-2}+1},\cdots,(1)^{k_1}\rangle,0,\cdots,\\&0,(-1)^{S_i^{m-1}}\langle(m-1)^{k_m-1},(m-2)^{k_{m-1}},\cdots,(i-1)^{k_i+k_{i-1}+1},\cdots,\\&(1)^{k_1}\rangle,0,\cdots,0,(-1)^{S_2^{m-1}}\langle(m-1)^{k_m-1},(m-2)^{k_{m-1}},\cdots,(1)^{k_2+k_1+1}\rangle,\\&0,\cdots,0,(-1)^{S_1^{m-1}}\langle(m-1)^{k_m-1},\cdots,(1)^{k_2},(0)^{k_1+1}\rangle),\end{aligned}\tag{1.9}$$

其中 $S_i^m=\sum\limits_{l=i}^{m}k_l$，$i=1,2,\cdots,m$. 这样，如果把表达式(1.9)代入(1.8)式中，就得到简化的递推公式.

定理 1.1. 设 $\alpha=((m)^{k_m},(m-1)^{k_{m-1}},\cdots,(1)^{k_1})$ 为 n 的一个分拆，相应于 α 的不可约表示为 $\pi(\alpha)$. 则与 $\pi(\alpha)$ 相应的母函数 $F_\alpha(t)$ 满足如下的递推公式

$$\begin{aligned}\langle(m)^{k_m},(m-1)^{k_{m-1}},\cdots,(1)^{k_1}\rangle&\equiv F_\alpha(t)\\&=\frac{1}{\langle 0\rangle}\cdot\sum_{i=1}^{m}(-1)^{i-1}\langle m,(1)^{S_i^m-i}\rangle\cdot\langle(m-1)^{k_{m-1}},\cdots,\\&\qquad(i-1)^{k_i+k_{i-1}+1},\cdots,(1)^{k_1}\rangle.\end{aligned}\tag{1.10}$$

其中当 $S_i^m-i<0$ 时，$\langle m,(1)^{S_i^m-i}\rangle=0$.

这一递推公式是我们计算母函数 $F_\alpha(t)$ 的基本工具. 值得指出的是，递推公式(1.10)和(3)式结合起来，可以提供计算对称群表示特征的新途径. 这将在另文中进行讨论. 由定理1.1立即可知

推理 1.1. 对一般的分拆 α，相应的母函数 $F_\alpha(t)$ 是勾形函数的多项式.

而对于勾形函数，我们可以具体算出它的表达式为

引理 1.3. 相应于勾股 $(m,(1)^k)$ 的母函数为：

$$\langle m,(1)^k\rangle=\frac{1}{\langle 0\rangle}\cdot A(k)\cdot\frac{t^k}{1-t^{m+k}}\cdot\langle m-1\rangle.\tag{1.11}$$

证. 由(1.6)和(1.3)式可知，

$$\begin{aligned}\langle m,(1)^k\rangle=\frac{(-1)^k}{\langle 0\rangle}\{&A(0)\cdot\langle m+k\rangle+(-1)A(1)\langle m+k-1\rangle+\cdots\\&+(-1)^kA(k)\langle m\rangle\},\end{aligned}$$

其中 $A(0)\equiv(1-t)$，$A(1)\equiv 1$. 所以如果令

$$p_1(t)=A(0)\cdot\langle m+k\rangle-A(1)\langle m+k-1\rangle,$$

则直接计算可得

$$p_1(t)=(-1)\frac{t}{1-t^{m+k}}\langle m+k-2\rangle.$$

而且如果命 $p_2(t)=p_1(t)+A(2)\langle m+k-2\rangle$，则经过计算可得

$$p_2(t)=A(2)\frac{t^2}{1-t^{m+k}}\langle m+k-3\rangle.$$

一般设

$$p_i(t)=(-1)^iA(i)\frac{t^i}{1-t^{m+k}}\langle m+k-i-1\rangle,$$

则有

$$\begin{aligned}p_{i+1}(t)&=p_i(t)+(-1)^{i+1}A(i+1)\langle m+k-i-1\rangle\\&=(-1)^{i+1}A(i+1)\frac{t^{i+1}}{1-t^{m+k}}\langle m+k-i-2\rangle.\end{aligned}$$

所以

$$p_k(t)=(-1)^kA(k)\frac{t^k}{1-t^{m+k}}\langle m-1\rangle.$$

引理 1.3 证毕.

然而根据 $A(k)$ 的定义,显然有

$$A(k+i)=A(k+i-1)\frac{t^{k+i-1}}{1-t^{k+i}}.$$

因此我们可得勾形函数的另一种表达方式.

推论 1.2. 母函数 $\langle m,(1)^k\rangle$ 可以表示为:

$$\begin{aligned}\langle m,(1)^k\rangle&=\frac{\langle m-1\rangle}{\langle 0\rangle}A(k)\cdot\frac{t^k}{1-t^{m+k}}\\&=\frac{\langle m-1\rangle}{\langle 0\rangle}A(k+1)\frac{1-t^{k+1}}{1-t^{m+k}}\\&\ \ \vdots\\&=\frac{\langle m-1\rangle}{\langle 0\rangle}A(k+m-1)\frac{1-t^{m+k-1}}{1-t^{m+k}}\frac{1-t^{m+k-2}}{t^{m+k-2}}\cdot\cdots\cdot\frac{1-t^{k+1}}{t^{k+1}}.\end{aligned}\tag{1.12}$$

这个表达式将在证明基本公式时用到.

二、两个组合引理

本节证明两个有关有理函数的组合引理,是为第三节证明基本公式做准备. 为书写简便,现引入下列符号: $t(k)\equiv t^k$, $T(k)\equiv(1-t(k))=(1-t^k)$, k 为正整数; $s_i^j=\sum\limits_{l=i}^{j}k_l$, $r_i^j=\sum\limits_{l=i}^{j}(k_l+1)=s_i^j+(j-i+1)$, $m\geqslant j\geqslant i\geqslant 1$. 首先我们引入下面的有理函数,它将在引理 2.2 中出现. 设

$$R_i^{(m)}(p)=\prod_{l=2}^{m-1}T(r_l^m-l+p)\Big(\prod_{l=i}^{m-1}T(r_l^l)\prod_{l=1}^{i-1}T(r_l^{i-1})\Big)^{-1}\cdot\prod_{l=2}^{i-1}t(r_l^{i-1}),$$
$$i=1,2,\cdots,m,\tag{2.1}$$

其中 $m\geqslant 2$, p 为非负整数. 则有

引理 2.1. 设有理函数 $R_i^{(m)}(p)$, $i=1,2,\cdots,m$, 由上式给出,则下列等式成立.

$$\sum_{i=1}^{m}(-1)^{i-1}R_i^{(m)}(p)=0. \tag{2.2}$$

证. 对 m 做归纳法.

$m=2$ 时, $R_1^{(2)}(p)=\dfrac{1}{T(r_1^1)}=R_2^{(2)}(p)$, 引理显然成立.

$m=3$ 时, $R_1^{(3)}(p)=\dfrac{T(r_1^3-2+p)}{T(r_1^2)\cdot T(r_1^1)}$,

$$R_2^{(3)}(p)=\frac{T(r_2^3-2+p)}{T(r_2^2)T(r_1^1)},$$

$$R_3^{(3)}(p)=\frac{T(r_3^3-2+p)}{T(r_2^2)T(r_1^2)}\cdot t(r_2^2).$$

直接计算可得 $R_1^{(3)}(p)-R_2^{(3)}(p)=-R_3^{(3)}(p)$, 引理成立. 假设 $m-1$ 时引理成立,即若命

$$R_i^{(m)}(p)\equiv\frac{T(r_i^m-2+p)}{T(r_i^{m-1})}\cdot Q_i^{(m-1)}(p+k_m),\quad i=1,2,\cdots,m-1, \tag{2.3}$$

其中

$$\begin{aligned}Q_i^{(m-1)}(p+k_m)&=\prod_{l=3}^{m-1}T(r_i^m-l+p)\Big(\prod_{l=i}^{m-2}T(r_i^l)\prod_{l=1}^{i-1}T(r_l^{i-1})\Big)^{-1}\prod_{l=2}^{i-1}t(r_l^{i-1})\\&=\prod_{l=2}^{m-2}T(r_i^{m-1}-l+p+k_m)\cdot\Big(\prod_{l=i}^{m-2}T(r_i^l)\prod_{l=1}^{i-1}T(r_l^{i-1})\Big)^{-1}\\&\quad\cdot\prod_{l=2}^{i-1}t(r_l^{i-1}),\end{aligned} \tag{2.4}$$

则由归纳法假设, $Q_i^{(m-1)}(p+k_m)$, $i=1,2,\cdots,m-1$, 适合

$$\sum_{i=1}^{m-1}(-1)^{i-1}Q_i^{(m-1)}(p+k_m)=0. \tag{2.5}$$

再者,如果记 $\tilde{Q}_i^{(m-1)}(p)$ 是把 $Q_i^{(m-1)}(p)$ 中的指标 k_1 换为 k_2, k_2 换为 k_3, $\cdots$, k_{m-1} 换为 k_m, 亦即

$$\begin{aligned}\tilde{Q}_i^{(m-1)}(p+k_m)&=\prod_{l=3}^{m-1}T(r_{i+1}^m-l+p)\Big(\prod_{l=i+1}^{m-1}T(r_{i+1}^l)\prod_{l=2}^{i}T(r_l^i)\Big)^{-1}\\&\quad\cdot\prod_{l=3}^{i}t(r_l^i).\end{aligned}$$

同样,根据归纳法假设,则有

$$\sum_{i=2}^{m}(-1)^{i-1}\tilde{Q}_i^{(m-1)}(p+k_m)=0, \tag{2.6}$$

于是由 (2.5) 式可知,

$$\begin{aligned}R_1^{(m)}(p)&=\frac{T(r_1^m-2+p)}{T(r_1^{m-1})}\cdot Q_1^{(m-1)}(p+k_m)\\&=\frac{T(r_1^m-2+p)}{T(r_1^{m-1})}\sum_{i=2}^{m-1}(-1)^iQ_i^{(m-1)}(p+k_m).\end{aligned}$$

但经直接计算可知,

$$\frac{1}{T(r_1^{i-1})}\left\{\frac{T(r_i^m-2+p)}{T(r_1^{m-1})}-\frac{T(r_i^m-2+p)}{T(r_i^{m-1})}\right\}=-t(r_i^{m-1})\frac{T(r_m^m-2+p)}{T(r_1^{m-1})T(r_i^{m-1})},$$
$$i=2,3,\cdots,m-1. \tag{2.7}$$

将此等式中 $\frac{T(r_1^m-2+p)}{T(r_1^{m-1})}$ 代入上式,并根据 $\tilde{Q}_i^{(m-1)}(p+k_m)$ 的定义可得

$$\begin{aligned}R_1^{(m)}(p)&=\sum_{i=2}^{m-1}(-1)^iR_i^{(m)}(p)-\frac{T(r_m^m-2+p)}{T(r_1^{m-1})}\cdot\sum_{i=2}^{m-1}t(r_i^{m-1})T(r_1^{i-1})\\&\quad\cdot\frac{1}{T(r_i^{m-1})}(-1)^iQ_i^{(m-1)}(p+k_m)\\&=\sum_{i=2}^{m-1}(-1)^iR_i^{(m)}(p)-\frac{T(r_m^m-2+p)}{T(r_1^{m-1})}\cdot t(r_2^{m-1})\cdot\sum_{i=2}^{m-1}(-1)^i\tilde{Q}_i^{(m-1)}(p+k_m)\\&=\sum_{i=2}^{m-1}(-1)^iR_i^{(m)}(p)-\frac{T(r_m^m-2+p)}{T(r_1^{m-1})}t(r_2^{m-1})\cdot(-1)^{m-1}\tilde{Q}_m^{(m-1)}(p+k_m).\end{aligned}$$

最后一步用到(2.6)式得到

$$R_1^{(m)}(p)=\sum_{i=2}^{m-1}(-1)^iR_i^{(m)}(p)+(-1)^mR_m^{(m)}(p).$$

这里再次用到 $\tilde{Q}_m^{(m-1)}(p+k_m)$ 的定义及(2.4),(2.3)式,就可证明了引理 2.1.

引理 2.2. 若命

$$P_i^{(m)}=\frac{T(r_i^m-m)}{T(r_i^m-1)}\cdot R_i^{(m)}(0),\quad i=1,2,\cdots,m,$$

则下式成立

$$\frac{\langle m-1\rangle}{\langle 0\rangle}\cdot\sum_{i=1}^{m}(-1)^{i-1}P_i^{(m)}=\prod_{l=2}^{m}t(r_l^m-2)\left(\prod_{l=1}^{m}T(r_l^m-1)\prod_{l=1}^{m-2}t(l)\right)^{-1}. \tag{2.8}$$

证. 对 m 做归纳法.

$m=2$ 时,

$$P_1^{(2)}=\frac{T(r_1^2-2)}{T(r_1^2-1)T(r_1^1)},\quad P_2^{(2)}=\frac{T(r_2^2-2)}{T(r_2^2-1)T(r_1^1)}.$$

经过计算,可得

$$P_1^{(2)}-P_2^{(2)}=\frac{t(r_1^2-2)t(r_2^2-2)}{T(r_1^2-1)T(r_2^2-1)}\cdot\frac{1-t}{t(r_1^2-2)}.$$

即对 $m=2$ 引理成立. 现假设引理对 $m-1$ 成立,即如果记

$$\tilde{P}_i^{(m-1)}=\prod_{l=2}^{m-1}T(r_i^m-l)\left(\prod_{l=i}^{m-2}T(r_l^i)\cdot\prod_{l=1}^{i-1}T(r_l^{i-1})\right)^{-1}\prod_{l=2}^{i-1}t(r_l^{i-1})\cdot\frac{1}{T(r_i^m-1)},$$
$$i=1,2,\cdots,m-1,$$

则有

$$\frac{1}{\langle 0\rangle}\sum_{i=1}^{m-1}(-1)^{i-1}\tilde{P}_i^{(m-1)}=\prod_{l=2}^{m-1}t(r_l^m-2)\left(\prod_{l=1}^{m-1}T(r_l^m-1)\prod_{l=1}^{m-3}t(l)\right)^{-1}\cdot\frac{1}{\langle m-2\rangle}. \tag{2.9}$$

我们需要计算的是

$$\frac{1}{\langle 0\rangle}\sum_{i=1}^{m}(-1)^{i-1}P_i^{(m)}=\frac{1}{\langle 0\rangle}\sum_{i=1}^{m}(-1)^{i-1}\cdot\frac{T(r_i^m-m)}{T(r_i^m-1)}R_i^{(m)}(0)$$
$$=\frac{1}{\langle 0\rangle}\left\{\sum_{i=1}^{m-1}(-1)^{i-1}\frac{T(r_i^m-m)}{T(r_i^m-1)}R_i^{(m)}(0)\right.$$
$$\left.+(-1)^{m-1}\frac{T(r_m^m-m)}{T(r_m^m-1)}R_m^{(m)}(0)\right\},$$

但由引理 2.1 可知，

$$(-1)^{m-1}R_m^{(m)}(0)=-\sum_{i=1}^{m-1}(-1)^{i-1}R_i^{(m)}(0). \tag{2.10}$$

因此上式等于

$$\frac{1}{\langle 0\rangle}\sum_{i=1}^{m}(-1)^{i-1}P_i^{(m)}=\frac{1}{\langle 0\rangle}\sum_{i=1}^{m-1}(-1)^{i-1}\left\{\frac{T(r_i^m-m)}{T(r_i^m-1)}-\frac{T(r_m^m-m)}{T(r_m^m-1)}\right\}R_i^{(m)}(0)$$
$$=\frac{1}{\langle 0\rangle}\frac{t(r_m^m-m)(1-t^{m-1})}{T(r_m^m-1)}$$
$$\cdot\sum_{i=1}^{m-1}(-1)^{i-1}\frac{T(r_i^{m-1}-m)}{T(r_i^m-1)}\cdot R_i^{(m)}(0).$$

根据 $\tilde{P}_i^{(m-1)}$ 的定义和归纳法假设，可得

$$\frac{1}{\langle 0\rangle}\sum_{i=1}^{m}(-1)^{i-1}P_i^{(m)}=\frac{t(r_m^m-m)T(m-1)}{T(r_m^m-1)}\cdot\frac{1}{\langle 0\rangle}\sum_{i=1}^{m-1}(-1)^{i-1}\tilde{P}_i^{(m-1)}$$
$$=\frac{t(r_m^m-m)T(m-1)}{T(r_m^m-1)}\prod_{l=2}^{m-1}t(r_l^m-2)$$
$$\left(\prod_{l=1}^{m-1}T(r_l^m-1)\prod_{l=1}^{m-3}t(l)\right)^{-1}\cdot\frac{1}{\langle m-2\rangle}$$
$$=\prod_{l=2}^{m}t(r_l^m-2)\left(\prod_{l=1}^{m}T(r_l^m-1)\prod_{l=1}^{m-2}t(l)\right)^{-1}\cdot\frac{1}{\langle m-1\rangle}.$$

即引理对 m 成立，引理 2.1 证毕.

三、母函数的基本公式

这一节继续使用第二节中符号．设 α 为 n 的一个分拆，$\alpha=((m)^{k_m},(m-1)^{k_{m-1}},\cdots,(1)^{k_1})$，$\sum_i k_i\cdot i=n$． 由 α 确定的既约表示 $\pi(\alpha)$ 进入由 T^d 所决定的表示 ρ^d 的重数为 N_α^d，则与 $\Pi(\alpha)$ 相应的形式幂级数为:

$$F_\alpha(t)=\sum_{d=0}^{\infty}N_\alpha^d t^d,$$

则本文的主要结果是

基本公式．如上所定义的母函数 $F_\alpha(t)$ 等于

$$F_\alpha(t)=\frac{1}{\langle 0\rangle^{m-1}}A(r_1^m-1)\cdot A(r_2^m-1)\cdots A(r_m^m-1)\cdot\Pi(m), \tag{3.1}$$

其中

$$\Pi(m)=\prod_{l=1}^{m-1}\left(\frac{T(r_l^l)T(r_l^{l+1})\cdots T(r_l^{m-1})}{t(r_l^m-m+l-1)\cdot t(r_l^m-m+l)\cdots t(r_l^m-2)}\right). \tag{3.2}$$

而 $A(k)$ 在公式 (1.3) 中给出，$t(k)$，和 $T(k)$ 是第二节中的符号.

容易看出，如果应用推论 1.6 中公式 (1.12) 和符号 ($r_i^j=s_i^j+c_j-i+1$)，基本公式可以改写为下面的形式:

$$F_\alpha(t)=\frac{1}{\langle 0\rangle^{m-1}}A(s_1^m)A(s_2^m)\cdots A(s_m^m)\cdot\tilde{\Pi}(m), \tag{3.3}$$

其中

$$\tilde{\Pi}(m)=\prod_{l=1}^{m-1}\left(\frac{T(s_l^l+1)T(s_l^{l+1}+2)\cdots T(s_l^{m-1}+m-l)}{T(s_l^m+1)\cdot T(s_l^m+2)\cdots T(s_l^m+m-l)}\right). \tag{3.4}$$

基本公式的证明. 对 m 做归纳法，

$m=1$ 时，

$$\langle(1)^{k_1}\rangle=A(k_1)=\frac{t^{\frac{1}{2}k_1(k_1-1)}}{(1-t^2)\cdots(1-t^{k_1})}$$

公式成立. $m=2$ 时,由递推公式 (1.10) 知,

$$\begin{aligned}\langle(2)^{k_2},(1)^{k_1}\rangle&=\frac{1}{\langle 0\rangle}\{\langle 2,(1)^{k_1+k_2-1}\rangle\cdot\langle(1)^{k_2-1}\rangle-\langle 2,(1)^{k_2-2}\rangle\langle(1)^{k_1+k_2}\rangle\}\\
&=\frac{1}{\langle 0\rangle}\left\{\frac{A(k_1+k_2-1)}{\langle 0\rangle}\cdot\frac{t^{k_1+k_2-1}}{1-t^{k_1+k_2+1}}\cdot\langle 1\rangle\cdot A(k_2-1)\right.\\
&\quad\left.-\frac{A(k_2-2)}{\langle 0\rangle}\cdot\frac{t^{k_2-2}}{1-t^{2+k_2-2}}\cdot\langle 1\rangle\cdot A(k_2+k_1)\right\}\\
&=\frac{1}{\langle 0\rangle^2}A(k_1+k_2-1)A(k_2-2)\cdot\left\{\frac{t(k_1+k_2-1)t(k_2-2)}{T(k_1+k_2+1)T(k_2-1)}\right.\\
&\quad\left.-\frac{t(k_2-2)t(k_1+k_2-1)}{T(k_2)T(k_1+k_2)}\right\}\\
&=\frac{1}{\langle 0\rangle}A(k_1+k_2)A(k_2)\frac{T(k_1+1)}{T(k_1+k_2+1)}.\end{aligned}$$

公式成立,现假设基本公式在 $m-1$ 时成立,因此有

$$\begin{aligned}&\langle(m-1)^{k_m-1},(m-2)^{k_{m-1}},\cdots,(i-1)^{k_i+k_{i-1}+1},\cdots,(1)^{k_1}\rangle\\
&=\frac{1}{\langle 0\rangle^{m-2}}A(r_1^m-2)A(r_2^m-2)\cdots\widehat{A(r_i^m-2)}\cdots A(r_m^m-2)\cdot\Pi(m)\\
&\quad\cdot\prod_{l=2}^{i-1}t(r_l^{i-1})\prod_{l=1}^{m-2}t(l)\cdot\prod_{l=3}^{m}t(r_i^m-l)\\
&\quad\cdot\left(\prod_{l=i}^{m-1}T(r_l^i)\cdot\prod_{l=1}^{i-1}T(r_l^{i-1})\right)^{-1},\\
&\qquad i=1,2,\cdots,m.\end{aligned} \tag{3.5}$$

其中 $\widehat{A(r_i^m-2)}$ 表示该项不出现，$\Pi(m)$ 由 (3.2) 式给出,但由推论 1.2 知道

$$\langle m, (1)^{r_i^m - m - 1}\rangle = \frac{\langle m-1\rangle}{\langle 0\rangle} A(r_i^m - 2)\frac{T(r_i^m-2)T(r_i^m-3)\cdots T(r_i^m-m)}{T(r_i^m-1)t(r_i^m-3)\cdots t(r_i^m-m)},$$
$$i = 1, 2, \cdots, m. \tag{3.6}$$

把(3.5)和(3.6)两式代入递推公式(1.10)，我们得到

$$\begin{aligned}
&\langle (m)^{k_m}, (m-1)^{k_{m-1}}, \cdots, (1)^{k_1}\rangle \\
&= \frac{1}{\langle 0\rangle}\sum_{i=1}^{m}(-1)^{i-1}\langle m, (1)^{r_i^m-m-1}\rangle\cdot\langle (m-1)^{k_m-1}, (m-2)^{k_{m-1}}, \cdots, \\
&\quad (i-1)^{k_i+k_{i-1}+1}, \cdots (1)^{k_1}\rangle \\
&= \frac{1}{\langle 0\rangle}\sum_{i=1}^{m}(-1)^{i}\frac{\langle m-1\rangle}{\langle 0\rangle}A(r_i^m-2)\frac{T(r_i^m-2)T(r_i^m-3)\cdots T(r_i^m-m)}{T(r_i^m-1)t(r_i^m-3)\cdots t(r_i^m-m)} \\
&\quad \cdot\langle (m-1)^{k_m-1}, \cdots, (i-1)^{k_i+k_{i-1}+1}, \cdots, (1)^{k_1}\rangle \\
&= \frac{1}{\langle 0\rangle^{m-1}}\left(\sum_{i=1}^{m}(-1)^{i-1}\frac{\langle m-1\rangle}{\langle 0\rangle}P_i^{(m)}\right)\cdot \Pi(m) \\
&\quad \cdot\left(\prod_{l=1}^{m-2}t(l)\right)t(r_1^m-2)\cdot A(r_1^m-2)\cdot A(r_2^m-2)\cdots A(r_m^m-2),
\end{aligned} \tag{3.7}$$

其中 $P_i^{(m)}$ 是由引理 2.2 中给出的有理函数．因此根据引理 2.2 可知，

$$\begin{aligned}
F_\alpha(t) &= \frac{1}{\langle 0\rangle^{m-1}}A(r_1^m-2)\cdots A(r_m^m-2)\cdot\Pi(m)\cdot t(r_1^m-2)\cdot\prod_{l=1}^{m-2}t(l). \\
&\quad \cdot\left\{\frac{\langle m-1\rangle}{\langle 0\rangle}\sum_{i=1}^{m}(-1)^{i-1}P_i^{(m)}\right\} \\
&= \frac{1}{\langle 0\rangle^{m-1}}A(r_1^m-2)\cdots A(r_m^m-2)\cdot\frac{t(r_1^m-2)\cdots t(r_m^m-2)}{T(r_1^m-1)\cdots T(r_m^m-1)}\cdot\Pi(m) \\
&= \frac{1}{\langle 0\rangle^{m-1}}A(r_1^m-1)\cdots A(r_m^m-1)\cdot\Pi(m).
\end{aligned}$$

最后一步再次用到推论 1.2．基本公式证毕．

值得注意的是，从基本公式(3.1)可以看出，母函数 $F_\alpha(t)$ 是 t 的有理函数，具有有限乘积的形式

$$F_\alpha(t) = \frac{t^\lambda}{\prod_{i=1}^{N}(1-t^{h_i})},$$

其中 $\lambda, N, h_i, i = 1, 2, \cdots, N$ 都是由 α 决定的正整数．这一事实是很有趣味的．特别是指数 h_i，在对称群表示论中具有的意义，将在今后的文章中进一步讨论．

参　考　文　献

[1] 钟家庆，数学学报，**23**(1980)，6：836—850.

[2] Molien, T., *Über die Invarianten der linearen Substitution gruppe*, Sitzungsber könig, Preuss, Akad wiss, 1897, 1152—1156.

[3] Chevalley, C., *Amer. J. Math.*, **77**(1955).

[4] James, G. and Kerber, A., *The Represantation Theory of the Symmetric Group*, Addison- wesley Publising Company, 1981.