中国科学: 数学 2024 年 第 54 卷 第 3 期: 355 ∼ 376
SCIENTIA SINICA Mathematica

《中国科学》杂志社
SCIENCE CHINA PRESS

综 述

金融中的变分不等式问题

献给姜礼尚教授 90 华诞

戴民[1,2*], 黄河清[3], 钱帅杰[4,5]

1. 香港理工大学应用数学系, 香港;
2. 香港理工大学会计与金融学院, 香港;
3. Department of Mathematics, National University of Singapore, Singapore 119076, Singapore;
4. Center of Mathematical Sciences and Applications, Harvard University, Cambridge, MA 02138, USA;
5. 香港科技大学数学系, 香港
E-mail: mindai@polyu.edu.hk, hheqing@u.nus.edu, sjqian@ust.hk

收稿日期: 2023-03-30; 接受日期: 2023-04-23; 网络出版日期: 2023-09-26; * 通信作者
国家自然科学基金 (批准号: 12071333)、香港研究资助局 (批准号: 15213422) 和香港理工大学研究基金 (批准号: P0042456, P0039114, P0042708 和 P0045342) 资助项目

摘要 现代金融的很多决策问题在数学上可以表述成最优停时或奇异控制问题. 这些问题从偏微分方程角度属于变分不等式问题, 相应的自由边界对应于最优策略. 本文给出金融中的一些典型的变分不等式模型、结果及尚待解决的问题. 这些模型来自现代金融的 3 个重要研究方向: 金融衍生品定价、投资组合选择及公司金融.

关键词 变分不等式 最优停时 奇异控制 自由边界 衍生品定价 投资组合选择 公司金融

MSC (2020) 主题分类 93E20, 35Q93, 91G10

1 引言

在金融中, 很多问题在数学上可以建模成最优停时问题或者奇异控制问题, 而这些问题的值函数可以由变分不等式刻画. 最优停时问题值函数满足标准的变分不等式 (参见文献 [105]), 而奇异控制问题值函数满足带梯度控制的变分不等式或拟变分不等式 (参见文献 [65]). 这些变分不等式问题都自然推导出自由边界, 而这些自由边界对应于金融问题的最优策略. 通过研究这些变分不等式问题及其自由边界可以刻画最优策略. 本文给出金融中的一些典型的变分不等式模型, 这些模型来自现代金融的 3 个重要研究方向: 金融衍生品定价、投资组合选择及公司金融.

金融衍生品定价起源于 Black-Scholes 的期权定价理论 (参见文献 [13]). 美式期权定价是金融中广为所知的最优停时问题. 与仅可在到期日行权的欧式期权不同, 美式期权可在到期日及到期日之前

英文引用格式: Dai M, Huang H H, Qian S J. Variational inequality problems in finance (in Chinese). Sci Sin Math, 2024, 54: 355–376, doi: 10.1360/SSM-2023-0065

的任何时刻行权. 因此, 对于美式期权, 不仅要确定其价格, 也要给出最优行权 (执行) 策略. 稍后可以看到, 这两个问题可以同时解决: 美式期权价格由变分不等式确定, 而变分不等式隐含的自由边界对应最优策略. 除了美式期权, 还有很多其他衍生品 (如叫价式期权、可转化债券以及一些投资问题) 可以用最优停时问题描述.

Merton 是连续时间投资组合选择研究的先驱. Merton [100] 将 Brown 运动和效用函数引入到投资组合模型, 由此推导出了随机控制问题. 引入比例交易费到 Merton 模型会导致奇异控制问题, 其值函数满足的变分不等式包含两个梯度约束, 由此推导出的两条自由边界分别对应买卖边界 (参见文献 [65]). 类似地, 带资本利得税的投资组合问题也是奇异控制问题.

Modigliani-Miller (MM) 定理 [102] 是现代公司金融理论的基本定理. MM 定理表明: 在无摩擦的经济中, 公司的融资策略 (指股权融资或债务融资) 不会影响公司价值, 从而公司的市场价值与其资本结构无关. 但是在现实中, 公司面临着税收、交易成本、破产成本和委托代理问题等诸多摩擦, 所以公司的资本结构会影响其市场价值. 引入这些摩擦可以研究股权与债务估值、内生违约、资本结构、分红和融资策略等. 相应的模型可以用最优停时或者奇异控制问题描述.

本文余下内容的安排如下. 第 2 节介绍由最优停时推导出的变分不等式问题及相关结果. 首先以美式期权为例, 接着介绍其他一些相关的期权定价问题, 然后介绍某些用最优停时描述的投资问题, 最后给出公司资本结构与估值问题推导出的一个最优停时问题. 第 3 节介绍两个涉及最优停时的博弈问题. 首先介绍可转换债券定价非零和博弈问题, 其债券持有者和原始股东是博弈的两个参与者, 分别拥有债转股与赎回、违约权利.该问题可以被一组变分不等式刻画. 随后介绍一个实物期权决策博弈问题. 第 4 节介绍奇异控制问题. 首先给出带比例交易费的投资组合问题, 其次介绍类似的带资本利得税的投资组合问题, 最后介绍动态公司金融中的奇异控制问题.

2 最优停时问题

2.1 普通美式期权

不失一般性, 在 Black-Scholes 框架下考虑该问题. 假定在风险中性世界, 股价 S_t 服从几何 Brown 运动:

$$\frac{dS_t}{S_t} = (r-q)dt + \sigma d\mathcal{B}_t^{\mathbb{Q}}, \tag{2.1}$$

其中, $r>0$、$q\geqslant 0$ 和 $\sigma>0$ 都是常数, 分别代表无风险利率、股票的红利率和波动率, $\mathcal{B}_t^{\mathbb{Q}}$ 是风险中性概率空间 $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{Q})$ 上的标准 Brown 运动.

以有限到期日 $(T>0)$ 且执行价格为 K 的美式看跌期权为例, 记 $\varphi(S)=\max(K-S,0)\equiv(K-S)^+$ 为其收益函数. 对于 $t\leqslant u\leqslant T$, 记 $\mathcal{F}_u^{(t)}$ 为价格过程 $\{S_v\}_{v\in[t,u]}$ 所生成的 σ- 域. 令 $\mathcal{T}_{t,T}$ 为取值于 $[t,T]$ 的关于 σ- 域流 $\mathcal{F}_u^{(t)}$ $(t\leqslant u\leqslant T)$ 的停时集合, 则美式期权在时刻 $t\leqslant T$ 的无套利价格可表示为下述最优停时问题:

$$V(S,t)=\sup_{\tau\in\mathcal{T}_{t,T}}\mathrm{E}^{\mathbb{Q}}[\mathrm{e}^{-r(\tau-t)}\varphi(S_\tau)\mid S_t=S], \tag{2.2}$$

其中 $\mathrm{E}^{\mathbb{Q}}$ 是风险中性测度下的条件期望. 可以证明 (2.2) 中的上确界在最优停时

$$\tau^*=\inf\{u\in[t,T]\mid V(S_u,u)=\varphi(S_u)\}$$

达到 (参见文献 [78, 定理 2.1] 和 [85, 定理 D.12]), 即美式期权价值首次触碰其内在价值的时刻.

类似于物理中的障碍问题 (参见文献 [121, 第 3 和 7 章]), 美式期权定价问题也可以用变分不等式描述. 事实上, 最优停时问题 (2.2) 等价于如下变分不等式问题:

$$\min\{-\mathcal{L}_{BS}V(S,t), V(S,t)-\varphi(S)\}=0,\quad (S,t)\in(0,\infty)\times[0,T), \tag{2.3}$$

$$V(S,T)=\varphi(S),\quad \forall\, S>0, \tag{2.4}$$

$$V(0,t)=K,\quad \forall\, t<T, \tag{2.5}$$

$$\lim_{S\to\infty} V(S,t)=0,\quad \forall\, t<T, \tag{2.6}$$

其中微分算子

$$\mathcal{L}_{BS}V=\frac{\partial V}{\partial t}+\frac{1}{2}\sigma^2S^2\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}+(r-q)S\frac{\partial V}{\partial S}-rV.$$

通过比较期权价格和收益函数, 可以定义执行区域

$$\mathcal{E}=\{(S,t)\in(0,\infty)\times[0,T)\mid V(S,t)=\varphi(S)\}.$$

期权所有者在该区域上应该立刻行权, 而在该区域之外持有. 不难证明, 存在一条边界 $S_p^*(t), t\in[0,T)$, 使得

$$\mathcal{E}=\{(S,t)\mid 0<S<S_p^*(t), 0\leqslant t<T\}.$$

称 $S_p^*(t)$ 为最优执行边界.

根据变分不等式理论, 问题 (2.3)–(2.6) 没有古典解, 在 S 方向仅一阶导数连续. 利用这个性质, 可以将该问题转化为自由边界问题: 求解 $(V(S,t), S_p^*(t))$ 满足

$$\mathcal{L}_{BS}V(S,t)=0,\quad 对\ S>S_p^*(t),\quad t\in[0,T), \tag{2.7}$$

终端条件 (2.4)、边界条件 (2.6) 及

$$(价值匹配)\quad V(S_p^*(t),t)=K-S_p^*(t), \tag{2.8}$$

$$(光滑黏贴)\quad \frac{\partial V}{\partial S}(S_p^*(t),t)=-1. \tag{2.9}$$

这里价值匹配条件 (2.8) 和光滑黏贴条件 (2.9) 分别意味着价格 $V(S,t)$ 和对冲率 $\frac{\partial V}{\partial S}(S,t)$ 在最优执行边界上是连续的. 关于价值匹配和光滑黏贴条件的讨论可参见文献 [121, 第 3 和 6 章]、[104, 引理 4.3] 和 [24]. 人们也经常将条件 (2.9) 称为自由边界条件, 称最优执行边界 $S_p^*(t)$ 为自由边界. McKean [98] 首先注意到美式期权定价问题可转换为自由边界问题.

当美式看跌期权没有到期日 (即永续美式期权) 时, 其价格与时间无关, 方程 (2.7) 退化成常微分方程, 可以通过求解上述自由边界问题得到解析解. 该方法常被用到实物期权定价.

变分不等式问题 (2.3)–(2.6) 通常没有解析解. 二叉树方法、基于有限差分离散的投影松弛法 (projected successive overrelaxation) 和惩罚方法 (penalty method) 是数值求解变分不等式问题的常用方法 (参见文献 [47, 66, 121]). 二叉树方法本质上等价于一种特定的显示差分格式 (参见文献 [82]), 利用黏性解方法可以证明二叉树方法的收敛性 (参见文献 [82, 83, 110]). Liang 等 [91, 92] 证明了二叉树方法最优收敛阶. 惩罚方法本质上是利用非光滑 Newton 法数值求解变分不等式方程 (2.3) 的惩罚逼近方程:

$$\mathcal{L}_{BS}V+\lambda(\varphi-V)^+=0,$$

其中 $\lambda > 0$ 为惩罚参数. 值得指出的是, 光滑化的惩罚逼近方程很早就被用来证明变分不等式方程强解的存在性 (参见文献 [67]).

利用偏微分方程理论, 不难证明最优执行边界 $S_p^*(t)$ 的一些性质, 例如, $S_p^*(T-) = \min(K, rK/q)$, $S_p^*(t)$ 严格单调且连续 1). 有很多研究者给出了 $S_p^*(t)$ 在靠近到期日的渐近展开 (参见文献 [21, 26, 87, 118]). 此外, Chen 等 [27] 和 Ekström [64] 证明了当分红率 q 为 0 时, $S_p^*(t)$ 关于时间 t 是凸的. 二者的证明都基于 Friedman 和 Jensen [68] 关于 Stefan 问题的经典结果. Chen 等 [28] 证明了当 $0 < q - r \ll 1$ 时, $S_p^*(t)$ 会丧失凸性.

2.2 期权定价中的其他最优停时问题

2.2.1 叫价式期权

叫价式期权 (shout option) 给予持有者一次重置执行价格为当前标的资产价格的权利. 以叫价式看跌期权为例, 其无套利价格可表示为下述最优停时问题:

$$V(S,t) = \sup_{\tau \in \mathcal{T}_{t,T}} \mathrm{E}^{\mathbb{Q}}[\mathrm{e}^{-r(T-t)}(\max(K, S_\tau) - S_T)^+ \mid S_t = S].$$

当期权持有者在到期日 T 之前的某一时刻 t 叫价时, 到期时收益为 $(S_t - S_T)^+$. 这相当于在叫价时刻持有者拿到一份平价 (at the money) 欧式看跌期权. 由经典的欧式期权定价公式可知, 其价格为 $SP(t)$, 其中 $P(t) = \mathrm{e}^{-r(T-t)}N(-d_-) - \mathrm{e}^{-q(T-t)}N(-d_+)$, $d_\pm = \frac{1}{\sigma}(r - q \pm \frac{1}{2}\sigma^2)\sqrt{T-t}, N(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^x \mathrm{e}^{-y^2/2}dy$. 因此, 叫价式期权价格函数 $V(S,t)$ 满足如下变分不等式: 对于 $S > 0$ 和 $t \in (0,T)$, 有

$$\min\{-\mathcal{L}_{BS}V(S,t), V(S,t) - SP(t)\} = 0. \tag{2.10}$$

终端条件为 $V(S,T) = (K-S)^+$, 边界条件为 $V(0,t) = \mathrm{e}^{-r(T-t)}K$. 当 S 很大时, $V(S,t) \sim SP(t)$.

定义叫价区域为 $\mathcal{S} = \{(S,t) \mid V(S,t) = SP(t), S > 0, t \in [0,T)\}$. 通过研究叫价区域可得到最优叫价策略. Dai 等 [46] 研究了该问题并发现存在最优叫价边界 $S_r^*(t) : [0,T) \to [K, \infty) \cup \{\infty\}$, 使得

$$\mathcal{S} = \{(S,t) \mid S \geqslant S_r^*(t), t \in [0,T)\}.$$

值得指出的是, 最优叫价边界 $S_r^*(t)$ 依赖于 r 和 q 的相对大小: 若 $r \leqslant q$, 则对于任意 $t < T$, 都有 $S_r^*(t) < \infty$. 若 $r > q$, 则存在 $t^* \in (0,T)$, 使得 $S_r^*(t) < \infty$ 当且仅当 $t > t^*$. 该分析部分依赖于叫价底 (shout floor) 价格的解析表达式 (参见文献 [32, 46]).

尽管上述问题类似于美式期权定价问题, 但其障碍函数 $SP(t)$ 的特殊性给理论分析带来了困难. Yang 等 [126] 给出了问题 (2.10) 的解的存在性和唯一性证明, 并研究了 $r - q \leqslant \sigma^2/2$ 的情形下自由边界的有界性、单调性和光滑性. Yang [125] 获得了 $r - q > \frac{\sigma^2}{2}$ 的情形下自由边界的光滑性. Dai 等 [45] 进一步研究了有多次叫价机会的叫价式期权定价和最优叫价策略, 该问题可以描述为多次最优停时问题, 其价格函数满足一组递归式变分不等式. Dybvig 和 Loewenstein [63] 及 Dai 和 Kwok [44] 揭示了经理人重置期权 (employee reload option) 与叫价式期权密切相关.

2.2.2 美式路径依赖期权

常见的路径依赖期权包括障碍期权、亚式期权和回望期权. 这些期权都有相应的美式产品. 下面以美式固定敲定价格回望看跌期权为例给出其定价模型. 该期权价格依赖于一个路径依赖变量 J_t

1) Dai M. Optimal stopping and stochastic control in finance. Lecture Notes at National University of Singapore, 2021

$= \min_{0\leqslant u\leqslant t} S_u$. 其提前执行收益函数为 $(K-J_t)^+$, 其中 K 是敲定价格. 期权的无套利价格为

$$V(S,J,t) = \sup_{\tau\in\mathcal{T}_{t,T}} \mathrm{E}^{\mathbb{Q}}[\mathrm{e}^{-r(\tau-t)}(K-J_t)^+ \mid S_t = S, J_t = J]. \tag{2.11}$$

可以证明 $V(S,J,t)$ 满足变分不等式:

$$\min\{-\mathcal{L}_{BS}V, V(S,J,t)-(K-J)^+\} = 0, \quad 0<J<S<\infty, \quad t\in[0,T),$$

以及终端条件 $V(S,J,T) = (K-J)^+$, 边界条件 $V(S,0,t) = K$, $\lim_{S\to\infty} V(S,J,t) = (K-J)^+$. 此外, 需要在 $S=J$ 上添加如下边界条件: $\frac{\partial V}{\partial J}|_{S=J} = 0$ (参见文献 [43,71]).

美式障碍期权不需引入额外的路径依赖变量. 对于美式亚式期权, 类似于回望期权, 我们也需要引入平均价格作为路径依赖变量, 其定价模型也是一个两维时间依赖的变分不等式. 浮动敲定价格美式回望期权和亚式期权定价模型都可以通过相似变换转化为一维时间依赖的变分不等式, 但固定敲定价格情形不可以降维. 有关这些美式路径依赖期权的研究, 可参见文献 [31,34,41–43,62,70,73,107].

2.2.3　美式多资产期权

下面以两标的资产的美式最大值看涨期权为例介绍多资产期权. 假设两个标的资产 (可以是股票、汇率或指数等) 的价格 S_{1t} 和 S_{2t} 在风险中性测度下满足如下随机微分方程:

$$\frac{dS_{it}}{S_{it}} = (r-q_i)dt + \sigma_i d\mathcal{B}_t^i, \quad i=1,2, \tag{2.12}$$

其中, $\mathcal{B}_t^1$ 和 $\mathcal{B}_t^2$ 是标准 Brown 运动, 二者的相关系数为 ρ; 常数 r 是无风险利率, q_i 是资产 i 的分红率, σ_i 是资产 i 价格的波动率. 如果期权持有者在到期日 T 之前的时刻 t 行权, 则他将得到支付 $(\max(S_{1t},S_{2t})-K)^+$. 该期权的价格函数 $V(S_1,S_2,t)$ 满足变分不等式 (参见文献 [20,80]):

$$\min\left\{-\frac{\partial V}{\partial t} - \mathcal{L}_{12}V, V-(\max(S_1,S_2)-K)^+\right\}, \quad t\in[0,T), \quad (S_1,S_2)\in\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}_+, \tag{2.13}$$

其中算子

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{12}V = {}& \frac{1}{2}\left(\sigma_1^2 S_1^2\frac{\partial^2 V}{\partial S_1^2} + 2\rho\sigma_1\sigma_2 S_1 S_2\frac{\partial^2 V}{\partial S_1\partial S_2} + \sigma_2^2 S_2^2\frac{\partial^2 V}{\partial S_2^2}\right) \\ & + (r-q_1)S_1\frac{\partial V}{\partial S_1} + (r-q_2)S_2\frac{\partial V}{\partial S_2} - rV.\end{aligned}$$

Broadie 和 Detemple [20] 率先研究了诸如最大值期权 (max-options)、对偶执行期权 (dual strike options) 和价差期权 (spread options) 等典型的标的资产有两种及以上的美式期权的估值以及最优执行问题. Jiang [80] 利用偏微分方程方法研究了美式最大 (最小) 值期权的自由边界的性质及各参数特别是波动率对期权价格的影响.

2.2.4　其他产品

值得指出的是, 还有大量其他金融衍生品定价问题可以用最优停时和变分不等式描述及刻画, 如一类股票抵押借贷 (stock loan) [51,124] 和抵押贷款证券 [81,109,123] 等.

2.3 交易策略

很多交易策略模型可以描述为最优停时问题. 下面介绍文献 [53] 提出的模型 [2]. 给定概率空间 $(\Omega,\mathcal{F},\mathrm{P})$, 记 S_t 为时刻 t 的股价, 满足如下随机微分方程:

$$dS_t = S_t[\mu(\alpha_t)dr + \sigma d\mathcal{B}_t],$$

其中, $\alpha_t \in \{1,2\}$ 是一个两状态 Markov 链, $\mu(i) \equiv \mu_i$ 是状态 $i=1,2$ 下的期望回报率, 常数 σ 表示波动率, $\mathcal{B}_t$ 是标准 Brown 运动. 过程 α_t 刻画了市场状态: $\alpha_t = 1$ 和 $\alpha_t = 2$ 分别代表牛市和熊市. 记

$$Q = \begin{pmatrix} -\lambda_1 & \lambda_1 \\ \lambda_2 & -\lambda_2 \end{pmatrix}$$

为 Markov 链 α_t 的生成元, 其中 $\lambda_1 > 0$ ($\lambda_2 > 0$) 表示从牛市到熊市 (从熊市到牛市) 的转换强度. 假设 α_t 不可被直接观察到, 且 $\{\alpha_t\}$ 与 $\{B_t\}$ 相互独立, 因此买卖决策的制定只能基于股票价格. 记 $\mathcal{F}_t$ 为时刻 t 及之前的股价生成的 σ- 代数, 记 τ_n 和 ν_n $(n=1,2,\dots)$ 分别是买入和卖出决策 $\{\mathcal{F}_t\}$- 停时列, $t \leqslant \tau_1 \leqslant \nu_1 \leqslant \tau_2 \leqslant \nu_2 \leqslant \cdots \leqslant \tau_n \leqslant \nu_n \leqslant \cdots$.

假设投资者采取全入全出 (all-in-all-out) 策略, 即在任意一个时刻投资者所有财富要么都投资于股票, 要么全部存入银行. 这里用 $i=0$ ($i=1$) 表示投资者在初始时刻 t 将财富全部存入银行 (投资于股票). 若 $i=1$, 则记对应的停时序列为 $\Lambda_1 = (\nu_1,\tau_2,\nu_2,\tau_3,\dots)$; 若 $i=0$, 则记对应的停时序列为 $\Lambda_1 = (\tau_1,\nu_1,\tau_2,\nu_2,\dots)$. 记 $K_b \in (0,1)$ 和 $K_s \in (0,1)$ 分别为买入和卖出股票对应的交易费率, ρ 表示无风险利率. 为了使本文的模型有意义, 假定 $\mu_2 - \frac{\sigma^2}{2} < \rho < \mu_1 - \frac{\sigma^2}{2}$.

给定初始时刻 t 的股价 $S_t = S$、市场趋势 $\alpha_t = \alpha$ 和决策序列 Λ_i, 考虑投资的对数回报, 则回报函数定义为

$$J_i(S,\alpha,\Lambda_i) = \begin{cases} \mathrm{E}_t\bigg\{ \ln\bigg(\mathrm{e}^{\rho(\tau_1 - t)}\displaystyle\prod_{n=1}^{\infty}\bigg[\mathrm{e}^{\rho(\tau_{n+1}-\nu_n)}\frac{S_{\nu_n}}{S_{\tau_n}}\frac{1-K_s}{1+K_b}\bigg]\bigg)\bigg\}, & 若\ i=0, \\ \mathrm{E}_t\bigg\{ \ln\bigg(\bigg[\dfrac{S_{\nu_1}}{S}\mathrm{e}^{\rho(\tau_2-\nu_1)}(1-K_s)\bigg]\displaystyle\prod_{n=2}^{\infty}\bigg[\mathrm{e}^{\rho(\tau_{n+1}-\nu_n)}\frac{S_{\nu_n}}{S_{\tau_n}}\frac{1-K_s}{1+K_b}\bigg]\bigg)\bigg\}, & 若\ i=1. \end{cases} \tag{2.14}$$

由于 α_t 不可观察, 所以引入 $p_t = \mathrm{P}(\alpha_t = 1 \mid \mathcal{F}_t)$ 表示当前时刻 t 市场为牛市 ($\alpha_t = 1$) 的条件概率. Wonham [122] 证明了 p_t 满足如下随机微分方程:

$$dp_t = [-(\lambda_1+\lambda_2)p_t + \lambda_2]dt + \frac{(\mu_1-\mu_2)p_t(1-p_t)}{\sigma}d\widehat{B}_t, \tag{2.15}$$

其中 $\widehat{B}_t$ 是新的 Brown 运动且

$$d\widehat{B}_t = \frac{d\log(S_t) - [(\mu_1-\mu_2)p_t + \mu_2 - \sigma^2/2]dt}{\sigma}. \tag{2.16}$$

给定 $p_t = p$, 回报函数 (2.14) 可写为 $J_i = J_i(p,\Lambda_i)$. 我们需要选取投资策略 Λ_i 以极大化回报函数. 记值函数 $V_i(p) = \sup_{\Lambda_i} J_i(p,\Lambda_i)$. 注意到 $V_0(p)$ 和 $V_1(p)$ 可以被看成空仓 ($i=0$) 和满仓 ($i=1$) 时的权利金. 当空仓时, 我们的回报率是 ρ, 需要决定一个最佳购买股票时刻 τ 并付出成本 $\ln(1+K_b)$ 以交换满仓的权利 $V_1(p_\tau)$. 当满仓时, 由方程 (2.16) 可得回报率 $(\mu_1-\mu_2)p_t + \mu_2 - \sigma^2/2$, 需要决定一个

2) 文献 [53] 给出的是有到期日的模型, 这里给出没有到期日的稳态模型.

最佳卖出股票时刻 ν 并付出成本 $-\ln(1-K_s)$ 以交换满仓的权利 $V_0(p_\nu)$. 因此, 可以将该问题重新表示为如下最优停时问题:

$$
\begin{aligned}
V_0(p) &= \sup_{\tau\geqslant t} \mathrm{E}\bigg[\int_t^\tau \rho du + V_1(p_\tau) - \ln(1+K_b)\bigg| p_t = p\bigg],\\
V_1(p) &= \sup_{\nu\geqslant t} \mathrm{E}\bigg[\int_t^\nu \bigg[(\mu_1-\mu_2)p_u + \mu_2 - \frac{\sigma^2}{2}\bigg]du + V_0(p_\nu) + \ln(1-K_s)\bigg| p_t = p\bigg].
\end{aligned}
$$

其对应的变分不等式如下: 对于 $p\in[0,1]$, 有

$$
\begin{cases}
\min\{-\mathcal{L}V_0-\rho, V_0-V_1+\ln(1+K_b)\}=0,\\
\min\bigg\{-\mathcal{L}V_1-\bigg[(\mu_1-\mu_2)p+\mu_2-\dfrac{\sigma^2}{2}\bigg], V_1-V_0-\ln(1-K_s)\bigg\}=0,
\end{cases}
\tag{2.17}
$$

其中 $\mathcal{L}$ 为由 (2.15) 得到的生成算子, 即 $\mathcal{L}V=\frac{1}{2}(\frac{(\mu_1-\mu_2)p(1-p)}{\sigma})^2V''(p)+[-(\lambda_1+\lambda_2)p+\lambda_2]V'(p)$.

由变分不等式 (2.17) 可以定义: (1) 空仓时买入区域 $\mathrm{BR}=\{p\in(0,1): V_1(p)-V_0(p)=\ln(1+K_b)\}$; (2) 满仓时卖出区域 $\mathrm{SR}=\{p\in(0,1): V_1(p)-V_0(p)=\ln(1-K_s)\}$. 确定上述两个区域即可得最优交易策略.

Dai 等 [53] 提出了上述模型并研究其交易策略, 特别地, 他们证明了其交易策略是一种趋势追踪策略. Dai 等更早的工作 [55] 给出了只交易一份股票的投资模型 3), 其交易策略也是一种趋势追踪策略.

此外, 文献 [18,58] 给出了基于基差套利的交易策略, 该模型也可以用类似于问题 (2.17) 的变分不等式组刻画. 文献 [57,112] 考虑了用到期最大 (小) 价格或平均价格为参考基准的买卖股票策略, 该问题也可描述成变分不等式问题.

2.4 公司资本结构与估值

下面介绍 Leland 模型 [76, 89, 103]. 假设所有的投资者都是风险中性的. 企业以速率 Y_t 产生息税前利润 (earnings before interest and taxes, EBIT), 其中 Y_t 服从几何 Brown 运动

$$
dY_t = \mu Y_t dt + \sigma Y_t d\mathcal{B}_t.
$$

企业在初始时刻发行息票为 C 的可违约永续债. 债务对于企业有双重影响: 一方面, 息票支付可享受税收减免, 企业在支付息票后的税后收入为 $(1-\kappa)(Y_t-C)$, 通过支付息票而享受的税盾为 κC, 其中 $\kappa\in(0,1)$ 为公司税率; 另一方面, 过高债务会增加企业的财务负担, 当企业无法持续经营而选择债务违约时, 企业会面临较大破产成本. 对税盾和破产成本之间的权衡决定了企业的最优资本结构.

假设在破产时, 股东将一无所得. 股东通过选择违约时间 τ 来最大化股权价值:

$$
E(Y) = \sup_{\tau\geqslant 0} \mathrm{E}\bigg[\int_0^\tau \mathrm{e}^{-rt}(1-\kappa)(Y_t-C)dt\bigg| Y_0 = Y\bigg].
$$

由于企业只负有限责任, 故总有 $E(Y)\geqslant 0$. 这个最优停时问题对应于变分不等式问题

$$
\max\{\mathcal{L}E(Y)+(1-\kappa)(Y-C), -E(Y)\}=0,
\tag{2.18}
$$

3) 该模型更适用于期货交易.

其边界条件为 $E(0)=0$ 和 $\lim_{Y\to\infty}E(Y)=(1-\kappa)(\frac{Y}{r-\mu}-\frac{C}{r})$, 其中 $\mathcal{L}E(Y)=\mu YE'(Y)+\frac{1}{2}\sigma^2Y^2E''(Y)-rE(Y)$. 变分不等式 (2.18) 内生决定了违约边界 Y_B, 而 Y_B 决定了企业的最优违约时间, $\tau^*=\inf\{t>0\mid Y_t\leqslant Y_B\}$.

在初始时刻 0, 约定息票 C, 债权人在给债务定价时要将企业的事后违约考虑在内. 注意到上述分析都是在给定息票 C 的情形下考虑的, 即以上定出的股权价值 $E(Y_0;C)$、债务价值 $D(Y_0;C)$ 和违约边界 $Y_B(C)$ 都是 C 的函数. 在初始时刻, 企业要权衡债务高低带来的利弊来决定其最优资本结构或最优杠杆, 即通过选取最优息票 C^* 来最大化企业价值 (即股权价值与债务价值总和).

Leland 所发展的这套结构化方法对后续资本结构和证券估值问题的研究有着重要影响. 一些后续研究也考虑了美国破产法案第 11 章 4) 下的公司债务的估值问题 (参见文献 [3,19,37]).

3 最优停时与博弈论

3.1 可转换债券

可转换债券是混合型证券, 它兼具债券和股票的特点. 债券持有者定期收到息票, 并有权自行决定将该证券换成发行公司的部分股权, 这类似于美式期权的提前执行. 典型的可转换债券还包含一个可赎回特征, 即发行人有赎回债务的权利. Chen 等 [25] 使用结构化方法建立了一个公司与债券持有人之间的非零和博弈模型.

下面介绍文献 [25] 中的模型. 假定在风险中性世界, 公司价值满足如下随机微分方程:

$$dV_t=(r-\delta)V_tdt+\sigma V_td\mathcal{B}_t.$$

公司通过发行单只永续可转换债券进行融资, 该债券面值为 P, 息票率为 c. 债券持有者有权进行债转股, 当公司价值为 V 时, 债权人可通过转换而得到 λV 的股份, 其中 $\lambda\in(0,1)$ 是事先约定的转换率. 公司也有权按照事先约定的执行价格 K 宣布赎回该债券, 此时债权人可以选择接受价格 K 而被公司赎回债券, 或者立即施行转换权, 所以宣布赎回时的债券价值为 $\max\{K,\lambda V\}$. 设公司税率为 κ, 且息票支付享受税收减免. 公司可以选择时机宣布破产清算. 假设当公司清算时, 其资产价值损失比例为 ρ, 而债权人得到剩余全部 $1-\rho$ 部分资产价值.

设债券持有者的转换时间为 $\tau_{\rm con}$, 股东的赎回时间和破产时间分别为 $\tau_{\rm cal}$ 和 τ_b. 若 $\tau_{\rm con}<\tau_b\wedge\tau_{\rm cal}=\min\{\tau_b,\tau_{\rm cal}\}$, 则债权人执行了转换权而留给原始股东 $(1-\lambda)V_{\tau_{\rm con}}$. 若 $\tau_{\rm con}>\tau_b\wedge\tau_{\rm cal}$, 考虑下述 3 种情形: $V_{\tau_b\wedge\tau_{\rm cal}}\leqslant K$, $K<V_{\tau_b\wedge\tau_{\rm cal}}\leqslant K/\lambda$, $V_{\tau_b\wedge\tau_{\rm cal}}>K/\lambda$. 在第一种情形下, 不管是破产还是赎回, 股东都将一无所得. 而当 $V>K$ 时, 股东不应宣布破产, 即有 $\tau_b\wedge\tau_{\rm cal}=\tau_{\rm cal}$. 故在后两种情形下, 股东分别得到 $V_{\tau_b\wedge\tau_{\rm cal}}-K$ 和 $(1-\lambda)V_{\tau_b\wedge\tau_{\rm cal}}$. 据此, 对于股东先采取行动 (即 $\tau_{\rm con}>\tau_b\wedge\tau_{\rm cal}$) 的情形而言, 可定义股权和债券在时刻 $\tau_b\wedge\tau_{\rm cal}$ 的收益函数分别为

$$h(V)=\begin{cases}0, & V<K,\\ V-K, & K\leqslant V<\dfrac{K}{\lambda},\\ (1-\lambda)V, & V\geqslant\dfrac{K}{\lambda},\end{cases}\quad \text{和}\quad g(V)=\begin{cases}(1-\rho)V, & V<K,\\ V-h(V), & V\geqslant K.\end{cases}$$

在时刻 $\tau_b\wedge\tau_{\rm cal}\wedge\tau_{\rm con}$ 之前, 公司通过运营以速率 δV_t 获得现金流, 在偿付完息票后将剩余的现金流 $(\delta V_t-(1-\kappa)cP)dt$ 以分红的形式支付给股东. 给定公司价值 V 以及择时策略 τ_b、$\tau_{\rm cal}$ 和 $\tau_{\rm con}$, 记

4) 美国破产法案第 11 章给予申请破产公司一段宽限期, 在此期间公司被允许与债权人协商以重组债务.

$E(V;\tau_b,\tau_{\rm cal};\tau_{\rm con})$ 和 $D(V;\tau_b,\tau_{\rm cal};\tau_{\rm con})$ 分别是相应的股权价值和债务价值. 根据上述分析, 在风险中性测度下,

$$\begin{aligned}E(V;\tau_b,\tau_{\rm cal};\tau_{\rm con})=\mathrm{E}\bigg[&\int_0^{\tau_{\rm con}\wedge\tau_b\wedge\tau_{\rm cal}}\mathrm{e}^{-rt}(\delta V_t-(1-\kappa)cP)dt\\&+\mathrm{e}^{-r(\tau_b\wedge\tau_{\rm cal})}h(V_{\tau_b\wedge\tau_{\rm cal}})\mathbf{1}_{\{\tau_{\rm con}\geqslant\tau_b\wedge\tau_{\rm cal}\}}\\&+\mathrm{e}^{-r\tau_{\rm con}}(1-\lambda)V_{\tau_{\rm con}}\mathbf{1}_{\{\tau_{\rm con}<\tau_b\wedge\tau_{\rm cal}\}}\,\bigg|\,V_0=V\bigg],\end{aligned}\tag{3.1}$$

以及

$$\begin{aligned}D(V;\tau_b,\tau_{\rm cal};\tau_{\rm con})=\mathrm{E}\bigg[&\int_0^{\tau_{\rm con}\wedge\tau_b\wedge\tau_{\rm cal}}\mathrm{e}^{-rt}cPdt+\mathrm{e}^{-r\tau_{\rm con}}\cdot\lambda V_{\tau_{\rm con}}\cdot\mathbf{1}_{\{\tau_{\rm con}<\tau_b\wedge\tau_{\rm cal}\}}\\&+\mathrm{e}^{-r(\tau_b\wedge\tau_{\rm cal})}g(V_{\tau_b\wedge\tau_{\rm cal}})\mathbf{1}_{\{\tau_{\rm con}\geqslant\tau_b\wedge\tau_{\rm cal}\}}\,\bigg|\,V_0=V\bigg].\end{aligned}\tag{3.2}$$

债权人和股东追求各自利益最大化, 这形成一个二人博弈:

$$\begin{aligned}&\tau^*_{\rm con}=\arg\max_{\tau_{\rm con}\geqslant0}D(V;\tau^*_b,\tau^*_{\rm cal};\tau_{\rm con}),\\&(\tau^*_b,\tau^*_{\rm cal})=\arg\max_{\tau_b,\tau_{cal}\geqslant0}\mathrm{E}(V;\tau_b,\tau_{\rm cal};\tau^*_{\rm con}).\end{aligned}\tag{3.3}$$

由于税收和破产成本的存在, 可看出这是一个非零和博弈. 记 e 和 d 分别是股权价值 (3.1) 和债务价值 (3.2) 的最优值函数, 定义算子

$$\mathcal{L}f(V)=\frac{1}{2}\sigma^2V^2f''(V)+(r-\delta)Vf'(V)-rf(V).$$

记 $\mathcal{S}_E=\mathrm{cl}(\{V\in[0,+\infty)\mid e(V)=h(V),-\mathcal{L}e(V)\geqslant\delta V-(1-\kappa)Pc\})$ 为公司执行赎回或违约的集合, 其中 $\mathrm{cl}(\cdot)$ 表示集合的闭包, 而 $\mathcal{S}_D=\mathrm{cl}(\{V\in[0,+\infty)\mid d(V)=\lambda V,-\mathcal{L}d(V)\geqslant Pc\})$ 表示债权人实施转换权的集合. 假设 $\mathcal{S}_E\cap\mathcal{S}_D=\emptyset$, 即排除双方同时行动的情形. 问题 (3.3) 是耦合的最优停时问题, 它对应于变分不等式组:

$$\begin{cases}d(V)=g(V), & V\in\mathcal{S}_E,\\ \min\{d(V)-\lambda V,-\mathcal{L}d(V)-cP\}=0, & V\in\mathcal{S}_E^c=[0,\infty)\backslash\mathcal{S}_E\end{cases}$$

和

$$\begin{cases}e(V)=(1-\lambda)V, & V\in\mathcal{S}_D,\\ \min\{e(V)-h(V),-\mathcal{L}e(V)-(\delta V-(1-\kappa)cP)\}=0, & V\in\mathcal{S}_D^c=[0,\infty)\backslash\mathcal{S}_D.\end{cases}$$

此模型下股东可能在债务实值 (in-the-money) 或者虚值 (out-of-the-money) 的时候赎回, 与实证分析相符合. 此外, 该模型也表明了信用风险和税收减免对于双方的最优策略有显著影响.

关于可转换债券定价的开创性工作可追溯至 Brennan 和 Schwartz [16,17] 以及 Ingersoll [77]. 他们提出了一种结构化方法来分析最优赎回和转换规则, 并对可转换债券进行估值. 其关键思想是将债券视为公司资产的或有权益, 然后借助 Black-Scholes 和 Merton 发展起来的期权定价方法进行分析. 他们认为, 当且仅当转股价值 (即可转换债券可以换取的股权价值) 等于赎回价格时, 公司才应该宣布赎

回. 他们没有考虑公司税的影响, 在 Modigliani-Miller 定理成立的条件下, 公司证券的总市场价值便独立于特定的转换策略. 公司通过赎回策略使股权价值最大化, 实际上是在使可转换债券的价值最小化; 债券持有者通过转换策略使债券价值最大化, 实际上是在使股权价值最小化. 事实上, 在不考虑公司税的情形下, 可转换债券定价问题是一个二人零和博弈问题, 这一点在文献 [16] 中已隐含提及. 沿着二人零和博弈的框架, Sîrbu 等[114] 以及 Sîrbu 和 Shreve[115] 分别考虑了永续和有限到期日的可转换债券, 其中最优赎回和最优转换策略的决定就是公司与债权人之间的 Dynkin 博弈问题, 这里债券几乎可类比为 Kifer 意义下的博弈期权 (参见文献 [86]). 较之早期文献 [16,17,77] 不同, 文献 [114,115] 包括早期转换可能是最优的情形, 这需要处理一个非平凡的自由边界问题. Kallsen 和 Kühn[84] 使用零和博弈或有权益框架来研究可转换债券, 并为这类衍生品引入了数学上严格的无套利价格概念.

3.2 实物期权

企业的许多投资决策往往是不可逆的. 将企业投资于项目的机会视为一种关于此项目的 “美式看涨期权”, 我们便可以借助 Black-Scholes 金融期权定价及最优停时的框架来研究真实世界的择时决策和估值问题. 这种估值框架即是所谓的实物期权 (real options) 模型. 对于传统的金融期权, 其最优执行策略并不需要考虑期权持有者之间的策略性互动. 但是对于投资决策等实物期权问题, 考虑期权持有者之间的策略性互动至关重要.

Dai 等[38] 扩展了实物期权博弈模型 (参见文献 [61,72]), 考虑了具有后发优势的双寡头策略性实物期权执行问题. 一方面, 企业进入新的产品市场时往往会面临着高额的前置成本, 而后进入市场的企业 (追随者) 可以通过观察、学习、模仿先进入市场的企业 (领导者) 而降低其前置成本, 从而追随者具有后发优势 (second-mover advantage). 鉴于此, 企业有动机成为追随者来减少进入市场的前置成本. 但另一方面, 企业为了成为追随者而过度延迟进入市场, 这又使得双方陷入了消耗战博弈.

下面介绍文献 [38] 中的模型. 假设整个市场利润由随机过程 $\{X_t\}_{t\geqslant 0}$ 刻画, 其中 X_t 服从几何 Brown 运动:

$$dX_t = \mu X_t dt + \sigma X_t d\mathcal{B}_t, \quad X_0 = x_0 > 0, \tag{3.4}$$

其中 μ 是 X 的期望增长率, $\sigma > 0$ 是 X 的增长率的波动率, $\{\mathcal{B}_t\}_{t\geqslant 0}$ 是一维标准 Brown 运动. 假设该市场中有 a 和 b 两家企业. 称抢先进入市场的企业为领导者, 而其对手为追随者. 若记企业 a 和 b 进入市场的时间分别为 τ_a 和 τ_b, 则领导者和追随者进入市场的时间分别为 $\tau_L = \min\{\tau_a, \tau_b\}$ 和 $\tau_F = \max\{\tau_a, \tau_b\}$. 记 $K_L > 0$ 和 $K_F > 0$ 分别是领导者和追随者进入市场时所付的固定成本, 成本之比 $R = K_L/K_F$ 刻画了进入市场次序的优劣势大小.

随着时间演进, 该问题分为 3 个阶段: (1) 无企业进入市场时 $(t < \tau_L)$, 每个企业都无现金流入; (2) 在领导者进入市场而追随者还未进入市场这段时间内 $(\tau_L \leqslant t < \tau_F)$, 领导者获得垄断利润 $\{X_s \mid s \in [\tau_L, \tau_F)\}$; (3) 当追随者进入市场之后 $(t \geqslant \tau_F)$, 经济从垄断转换为双头垄断, 领导者和追随者将平分市场利润, 二者将分别获得利润 $\{X_s/2 \mid s \geqslant \tau_F\}$. 这里采用逆向归纳法分析此动态博弈:

(1) 当 $t \geqslant \tau_F$ 时, 两个企业平分利润, 各自值函数皆为 $\Pi(x)/2$, 其中,

$$\Pi(x) = \mathrm{E}_t^x\left[\int_t^{\infty} \mathrm{e}^{-r(s-t)} X_s ds\right] = \frac{x}{r-\mu},$$

条件期望算子 $\mathrm{E}_t^x[\cdot] = \mathrm{E}[\cdot \mid X_t = x]$.

(2) 当 $\tau_L \leqslant t < \tau_F$ 时, 追随者的进入前值函数为

$$F(x)=\max_{\tau_F\geqslant t}\mathrm{E}_t^x\bigg[\int_{\tau_F}^{\infty}\mathrm{e}^{-r(s-t)}\frac{X_s}{2}ds-\mathrm{e}^{-r(\tau_F-t)}K_F\bigg].$$

实际上, 追随者的择时问题等同于垄断者择时问题, 其最优进入时机采取触发策略, 即当市场利润高于某个内生阈值 x_F 时, 追随者便进入市场, 其最优进入时间为 $\tau_F^*=\inf\{s\geqslant t \mid X_s\geqslant x_F\}$. 对于 $t\in[\tau_L,\tau_F^*)$, 领导者的进入后值函数为

$$L(x)=\mathrm{E}_t^x\bigg[\int_t^{\infty}\mathrm{e}^{-r(s-t)}X_sds-\int_{\tau_F^*}^{\infty}\mathrm{e}^{-r(s-t)}\frac{X_s}{2}ds\bigg],$$

上式右端第一项表示时刻 t 之后领导者能够一直垄断市场的价值; 而第二项则表示在时刻 τ_F^* 之后, 由于追随者进入市场而导致领导者损失的价值. 这里 $F(x)$ 和 $L(x)$ 都可求得闭合解.

(3) 当 $t<\tau_L$ 时, 对给定的进入策略 (τ_a,τ_b), 企业 i 在时刻 t 的值函数 $J_i(x)$ 为

$$\mathrm{E}_t^x\bigg[\mathrm{e}^{-r(\tau_L-t)}\bigg(\mathbf{1}_{\tau_i<\tau_{-i}}(L(X_{\tau_i})-K_L)+\mathbf{1}_{\tau_i>\tau_{-i}}F(X_{\tau_{-i}})+\mathbf{1}_{\tau_i=\tau_{-i}}\frac{L(X_{\tau_i})-K_L+F(X_{\tau_i})}{2}\bigg)\bigg],\qquad(3.5)$$

其中 $-i$ 表示企业 i 的对手. (3.5) 中的 3 项依次刻画了企业 i 是领导者、追随者或同时进入者的情形. 给定对手 $-i$ 的进入时间 τ_{-i}, 企业 i 选择其进入时间 τ_i 以最大化 (3.5) 的值.

当进入成本比 R 足够大时, 后发占绝对优势, 对任何市场利润水平 x, 企业都愿意做追随者. 记 $\lambda_i(X_t)$ 为企业 i 在时间区间 $[t,t+dt]$ (其中 $t\leqslant\tau_L$) 的市场进入率. 记 Φ 为所有可行的 Markov 混合策略对, 称 Markov 策略对 $(\lambda_a(\cdot),\lambda_b(\cdot))$ 为可行的, 是指它满足可积性条件: 对于任意 $t>0$, 几乎必然有 $\int_0^t\lambda_i(X_s)ds<\infty$. 给定 $X_t=x>0$ 和 Markov 混合策略对 (λ_a,λ_b), 记 $J_i(x;\lambda_a,\lambda_b)$ 为企业 i 在时刻 t 的值函数. 如果可行策略对 $(\lambda_a^*,\lambda_b^*)$ 满足条件

$$\begin{aligned}&J_a(x;\lambda_a^*,\lambda_b^*)\geqslant J_a(x;\lambda_a,\lambda_b^*),\quad\forall\,(\lambda_a,\lambda_b^*)\in\Phi,\\&J_b(x;\lambda_a^*,\lambda_b^*)\geqslant J_b(x;\lambda_a^*,\lambda_b),\quad\forall\,(\lambda_a^*,\lambda_b)\in\Phi,\end{aligned}\qquad(3.6)$$

则称 $(\lambda_a^*,\lambda_b^*)$ 为一个 Markov 完美混合策略均衡. 记 $V_i(x)=J_i(x;\lambda_a^*,\lambda_b^*)$ 为企业 i 的均衡值函数. 考虑对称均衡 $\lambda^*(x)=\lambda_a^*(x)=\lambda_b^*(x)$, 可以证明在均衡时, $V_a(x)=V_b(x)=V_*(x)$, 其中 $V_*(x)$ 是变分不等式问题 (3.7)–(3.9) 的唯一解:

$$\max\bigg\{\frac{\sigma^2x^2}{2}V_*''(x)+\mu xV_*'(x)-rV_*(x),(L(x)-K_L)-V_*(x)\bigg\}=0,\quad x>0,\qquad(3.7)$$

满足边界条件

$$V_*(x)=0,\quad 当\ x=0\ 时,\qquad(3.8)$$

$$V_*(x)-(L(x)-K_L)\to0,\quad 当\ x\to\infty\ 时.\qquad(3.9)$$

当 $V_*(x)>L(x)-K_L$ 时, 抢先进入市场是次优的, 均衡进入率 $\lambda^*(x)=0$; 当 $V_*(x)=L(x)-K_L$ 时, 均衡进入率有显式解

$$\lambda^*(x)=\frac{rL(x)-[\frac{\sigma^2x^2}{2}L''(x)+\mu xL'(x)]-rK_L}{F(x)-(L(x)-K_L)}>0.$$

作为实物期权研究的先声, McDonald 和 Siegel [96] 研究了在不确定环境下不可逆投资的择时问题. 在这个模型中, 投资择时决策可视为一个美式看涨期权的执行问题. Dixit 和 Pindyck [61] 以及 Trigeorgis [119] 对实物期权问题进行了很好的总结. 关于实物期权结合博弈论的专著可参考文献 [33, 116]. Bensoussan 和 Friedman [9, 10] 引入了与先前提到的 Dynkin 博弈类似而略有不同的一类博弈问题, 通常称为停时博弈. 诸如抢先进入 (preemption) 博弈和消耗战 (war of attrition) 博弈 (参见文献 [69, 第 4 章] 和 [90]) 等常见的非随机择时博弈都可视为停时博弈的特例.

4 奇异控制问题

4.1 带比例交易费的投资组合问题

假定市场有两种资产: 无风险债券和股票, 股票价格遵循几何 Brown 运动. 在时刻 t 投资者分别持有价值为 X_t 和 Y_t 的无风险债券和股票. 在有交易费的情形下, 资产动态过程为

$$dX_t = (rX_t - C_t)dt - (1+\theta_1)dL_t + (1-\theta_2)dM_t, \tag{4.1}$$

$$dY_t = \mu Y_t dt + \sigma Y_t d\mathcal{B}_t + dL_t - dM_t, \tag{4.2}$$

其中, $r>0$ 是无风险利率, $\mu>r$ 和 $\sigma>0$ 分别是股价的期望增长率和波动率, $\mathcal{B}_t$ 是标准 Brown 运动, $C_t \geqslant 0$ 是消费率, 非负不减过程 L_t 和 M_t 分别表示买进和卖出股票对应的累计价值, 且 $L_0 = M_0 = 0$, 常数 $\theta_1 \in [0,\infty)$ 和 $\theta_2 \in [0,1)$ 分别表示买进和卖出股票对应的比例交易费率.

由于 $\mu > r$, 所以可假定投资者从不卖空股票, 即 $Y_t \geqslant 0$. 由于存在交易费, 对于在 t 时刻的任意 $Y_t \geqslant 0$ 和 X_t, 定义投资者的净财富为 $W_t = X_t + (1-\theta_2)Y_t$. 我们要求投资者的净财富非负, 因此定义偿付区域为

$$\mathscr{S} = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x + (1-\theta_2)y > 0, y > 0\}.$$

给定初始位置 $(X_0, Y_0) = (x,y) \in \mathscr{S}$, 若消费 - 投资策略 $\{(C_t, L_t, M_t)\}_{t\geqslant 0}$ 使得满足动态 (4.1) 和 (4.2) 的过程 (X_t, Y_t) 始终在 $\overline{\mathscr{S}}$ 内, 则称该策略是允许的. 定义这个容许投资策略集合为 $A_0(x,y)$.

投资者的效用来自累积消费和终期财富, 他所面临的问题是从允许的策略集中选择最优策略以达到跨期消费的期望效用最大化:

$$\sup_{(L,M,C)\in A_0(x,y)} \mathrm{E}\bigg[\int_0^\infty \mathrm{e}^{-\beta s} U(C_s)ds\bigg], \tag{4.3}$$

其中, $\beta > 0$ 是折现因子, $U(\cdot)$ 为投资者的效用函数. 因为控制过程可以是非连续的, 所以问题 (4.3) 是一个奇异控制问题. 用 $V^*(x,y)$ 表示值函数, 其中 $(x,y)\in\mathscr{S}$.

不失一般性, 考虑对数效用函数的投资者, 即 $U(C) = \ln(C)$. 可以证明 $V^*(x,y)$ 满足下述带梯度约束的变分不等式 (参见文献 [65, 88, 113]):

$$\max\{\mathcal{L}u, (1-\theta_2)u_x - u_y, -(1+\theta_1)u_x + u_y\} = 0, \quad (x,y)\in\mathscr{S}, \tag{4.4}$$

其中

$$\mathcal{L}u = \frac{1}{2}\sigma^2 y^2 u_{yy} + \mu y u_y + rxu_x - \beta u - (1+\ln(u_x)).$$

由效用函数的齐次性有, 对于任意正常数 ρ, 都有

$$V^*(\rho x, \rho y) = V^*(x, y) + \frac{\ln \rho}{\beta}, \tag{4.5}$$

因此

$$\varphi\left(\frac{x}{y}\right) \equiv V^*\left(\frac{x}{y}, 1\right) = V^*(x, y) - \frac{\ln \rho}{\beta}. \tag{4.6}$$

进一步令 $w(x) = \beta\varphi(x)$, 则可以将问题转化为如下带梯度约束的椭圆变分不等式:

$$\min\left\{-\mathcal{L}_1 w, \frac{1}{x+1-\theta_2} - w_x, w_x - \frac{1}{x+1+\theta_1}\right\} = 0, \quad -(1-\theta_2) < x < +\infty, \tag{4.7}$$

其中

$$\mathcal{L}_1 w = \frac{1}{2}\sigma^2 x^2 \partial_{xx} w + \beta_2 x \partial_x w + \beta_1 - \beta(1 - \log\beta + w + \ln w_x),$$

$\beta_2 = -(\alpha - r - \sigma^2)$, $\beta_1 = \alpha - \frac{1}{2}\sigma^2$.

定义 $v = w_x$, 可以证明 v 满足如下的双障碍问题 (参见文献 [36, 54]):

$$\begin{cases} -\mathcal{L}_2 v = 0, & \dfrac{1}{x+1+\theta_1} < v < \dfrac{1}{x+1-\theta_2}, \\ -\mathcal{L}_2 v \leqslant 0, & v = \dfrac{1}{x+1-\theta_2}, \\ -\mathcal{L}_2 v \geqslant 0, & v = \dfrac{1}{x+1+\theta_1}, \end{cases} \tag{4.8}$$

其中

$$\mathcal{L}_2 v = \frac{1}{2}\sigma^2 x^2 v_{xx} - (\alpha - r - 2\sigma^2) x v_x - (\alpha - r - \sigma^2) v - \beta\left(v + \frac{v_x}{v}\right). \tag{4.9}$$

定义卖区、买区和非交易区域分别如下:

$$\begin{aligned} \mathrm{SR} &= \left\{x \in \Omega : v = \frac{1}{x+1-\theta_2}\right\} \\ \mathrm{BR} &= \left\{x \in \Omega : v = \frac{1}{x+1+\theta_1}\right\} \\ \mathrm{NR} &= \left\{x \in \Omega : \frac{1}{x+1+\theta_1} < v < \frac{1}{x+1-\theta_2}\right\}, \end{aligned} \tag{4.10}$$

其中 $\Omega = (-(1-\theta_2), +\infty)$. 可以证明存在自由边界 $x_s, x_b \in \Omega$, 使得

$$\mathrm{SR} = \{x \in \Omega : x \leqslant x_s\}, \quad \mathrm{BR} = \{x \in \Omega : x \geqslant x_b\}. \tag{4.11}$$

当投资者在买区 (卖区) 时, 他的最优策略是买入 (卖出) 适量股票, 使得他的持仓调整到对应的自由边界.

(1) 无穷时域下交易策略刻画. Merton[99] 率先将连续时间随机模型应用于金融市场研究. 在没有交易费的情形下, Merton 表明: 相对风险厌恶投资者的最优投资策略是保持每项资产占总财富的比例恒定. 为了实施这一策略, 投资者需要持续不断地交易. Magill 和 Constantinides[95] 在 Merton 模型中

引入比例交易费并洞察到非交易区域的存在, 交易只在非交易区域的边界上发生. Davis 和 Norman [60] 首次对带比例交易费的投资组合问题进行严谨的理论分析并部分刻画了交易策略. 借助黏性解概念, Shreve 和 Soner [113] 完全刻画了无限时域下最优交易策略. 然而他们的方法不能刻画有限时域下的最优交易策略.

(2) 有限时域下交易策略刻画. 对于有限时域下带交易费的投资组合问题, 困难之处在于对应的自由边界 (最优策略) 随时间而变化. Liu 和 Loewenstein [94] 基于 Carr [23] 在研究美式期权时所提出的随机化技巧, 部分刻画了时间依赖的最优投资策略. Dai 和 Yi [54] 借助等价问题 (4.8) 通过偏微分方程方法完全刻画了时间依赖的最优投资策略. Dai 等 [36] 进一步将这个结果延拓到带交易费的有限时域幂效用下投资消费问题. 实质上, 文献 [36,54] 所用到的方法是基于奇异控制与最优停时之间的联系. 进一步地, Dai 等 [52] 和 Dai 等 [39] 将 Dai 和 Yi [54] 的方法分别扩展到有交易费的连续时间均值 - 方差分析问题和带组合约束的最优投资问题.

(3) 多风险资产情形. 较之仅有单个风险资产的最优投资与消费问题, 关于多个风险资产情形的文献相对有限. Akian 等 [1] 对 CRRA (constant relative risk aversion) 投资者面对多个风险资产的问题进行了理论和数值分析. Liu [93] 考虑了 CARA (constant absolute risk aversion) 投资者面对多个不相关风险资产情形下的最优消费和投资策略, 他发现在这种情形下问题可转化为单个风险资产投资消费模型. 当风险资产相关时, 对于 CRRA 投资者和 CARA 投资者, Chen 和 Dai [29] 证明了非交易区都有角点. Dai 和 Zhong [56] 结合惩罚方法和有限差分方法对这类问题进行了数值分析. Bichuch 和 Shreve [12] 考虑了可交易风险资产为两个相关的期货合约情形下的投资消费问题.

(4) 渐近分析. 在无穷时间和单个风险资产的情形下, Shreve 和 Soner [113] 给出了值函数和自由边界关于交易费的渐近分析, 他们得出了交易费 θ 对于值函数和交易边界的影响是 $\theta^{1/3}$ 阶. 但是他们只能处理 CRRA 投资者 $U(w) = w^p$ $(0 < p < 1)$ 的情形. 之后, Janeček 和 Shreve [79] 去掉了对于 p 的假设. Soner 和 Touzi [117] 将此关于交易费的渐近分析拓展到了一般的效用函数和标的资产的价格模型. 后续 Possamaï 等 [108] 将文献 [117] 的结果推广到了高维情形. 其他关于小交易费的渐近分析问题可以参见文献 [5,120] 等.

相较而言, 关于资产相关系数的渐近分析文献较少. Atkinson 和 Ingpochai [4] 考虑了当相关系数和交易费同时接近于 0 的情形的渐近展开. 而 Chen 等 [30] 的渐近分析只需要相关系数接近于 0.

(5) 带固定交易费问题. 在交易中, 投资者除了面对比例交易费, 也可能面对固定交易费 (例如, 每次交易无论数量多少, 都要支付一笔中介费). 在固定交易费下, 投资者将面对一个脉冲控制问题, 其值函数满足拟变分不等式. 在一定假设下, Øksendal 和 Sulem [106] 考虑了该问题并证明了值函数是拟变分不等式问题的唯一黏性解. Altarovici 等 [2] 对更一般情形给出了理论分析. 由于脉冲控制问题的值函数通常没有凸性, 这对研究其自由边界的存在性带来挑战.

除了固定交易费问题, 脉冲控制也被应用于其他金融问题, 如与行为金融相关的处置效用最大化问题 (参见文献 [6,50,75]).

4.2 带资本利得税的投资组合问题

资本利得税对个体的消费投资决策制定有着重要影响. 在证券市场中, 资本利得税往往比交易费高得多. 资本利得税与交易费不同之处在于: (i) 投资者为资本利得纳税, 但所遭受的资本损失会得到税收返还; (ii) 资本利得的纳税额取决于所持股票的购买价格, 即税基 (tax basis), 这导致了很强的路径依赖性.

下面介绍文献 [8,11] 中的模型. 与带交易费的投资消费问题一样, 假设市场有两种资产, 税后利率为 r 的无风险债券以及价格 S_t 服从几何 Brown 运动的股票. 投资者需要支付资本利得税但没有交易费. 在时刻 t 投资者分别持有价值为 X_t 和 Y_t 的无风险债券和股票. 用 K_t 表示投资者在时刻 t 所持有股票的购买价值, 即税基. 用 dL_t 表示 t 时刻购买股票的金额, 而 dM_t 表示 t 时刻出售的股票份额占总份额的比例. 假定税率为 α, 以平均购买成本计算税基变化, 则在时刻 t 卖掉的股票要缴税 $\alpha(Y_{t-}-K_{t-})dM_t$ (若 $Y_t<K_t$, 则表示税收返还), 而由出售股票而导致税基减少 $K_{t-}dM_t$. 在时刻 t 购买的股票不用交税, 但导致税基增长 $K_{t-}dL_t$. 因此, X_t、Y_t 和 K_t 的动态过程为

$$\begin{aligned} dX_t&=(rX_{t-}-C_t)dt-dL_t+[Y_{t-}-\alpha(Y_{t-}-K_{t-})]dM_t,\\ dY_t&=\mu Y_{t-}dt+\sigma Y_{t-}d\mathcal{B}_t+dL_t-Y_{t-}dM_t,\\ dK_t&=dL_t-K_{t-}dM_t, \end{aligned} \tag{4.12}$$

其中 C_t 是消费率.

记 $Z_t=X_t+Y_t-\alpha(Y_t-K_t)=X_t+(1-\alpha)Y_t+\alpha K_t$ 为投资者在时刻 t 的税后清算值. 假设要求税后清算值非负且无卖空行为, 则定义偿付区域为

$$\mathscr{S}=\{(x,y,k)\in\mathbb{R}^3\mid y>0,k>0,z=x+(1-\alpha)y+\alpha k>0\}.$$

给定初始位置 $(X_0,Y_0,K_0)=(x,y,k)\in\mathscr{S}$, 若消费 - 投资策略 $\{(C_t,L_t,M_t)\}_{t\geqslant0}$ 使得满足动态 (4.12) 的过程 (X_t,Y_t,K_t) 始终在 $\overline{\mathscr{S}}$ 内, 则称该策略是允许的. 投资者的目的是选择允许策略以最大化跨期消费的期望效用 $\mathrm{E}[\int_0^\infty \mathrm{e}^{-\beta t}U(C_t)dt]$, 其中, $\beta>0$ 是折现因子, 投资者的效用函数为 $U(C)=C^\gamma/\gamma$, $\gamma<1$, $\gamma\neq0$.

用 $V^*(x,y,k)$ 表示投资者的值函数 5). Ben Tahar 等 [7,8] 证明了值函数 $V^*(x,y,k)$ 是下述变分不等式问题的一个黏性解:

$$\max\{\mathcal{L}u+U^*(u_x),\mathcal{B}u,\mathcal{S}u\}=0,\quad (x,y,k)\in\mathscr{S}, \tag{4.13}$$

其中,

$$\begin{aligned} &\mathcal{L}u=\frac{1}{2}\sigma^2y^2u_{yy}+\mu yu_y+rxu_x-\beta u,\quad U^*(s)=\sup_{c\geqslant0}\{U(c)-cs\},\quad \forall\, s\geqslant0,\\ &\mathcal{B}u=-u_x+u_y+u_k,\quad \mathcal{S}u=[(1-\alpha)y+\alpha k]u_x-yu_y-ku_k. \end{aligned}$$

建模关键 上述模型最早由 Ben Tahar 等 [7,8] 给出, 建模的关键在于采用平均成本计算税基. 该想法最早由 Dammon 等 [59] 在建立带资本利得税的多期离散时间投资消费模型时提出. Dai 等 [49] 进一步延伸到平均持有时间, 以此建立了具有长税和短税市场下的投资消费模型. Dai 等 [48] 考虑了年末交税的投资组合问题. 最近, 该平均成本建模思想也被 Dai 等 [40] 用到有科技进步的工业均衡模型中.

解的非唯一性 可以验证对于任意足够大的常数 A, 形如 $\hat{V}(x,y,z)=Az^\gamma/\gamma$ 的函数都是方程 (4.13) 的黏性解. 该方程黏性解不唯一的原因在于: 当 $y=k=0$ 时, 算子 $\mathcal{S}u\equiv0$, 从而方程 (4.13) 在 $\{y=k=0\}$ 处退化为 $\max\{\mathcal{L}u+U^*(u_x),\mathcal{B}u\}\leqslant0$, 这没有提供足够多的信息来保证解的唯一性. 值得指出的是, 其他类似利用平均成本来建模的问题都会导致解没有唯一性.

5) 本文总是选取合适的参数使得没有资本利得税的投资消费问题值函数是有限的.

由于缺乏唯一性, 一个自然的问题是, 变分不等式问题 (4.13) 哪个解对应值函数? 如何求解该问题得到值函数及最优策略? Bian 等 [11] 考虑了变分不等方程 (4.13) 的惩罚近似方程

$$\mathcal{L}u + U^*(u_x) + \lambda z(\mathcal{B}u)^+ + \lambda(\mathcal{S}u)^+ = 0.$$

他们证明了上述惩罚方程有唯一黏性解 $V(x,y,k;\lambda)$ 且收敛到原始问题的值函数, 即

$$\lim_{\lambda\to\infty} V(x,y,k;\lambda) = V^*(x,y,k).$$

进一步地, 他们证明了 V^* 是方程 (4.13) 的最小黏性解.

尚待解决的问题 由于采用了平均成本, 值函数关于自变量不再是上凸的, 这给理论分析带来了很大的困难. 特别地, 我们无法像交易费问题那样证明交易边界的存在性并刻画交易边界. 此外, Cai 等 [22] 利用渐近分析得到了值函数和交易边界关于小参数的渐近展开, 但如何严格证明该展开的阶也是值得考虑的问题.

4.3 动态公司金融

公司的资本结构、现金管理、股利政策和投资决策是公司金融研究的重要内容. Bolton, Chen 和 Wang [14] (后文简称 BCW) 提出了一个动态的投资、融资、分红和风险管理模型, 该模型扩展了经典的 Hayashi 模型和 Miller-Orr 模型 (参见文献 [74,101]), 它不仅考虑了企业的资本累积过程, 还着重考虑了企业的流动性 (现金) 管理.

下面在风险中性测度下介绍 BCW 模型, 且不考虑债务融资. 企业利用实物资本进行生产, 而投资 I_t 和折旧 δK_t 影响资本存量 K_t 的动态,

$$dK_t = (I_t - \delta K_t)dt, \quad t \geqslant 0.$$

假设企业在 t 时刻的运营收入为 $K_t(\mu dt + \sigma d\mathcal{B}_t)$, 它与资本存量 K_t 成比例, 其中 $\mathcal{B}_t$ 是风险中性测度下的标准 Brown 运动, 用来刻画收入或生产冲击. 企业在进行投资时会面临调整成本 $G(I,K) = K\cdot g(i) = K\cdot\theta i^2/2$, 其中, $i = I/K$, θ 为调整成本参数. 于是, 企业经过时间增量 dt 的营业利润增量 dY_t 满足

$$dY_t = K_t(\mu dt + \sigma d\mathcal{B}_t) - [I_t + G(I_t,K_t)]dt, \quad t \geqslant 0.$$

记 $\{\tau_1,\tau_2,\ldots\}$ 为融资时间, $\{M_1,M_2,\ldots\}$ 为融资数额. 假设企业通过发行新股融得资金 $M_i > 0$, 它所付出的成本为 $\phi K + \gamma M_i$, 其中, 固定成本 ϕK 与企业资本存量 K 成正比, $\gamma > 0$ 表示比例成本参数. 由于固定成本的存在, 所以模型涉及脉冲控制问题. 企业的持有现金动态为

$$\begin{aligned} &dW_t = dY_t + (r-\lambda)W_t dt - dU_t, \quad t \in (\tau_i, \tau_{i+1}), \\ &W_{\tau_i} = W_{\tau_i -} + M_i, \end{aligned}$$

其中, $(r-\lambda)W_t dt$ 刻画了企业的储蓄回报, 参数 $\lambda > 0$ 反映了现金的持有成本, dU_t 表示股利支付. 当企业耗尽其现金 ($W_t = 0$) 时, 它面临两种选择: 要么通过稀释股权再融资以维持经营, 要么清算其资产结束运营. 企业选择投资策略 I、分红策略 U、融资策略 $\nu = \{(\tau_i, M_i)\}$ 及清算时间 τ 来最大化企业利益:

$$P(K_0,W_0) = \sup_{I,U,\nu,\tau} \mathrm{E}\left[\int_0^\tau \mathrm{e}^{-rt}dU_t - \sum_{\tau_i<\tau} \mathrm{e}^{-r\tau_i}(M_i + \phi K + \gamma M_i) + \mathrm{e}^{-r\tau}(lK_\tau + W_\tau)\right],$$

其中 lK_τ 表示企业的清算值.

企业可以通过分红的方式来降低持有过多现金而带来的成本, 从而确保现金的边际价值不低于 1, 即 $P_W \geqslant 1$. 此外, 企业可以在任何时刻进行融资或者清算, 所以企业价值不会低于其即刻融资价值 $P^M(K,W) = \sup_{M>0} P(K,W+M) - M - (\phi K + \gamma M)$ 与即刻清算价值 $lK+W$, 即有 $P(K,W) \geqslant \max\{P^M(K,W), lK+W\}$. 企业除了运用上述的分红、融资和清算策略, 还应该有一个仅使用内部资金而不采取其他行动的区域. 利用最优性可知企业价值 $P(K,W)$ 满足下述变分不等式: 对于 $K>0$, $W>0$, 有

$$\max\{\mathcal{L}P(K,W), 1-P_W(K,W), P^M(K,W)-P(K,W), (lK+W)-P(K,W)\} = 0, \tag{4.14}$$

其中

$$\begin{aligned}\mathcal{L}P(K,W) = \max_I (I-\delta K)P_K + [(r-\lambda)W + \mu K - I - G(I,K)]P_W \\ + \frac{\sigma^2 K^2}{2} P_{WW} - rP(K,W).\end{aligned}$$

投资的一阶条件给出 $1+G_I = P_K(K,W)/P_W(K,W)$. 在无摩擦资本市场中 (即在 Modigliani-Miller 定理成立的条件下), 现金的边际价值 $P_W = 1$, 此时结论与新古典投资理论相吻合: 最优投资在边际 q 等于边际调整成本时达到, 即 $P_K = 1 + G_I(I,K)$. 而 BCW 模型提供了新的洞察: 融资成本越高, 现金的边际价值 P_W 越高, 企业的投资 I 会减少. 变分不等式 (4.14) 刻画了 4 个区域: (1) 无行动区域 ($\mathcal{L}P(K,W)=0$); (2) 分红区域 ($P_W(K,W)=1$); (3) 外部融资区域 ($P(K,W)=P^M(K,W)$); (4) 清算区域 ($P(K,W)=lK+W$).

利用该模型的齐次性质, 有 $P(K,W)=Kp(w)$, $w=W/K$, 可将上述问题 (4.14) 降维为

$$\max\left\{\widetilde{\mathcal{L}}p(w), 1-p'(w), \left(\sup_{m>0} p(w+m) - \phi - (1+\gamma)m\right) - p(w), (l+w)-p(w)\right\} = 0, \quad w>0,$$

其中,

$$\begin{aligned}\widetilde{\mathcal{L}}p(w) = \max_i (i(w)-\delta)(p(w)-wp'(w)) + ((r-\lambda)w + \mu - i(w) - g(i(w)))p'(w) \\ + \frac{\sigma^2}{2}p''(w) - rp(w),\end{aligned}$$

$m=M/K$ 为融资 - 资本比. 企业耗尽现金时必须通过权衡从融资和清算两个选项中择一, 于是赋予边界条件 $p(0) = \max\{\sup_{m>0} p(m) - \phi - (1+\gamma)m, l\}$. 最优外部融资与分红策略可以被公司的现金 - 资本比 w 的一个内生双障碍问题完全刻画.

Bolton 等 [15] 建立了关于受金融约束的公司在不确定情形下的投资、股权再融资、清算和公司储蓄的整合理论, 刻画了公司的内生增长期权、放弃期权和股利政策. 通过引入外部融资成本, 文献 [15] 实际上整合了两方面的文献, 即以 McDonald 和 Siegel [96, 97] 及 Dixit 和 Pindyck [61] 为代表的经典实物期权文献和以 Miller 和 Orr [101] 为代表的公司现金管理文献. 从数学上看, 该模型是一个二维随机控制问题, 公司价值及其决策依赖于运营收入和现金持有两个状态变量, 并且状态空间被内生地划分为互不相交的子区域: 投资区域、分红区域、无行动区域、融资区域和清算区域. Dai 等 [35] 扩展了文献 [14] 的单部门模型, 建立了一个关于多部门企业的流动性管理、股利支付、外部融资和部门出售 (分拆) 以及投资的动态模型. 公司的优化问题综合了奇异控制 (股利支付)、脉冲控制 (外部融资)、最优停时 (部门出售) 和凸控制 (投资) 4 种控制问题. 关于动态公司金融的专著, 可参见文献 [103, 111].

5 结论

本文介绍了金融中一些典型的变分不等式模型, 这些模型主要来自金融衍生品定价、投资组合选择和公司金融中的最优停时或奇异控制问题. 本文可供对该领域有兴趣的研究者参考.

参考文献

1 Akian M, Menaldi J L, Sulem A. On an investment-consumption model with transaction costs. SIAM J Control Optim, 1996, 34: 329–364
2 Altarovici A, Reppen M, Soner H M. Optimal consumption and investment with fixed and proportional transaction costs. SIAM J Control Optim, 2017, 55: 1673–1710
3 Anderson R W, Sundaresan S. Design and valuation of debt contracts. Rev Financ Stud, 1996, 9: 37–68
4 Atkinson C, Ingpochai P. The influence of correlation on multi-asset portfolio optimization with transaction costs. J Comput Finance, 2006, 10: 53–96
5 Atkinson C, Wilmott P. Portfolio management with transaction costs: An asymptotic analysis of the Morton and Pliska model. Math Finance, 1995, 5: 357–367
6 Barberis N, Xiong W. Realization utility. J Financ Econ, 2012, 104: 251–271
7 Ben Tahar I, Soner H M, Touzi N. The dynamic programming equation for the problem of optimal investment under capital gains taxes. SIAM J Control Optim, 2007, 46: 1779–1801
8 Ben Tahar I, Soner H M, Touzi N. Merton problem with taxes: Characterization, computation, and approximation. SIAM J Financial Math, 2010, 1: 366–395
9 Bensoussan A, Friedman A. Nonlinear variational inequalities and differential games with stopping times. J Funct Anal, 1974, 16: 305–352
10 Bensoussan A, Friedman A. Nonzero-sum stochastic differential games with stopping times and free boundary problems. Trans Amer Math Soc, 1977, 231: 275–327
11 Bian B, Chen X, Dai M, et al. Penalty method for portfolio selection with capital gains tax. Math Finance, 2021, 31: 1013–1055
12 Bichuch M, Shreve S. Utility maximization trading two futures with transaction costs. SIAM J Financial Math, 2013, 4: 26–85
13 Black F, Scholes M. The pricing of options and corporate liabilities. J Polit Econ, 1973, 81: 637–654
14 Bolton P, Chen H, Wang N. A unified theory of Tobin's q, corporate investment, financing, and risk management. J Finance, 2011, 66: 1545–1578
15 Bolton P, Wang N, Yang J. Investment under uncertainty with financial constraints. J Econom Theory, 2019, 184: 104912
16 Brennan M J, Schwartz E S. Convertible bonds: Valuation and optimal strategies for call and conversion. J Finance, 1977, 32: 1699–1715
17 Brennan M J, Schwartz E S. Analyzing convertible bonds. J Financial Quant Anal, 1980, 15: 907–929
18 Brennan M J, Schwartz E S. Arbitrage in stock index futures. J Bus, 1990, 63: S7–S31
19 Broadie M, Chernov M, Sundaresan S. Optimal debt and equity values in the presence of Chapter 7 and Chapter 11. J Finance, 2007, 62: 1341–1377
20 Broadie M, Detemple J. The valuation of American options on multiple assets. Math Finance, 1997, 7: 241–286
21 Bunch D S, Johnson H. A simple and numerically efficient valuation method for American puts using a modified Geske-Johnson approach. J Finance, 1992, 47: 809–816
22 Cai J, Chen X, Dai M. Portfolio selection with capital gains tax, recursive utility, and regime switching. Manage Sci, 2018, 64: 2308–2324
23 Carr P. Randomization and the American put. Rev Financ Stud, 1998, 11: 597–626
24 Carr P, Jarrow R, Myneni R. Alternative characterizations of American put options. Math Finance, 1992, 2: 87–106
25 Chen N, Dai M, Wan X. A nonzero-sum game approach to convertible bonds: Tax benefit, bankruptcy cost, and early/late calls. Math Finance, 2013, 23: 57–93
26 Chen X, Chadam J. A mathematical analysis of the optimal exercise boundary for American put options. SIAM J Math Anal, 2007, 38: 1613–1641
27 Chen X, Chadam J, Jiang L, et al. Convexity of the exercise boundary of the American put option on a zero dividend asset. Math Finance, 2008, 18: 185–197

28 Chen X, Cheng H, Chadam J. Nonconvexity of the optimal exercise boundary for an American put option on a dividend-paying asset. Math Finance, 2013, 23: 169–185

29 Chen X, Dai M. Characterization of optimal strategy for multiasset investment and consumption with transaction costs. SIAM J Financial Math, 2013, 4: 857–883

30 Chen X, Dai M, Jiang W, et al. Asymptotic analysis of long-term investment with two illiquid and correlated assets. Math Finance, 2022, 32: 1133–1169

31 Chen X, Yi F, Wang L. American lookback option with fixed strike price—2-D parabolic variational inequality. J Differential Equations, 2011, 251: 3063–3089

32 Cheuk T H F, Vorst T. Shout floors. Https://ssrn.com/abstract=7633, 1996

33 Chevalier-Roignant B, Trigeorgis L. Competitive Strategy: Options and Games. Cambridge: MIT Press, 2011

34 Dai M. A closed-form solution for perpetual American floating strike lookback options. J Comput Finance, 2000, 4: 63–68

35 Dai M, Giroud X, Jiang W, et al. A q theory of internal capital markets. Https://www.nber.org/papers/w27931, 2020

36 Dai M, Jiang L, Li P, et al. Finite horizon optimal investment and consumption with transaction costs. SIAM J Control Optim, 2009, 48: 1134–1154

37 Dai M, Jiang L, Lin J. Pricing corporate debt with finite maturity and Chapter 11 proceedings. Quant Finance, 2013, 13: 1855–1861

38 Dai M, Jiang Z, Wang N. Strategic investment under uncertainty with first- and second-mover advantages. Https://ssrn.com/abstract=4314258, 2022

39 Dai M, Jin H, Liu H. Illiquidity, position limits, and optimal investment for mutual funds. J Econom Theory, 2011, 146: 1598–1630

40 Dai M, Kou S, Qian S, et al. Bitcoin mining, electricity consumption, and climate damages. Https://ssrn.com/abstract=3994797, 2022

41 Dai M, Kwok Y K. Knock-in American options. J Futures Mark, 2004, 24: 179–192

42 Dai M, Kwok Y K. American options with lookback payoff. SIAM J Appl Math, 2005, 66: 206–227

43 Dai M, Kwok Y K. Characterization of optimal stopping regions of American Asian and lookback options. Math Finance, 2006, 16: 63–82

44 Dai M, Kwok Y K. Optimal multiple stopping models of reload options and shout options. J Econ Dyn Control, 2008, 32: 2269–2290

45 Dai M, Kwok Y K, Wu L X. Options with multiple reset rights. Int J Theor Appl Finance, 2003, 6: 637–653

46 Dai M, Kwok Y K, Wu L X. Optimal shouting policies of options with strike reset right. Math Finance, 2004, 14: 383–401

47 Dai M, Kwok Y K, You H. Intensity-based framework and penalty formulation of optimal stopping problems. J Econ Dyn Control, 2007, 31: 3860–3880

48 Dai M, Lei Y, Liu H. Optimal tax-timing strategy in the presence of transaction costs. Https://ssrn.com/abstract=3714293, 2022

49 Dai M, Liu H, Yang C, et al. Optimal tax timing with asymmetric long-term/short-term capital gains tax. Rev Financ Stud, 2015, 28: 2687–2721

50 Dai M, Qin C, Wang N. Portfolio rebalancing with realization utility. Https://ssrn.com/abstract=4051255, 2022

51 Dai M, Xu Z Q. Optimal redeeming strategy of stock loans with finite maturity. Math Finance, 2010, 21: 775–793

52 Dai M, Xu Z Q, Zhou X Y. Continuous-time Markowitz's model with transaction costs. SIAM J Financial Math, 2010, 1: 96–125

53 Dai M, Yang Z, Zhang Q, et al. Optimal trend following trading rules. Math Oper Res, 2016, 41: 626–642

54 Dai M, Yi F. Finite-horizon optimal investment with transaction costs: A parabolic double obstacle problem. J Differential Equations, 2009, 246: 1445–1469

55 Dai M, Zhang Q, Zhu Q J. Trend following trading under a regime switching model. SIAM J Financial Math, 2010, 1: 780–810

56 Dai M, Zhong Y. Penalty methods for continuous-time portfolio selection with proportional transaction costs. J Comput Finance, 2010, 13: 1–31

57 Dai M, Zhong Y. Optimal stock selling/buying strategy with reference to the ultimate average. Math Finance, 2012, 22: 165–184

58 Dai M, Zhong Y, Kwok Y K. Optimal arbitrage strategies on stock index futures under position limits. J Futures Mark, 2011, 31: 394–406

59 Dammon R M, Spatt C S, Zhang H H. Optimal consumption and investment with capital gains taxes. Rev Financ Stud, 2001, 14: 583–616
60 Davis M H A, Norman A R. Portfolio selection with transaction costs. Math Oper Res, 1990, 15: 676–713
61 Dixit A K, Pindyck R S. Investment under Uncertainty. Princeton: Princeton University Press, 1994
62 Duffie J D, Harrison J M. Arbitrage pricing of Russian options and perpetual lookback options. Ann Appl Probab, 1993, 3: 641–651
63 Dybvig P H, Loewenstein M. Employee reload options: Pricing, hedging, and optimal exercise. Rev Financ Stud, 2003, 16: 145–171
64 Ekström E. Convexity of the optimal stopping boundary for the American put option. J Math Anal Appl, 2004, 299: 147–156
65 Fleming W H, Soner H M. Controlled Markov Processes and Viscosity Solutions, 2nd ed. Stochastic Modelling and Applied Probability, vol. 25. New York: Springer, 2006
66 Forsyth P A, Vetzal K R. Quadratic convergence for valuing American options using a penalty method. SIAM J Sci Comput, 2002, 23: 2095–2122
67 Friedman A. Variational Principles and Free Boundary Problems. New York: John Wiley & Sons, 1982
68 Friedman A, Jensen R. Convexity of the free boundary in the Stefan problem and in the dam problem. Arch Ration Mech Anal, 1978, 67: 1–24
69 Fudenberg D, Tirole J. Game Theory. Cambridge: MIT Press, 1991
70 Gao B, Huang J Z, Subrahmanyam M. The valuation of American barrier options using the decomposition technique. J Econ Dyn Control, 2000, 24: 1783–1827
71 Goldman M B, Sosin H B, Gatto M A. Path dependent options: "Buy at the low, sell at the high". J Finance, 1979, 34: 1111–1127
72 Grenadier S R. The strategic exercise of options: Development cascades and overbuilding in real estate markets. J Finance, 1996, 51: 1653–1679
73 Haug E G. Closed form valuation of American barrier options. Int J Theor Appl Finance, 2001, 4: 355–359
74 Hayashi F. Tobin's marginal q and average q: A neoclassical interpretation. Econometrica, 1982, 50: 213–224
75 He X, Yang L. Realization utility with adaptive reference points. Math Finance, 2019, 29: 409–447
76 He Z. Dynamic capital structure and related models. Https://rodneywhitecenter.wharton.upenn.edu/wp-content/uploads/2019/06/He.Lelandmodels_FTGWharton2019.pdf, 2019
77 Ingersoll J E Jr. A contingent-claims valuation of convertible securities. J Financ Econ, 1977, 4: 289–321
78 Jacka S D. Optimal stopping and the American put. Math Finance, 1991, 1: 1–14
79 Janeček K, Shreve S E. Asymptotic analysis for optimal investment and consumption with transaction costs. Finance Stoch, 2004, 8: 181–206
80 Jiang L. Analysis of pricing American options on the maximum (minimum) of two risk assets. Interfaces Free Bound, 2002, 4: 27–46
81 Jiang L, Bian B, Yi F. A parabolic variational inequality arising from the valuation of fixed rate mortgages. European J Appl Math, 2005, 16: 361–383
82 Jiang L, Dai M. Convergence of the explicit difference scheme and the binomial tree method for American options. J Comput Math, 2004, 22: 371–380
83 Jiang L, Dai M. Convergence of binomial tree methods for European/American path-dependent options. SIAM J Numer Anal, 2004, 42: 1094–1109
84 Kallsen J, Kühn C. Convertible bonds: Financial derivatives of game type. In: Exotic Option Pricing and Advanced Lévy Models. Chichester: John Wiley & Sons, 2005, 277–292
85 Karatzas I, Shreve S E. Methods of Mathematical Finance. Probability Theory and Stochastic Modelling, vol. 39. New York: Springer, 1998
86 Kifer Y. Game options. Finance Stoch, 2000, 4: 443–463
87 Kuske R A, Keller J B. Optimal exercise boundary for an American put option. Appl Math Finance, 1998, 5: 107–116
88 Lai T L, Lim T W. Singular stochastic control in optimal investment and hedging in the presence of transaction costs. In: Probability, Statistics and Their Applications: Papers in Honor of Rabi Bhattacharya. Lecture Notes-Monograph Series, vol. 41. Beachwood: Institute of Mathematical Statistics, 2003, 209–228
89 Leland H E. Corporate debt value, bond covenants, and optimal capital structure. J Finance, 1994, 49: 1213–1252
90 Levin J. Wars of attrition. Https://web.stanford.edu/~jdlevin/Econ%20286/Wars%20of%20Attrition.pdf, 2004
91 Liang J, Hu B, Jiang L. Optimal convergence rate of the binomial tree scheme for American options with jump diffusion and their free boundaries. SIAM J Financial Math, 2010, 1: 30–65

92 Liang J, Hu B, Jiang L, et al. On the rate of convergence of the binomial tree scheme for American options. Numer Math, 2007, 107: 333–352
93 Liu H. Optimal consumption and investment with transaction costs and multiple risky assets. J Finance, 2004, 59: 289–338
94 Liu H, Loewenstein M. Optimal portfolio selection with transaction costs and finite horizons. Rev Financ Stud, 2002, 15: 805–835
95 Magill M J P, Constantinides G M. Portfolio selection with transactions costs. J Econom Theory, 1976, 13: 245–263
96 McDonald R, Siegel D. The value of waiting to invest. Q J Econ, 1986, 101: 707–727
97 McDonald R L, Siegel D R. Investment and the valuation of firms when there is an option to shut down. Internat Econom Rev, 1985, 26: 331–349
98 McKean H. A free boundary problem for the heat equation arising from a problem of mathematical economics. Ind Manag Rev, 1965, 6: 32–39
99 Merton R C. Optimum consumption and portfolio rules in a continuous-time model. J Econom Theory, 1971, 3: 373–413
100 Merton R C. Continuous-Time Finance. Cambridge: Basil Blackwell, 1992
101 Miller M H, Orr D. A model of the demand for money by firms. Q J Econ, 1966, 80: 413–435
102 Modigliani F, Miller M H. The cost of capital, corporation finance and the theory of investment. Am Econ Rev, 1958, 48: 261–297
103 Moreno-Bromberg S, Rochet J C. Continuous-Time Models in Corporate Finance, Banking, and Insurance: A User's Guide. Princeton: Princeton University Press, 2018
104 Myneni R. The pricing of the American option. Ann Appl Probab, 1992, 2: 1–23
105 Øksendal B. Stochastic Differential Equations. An Introduction with Applications. Berlin-Heidelberg: Springer, 2003
106 Øksendal B, Sulem A. Optimal consumption and portfolio with both fixed and proportional transaction costs. SIAM J Control Optim, 2002, 40: 1765–1790
107 Pascucci A. Free boundary and optimal stopping problems for American Asian options. Finance Stoch, 2007, 12: 21–41
108 Possamaï D, Soner H M, Touzi N. Homogenization and asymptotics for small transaction costs: The multidimensional case. Comm Partial Differential Equations, 2015, 40: 2005–2046
109 Qian X S, Jiang L S, Xu C L, et al. Explicit formulas for pricing of callable mortgage-backed securities in a case of prepayment rate negatively correlated with interest rates. J Math Anal Appl, 2012, 393: 421–433
110 Qian X S, Xu C L, Jiang L S, et al. Convergence of the binomial tree method for American options in a jump-diffusion model. SIAM J Numer Anal, 2005, 42: 1899–1913
111 Sagliaschi U, Savona R. Dynamical Corporate Finance. An Equilibrium Approach. Cham: Springer, 2021
112 Shiryaev A, Xu Z, Zhou X Y. Thou shalt buy and hold. Quant Finance, 2008, 8: 765–776
113 Shreve S E, Soner H M. Optimal investment and consumption with transaction costs. Ann Appl Probab, 1994, 4: 609–692
114 Sîrbu M, Pikovsky I, Shreve S E. Perpetual convertible bonds. SIAM J Control Optim, 2004, 43: 58–85
115 Sîrbu M, Shreve S E. A two-person game for pricing convertible bonds. SIAM J Control Optim, 2006, 45: 1508–1539
116 Smit H, Trigeorgis L. Strategic Investment: Real Options and Games. Princeton: Princeton University Press, 2004
117 Soner H M, Touzi N. Homogenization and asymptotics for small transaction costs. SIAM J Control Optim, 2013, 51: 2893–2921
118 Stamicar R, Sevcovic D, Chadam J. The early exercise boundary for the American put near expiry: Numerical approximation. Can Appl Math Q, 1999, 7: 427–444
119 Trigeorgis L. Real options: Managerial Flexibility and Strategy in Resource Allocation. Cambridge: MIT Press, 1996
120 Whalley A E, Wilmott P. An asymptotic analysis of an optimal hedging model for option pricing with transaction costs. Math Finance, 1997, 7: 307–324
121 Wilmott P, Dewynne J, Howison S. Option Pricing: Mathematical Models and Computation. Oxford: Oxford Financial Press, 1994
122 Wonham W M. Some applications of stochastic differential equations to optimal nonlinear filtering. J Soc Indust Appl Math Ser Control, 1964, 2: 347–369
123 Wu S, Jiang L, Liang J. Intensity-based models for pricing mortgage-backed securities with repayment risk under a CIR process. Int J Theor Appl Finance, 2012, 15: 1250021
124 Xia J, Zhou X Y. Stock loans. Math Finance, 2007, 17: 307–317
125 Yang Z. The regularity of the free boundary for strike reset option. Acta Math Sci Ser B Engl Ed, 2010, 30: 1721–1729

126 Yang Z, Yi F, Dai M. A parabolic variational inequality arising from the valuation of strike reset options. J Differential Equations, 2006, 230: 481–501

Variational inequality problems in finance

Min Dai, Heqing Huang & Shuaijie Qian

Abstract Many decision problems in modern finance can be mathematically formulated as optimal stopping-time or singular stochastic control problems. These problems belong to variational inequality problems from the point of view of partial differential equations, and the corresponding free bounds correspond to optimal strategies. This review gives some typical variational inequality models in finance and related results. These models come from three important research directions in modern finance: financial derivatives pricing, portfolio selection, and corporate finance.

Keywords **variational inequality, optimal stopping, singular control, free boundary, derivatives pricing, portfolio selection, corporate finance**

MSC(2020) **93E20, 35Q93, 91G10**

doi: 10.1360/SSM-2023-0065