中国科学: 数学　2019 年　第 49 卷　第 7 期: 991～1008
SCIENTIA SINICA Mathematica
《中国科学》杂志社 SCIENCE CHINA PRESS

论　文

带变异的分枝交互粒子系统和相关的极限定理

马儒刚

中央财经大学统计与数学学院, 北京 100081
E-mail: marg@cufe.edu.cn

收稿日期: 2018-02-24; 接受日期: 2018-05-14; 网络出版日期: 2019-03-07
国家自然科学基金 (批准号: 11501585) 和中央财经大学学科建设经费资助项目

摘要　本文用 Poisson 随机测度驱动的随机积分方程构造一类带变异的分枝交互粒子系统. 首先证明在某些条件下其重整化极限是同时具有局部和非局部分枝机制的超过程, 其底运动是平凡的; 其次证明在另外的一些条件下, 其重整化极限是具有局部分枝机制和非平凡底运动的超过程.

关键词　分枝粒子系统　交互　变异　随机积分方程　非局部分枝机制　重整化极限

MSC (2010) 主题分类　60H20, 60J80

1　引言

分枝粒子系统有着广泛的应用, 在一定的条件下, 其重整化过程会收敛到超过程, 参见文献 [1, 第 4 章]. 在研究局部正则的人口模型中, 文献 [2] 用 Poisson 随机测度驱动的随机方程给出了带竞争的分枝粒子系统的轨道表示, 并且证明了在不同的条件下重整化过程会收敛到不同的超过程. 文献 [3] 对文献 [2] 中的模型进一步地推广, 考虑了粒子会变异的情形, 即新出生的粒子以一定的概率没有继承 "母亲" 的特征而产生了变异, 并且个体的出生率、死亡率和变异率均依赖于它们的特征与粒子之间的相互作用. 文献 [2,3] 也证明了不同的重整化过程会收敛到不同的超过程. 由于文献 [2,3] 都只考虑了一个粒子每次只能产生一个后代的情形, 所以最后得到的作为极限的超过程具有连续的轨道. 本文的目的是将文献 [3] 中考虑的模型推广到一个粒子每次可以产生任意多个后代的情形, 从而得到不连续的极限超过程.

借鉴文献 [3], 我们用随机方程的方法构造一般的带变异的分枝交互粒子系统. 实际上, 由文献 [1, 第 99 页] 可知, 粒子的变异可以看作粒子进行了非局部分枝. 为简单起见, 假设粒子的特征取值于实数空间 $\mathbb{R}$. 假设粒子的出生率、死亡率和变异率不仅依赖于它们自己的特征值, 还依赖于整个系统中的粒子. 本文第 2 节详细地介绍这类模型, 并用 Poisson 随机测度驱动的随机积分方程给出这类过程的轨道刻画, 并证明与之相关的一些性质. 第 3 节证明对这类过程进行重整化之后在不同的条件下有不同的极限. 由于粒子之间的交互作用破坏了它们的独立性, 再加上一个粒子一次可以产生任意多个

英文引用格式: Ma R G. Branching interacting particle systems with mutation and related limit theorems (in Chinese). Sci Sin Math, 2019, 49: 991–1008, doi: 10.1360/SCM-2018-0149

© 2019《中国科学》杂志社　

后代使得极限超过程没有连续的轨道, 这便使得我们不能用经典的方法确定重整化之后取极限得到的超过程的分布的唯一性. 为此, 我们借助文献 [4–6] 中随机方程的方法来解决这个问题.

记号 令 $\mathbb{N}=\{0,1,2,\ldots\}$, $\mathbb{N}_+=\mathbb{N}\backslash\{0\}$, $\mathbb{R}_+=[0,\infty)$. 对任给拓扑空间 V, 令 $B(V)$ 是 V 上的有界可测函数组成的集合. 令 $D(\mathbb{R}_+;V)$ 表示 $\mathbb{R}_+$ 到 V 上的左极右连轨道组成的空间并赋予 Skorokhod 拓扑. 令 $B(\mathbb{R})$ 赋予上确界范数 $\|\cdot\|$. 令 $C(\mathbb{R})$ 表示所有有界连续函数的集合, $C_0(\mathbb{R})$ 和 $C^2(\mathbb{R})$ 分别表示 $C(\mathbb{R})$ 中在无穷远点取值为 0 的函数和有连续的二阶导数的函数组成的集合, $C_c^2(\mathbb{R})$ 表示 $C^2(\mathbb{R})$ 中有紧支撑的函数的集合. 用上标 “+” 表示函数空间中的非负函数组成的集合, 例如, $B(\mathbb{R})^+$. 令 $M(\mathbb{R})$ 表示 $\mathbb{R}$ 上的有限测度组成的空间并赋予弱收敛拓扑, $M_1(\mathbb{R})$ 表示 $\mathbb{R}$ 上的概率测度. 对任意的 $\mu\in M(\mathbb{R})$ 和 $f\in B(\mathbb{R})$, 令 $\langle\mu,f\rangle=\int_{\mathbb{R}}fd\mu$. 对任意的 $b\geqslant a$, 令 $\int_a^b=\int_{(a,b]}$.

2 带变异的分枝交互粒子系统

本节将用带跳的随机积分方程构造带变异的分枝交互粒子系统并给出一些性质.

令 $M_\delta(\mathbb{R})$ 表示 $M(\mathbb{R})$ 中所有有限点测度的集合, 即

$$M_\delta(\mathbb{R})=\left\{\sum_{i=1}^n\delta_{x_i},n\geqslant 0,x_1,\ldots,x_n\in\mathbb{R}\right\},$$

其中 δ_x 表示质量集中在 x 上的 Dirac 测度. 令 $I(t)\in\mathbb{N}$ 表示 t 时刻的粒子数量, $x_t^1,\ldots,x_t^{I(t)}$ 表示它们的特征值. 定义

$$\nu_t=\sum_{i=1}^{I(t)}\delta_{x_t^i},$$

则 ν_t 取值于 $M_\delta(\mathbb{R})$, 描述了在 t 时刻粒子特征的分布情况.

给一个粒子系统 ν 和特征 $x\in\mathbb{R}$, 令 $b(x,\nu)$ 和 $d(x,\nu)$ 分别表示特征为 x 的粒子的出生率和死亡率. 例如, 在文献 [3] 中, $b(x,\nu)=b(x,\sum_{i=1}^I V(x-x^i))$, $d(x,\nu)=d(x,\sum_{i=1}^I U(x-x^i))$, 其中 V 和 U 为特定的函数. 令 $\rho(x,\nu)$ 表示特征为 x 的粒子产生的后代的特征会发生变异的概率. 令 $\pi(x,\nu,\theta)d\theta$ 和 $m(x,\nu,\theta,z)dz$ 均为概率分布, 用来刻画粒子变异之后特征的分布情况. 为了讨论粒子每次产生的后代数量, 引入以下两个母函数. 令 $g\in B(\mathbb{R}\times M(\mathbb{R})\times[-1,1])$ 和 $h\in B(\mathbb{R}\times M(\mathbb{R})\times\mathbb{R}\times[-1,1])$ 满足对任意的 $x,\theta\in\mathbb{R}$ 和 $\nu\in M(\mathbb{R})$, 有

$$g(x,\nu,z)=\sum_{j=0}^\infty p_j(x,\nu)z^j,\quad z\in[-1,1],$$
$$h(x,\nu,\theta,z)=\sum_{j=0}^\infty q_j(x,\nu,\theta)z^j,\quad z\in[-1,1].$$

另外, 假设

$$\bar{g}:=\sup_{x,\nu}{g_z}'(x,\nu,1)<\infty,$$
$$\bar{h}:=\sup_{x,\nu,\theta}{h_z}'(x,\nu,\theta,1)<\infty.$$

一个参数为 (b,d,ρ,m,g,h) 的带变异的分枝交互粒子系统可以大致地描述如下:

(1) $\nu_0 \in M_\delta(\mathbb{R})$ 表示粒子系统在 0 时刻的配置.

(2) 粒子可以自然死亡或者在竞争的压力下死亡, 所以粒子的死亡率 d 既依赖于其特征还依赖于整个粒子系统 ν_t. 对于一个在时刻 $r \geqslant 0$ 存活的特征为 x 的粒子, 其在 $[r,t)$ 期间仍存活的条件概率为 $\exp\{-\int_r^t d(x,\nu_s)ds\}$.

(3) 粒子的出生率为 b. 对于一个特征为 x 的粒子, 以 $1-\rho(x,\nu)$ 的概率产生的后代不会发生变异, 特征仍为 x, 产生的后代数量是由母函数 $g(x,\nu,\cdot)$ 确定的随机变量; 而以概率 $\rho(x,\nu)$ 后代的特征会发生变异. 一旦变异发生, 会首先依据概率分布 $\pi(x,\nu,\theta)d\theta$ 选择一个 θ, 从而就确定了一个概率分布 $m(x,\nu,\theta,z)dz$. 粒子依据母函数 $h(x,\nu,\theta,\cdot)$ 产生随机个后代, 然后这些后代再依据事先选好的概率分布 $m(x,\nu,\theta,z)dz$ 各自独立地选择特征.

由文献 [1, 第 99 页], 上述模型实际上可以看成是参数为 (b,d,ρ,π,m,g,h) 的分枝交互粒子系统, 其中特征为 x 的粒子以概率 $1-\rho(x,\nu)$ 进行局部分枝, 而以概率 $\rho(x,\nu)$ 进行非局部分枝. 为了进一步地刻画非局部分枝, 引入以下记号:

记 $\widehat{\mathbb{R}} = \mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\cdots$. 对任意的 $(x,\nu,\theta)\in\mathbb{R}\times M(\mathbb{R})\times\mathbb{R}$ 和 $\widehat{z}:=(z_1,z_2,\ldots)\in\widehat{\mathbb{R}}$, 记

$$\widehat{m}(x,\nu,\theta,\widehat{z}) = m(x,\nu,\theta,z_1)\times m(x,\nu,\theta,z_2)\times\cdots.$$

下面给出带变异的分枝交互粒子系统的严格定义.

定义 2.1 称一个取值于 $M_\delta(\mathbb{R})$ 的 Markov 过程为以 (b,d,ρ,π,m,g,h) 为参数的带变异的分枝交互粒子系统, 如果它的生成元 L 满足: 对任意的 $\phi\in B(\mathbb{R})$, 都有

$$\begin{aligned} L\phi(\nu) &= \int_{\mathbb{R}}\nu(dx)\bigg[b(x,\nu)(1-\rho(x,\nu))\sum_{j=0}^{\infty}(\phi(\nu+j\delta_x)-\phi(\nu))p_j(x,\nu)\bigg] \\ &\quad+\int_{\mathbb{R}}\nu(dx)\bigg[b(x,\nu)\rho(x,\nu)\int_{\mathbb{R}}d\theta\pi(x,\nu,\theta) \\ &\quad\times\sum_{j=0}^{\infty}q_j(x,\nu,\theta)\int_{\widehat{\mathbb{R}}}\bigg(\phi\bigg(\nu+\sum_{l=1}^{j}\delta_{z_l}\bigg)-\phi(\nu)\bigg)\widehat{m}(x,\nu,\theta,\widehat{z})d\widehat{z}\bigg] \\ &\quad+\int_{\mathbb{R}}\nu(dx)[d(x,\nu)(\phi(\nu-\delta_x)-\phi(\nu))]. \end{aligned} \tag{2.1}$$

上面等式右端的第一项刻画了粒子产生没有变异的后代的情形, 第二项刻画了粒子产生变异的后代的情形, 而第三项则刻画了粒子自然死亡或由于竞争而死亡的情形.

假设 $b\in B(\mathbb{R}\times M(\mathbb{R}))$ 并且上界为 $\bar{b}>0$. 令 $n(di)$ 表示 $\mathbb{N}$ 上的计数测度:

$$n(di)=\sum_{k=0}^{\infty}\delta_k(di).$$

令 $(\Omega,\mathscr{F},\mathscr{F}_t,\mathrm{P})$ 为完备的概率空间. 引入三个相互独立的 Poisson 随机测度:

(1) $N_1(ds,di,dj,du)$ 是 $(0,\infty)\times\mathbb{N}^2\times(0,\infty)$ 上强度为 $dsn(di)n(dj)du$ 的 Poisson 随机测度 (用来刻画没有变异的后代粒子);

(2) $N_2(ds,di,d\theta,dj,d\widehat{z},du)$ 是 $(0,\infty)\times\mathbb{N}\times\mathbb{R}\times\mathbb{N}\times\widehat{\mathbb{R}}\times(0,\infty)$ 上强度为 $dsn(di)d\theta n(dj)d\widehat{z}du$ 的 Poisson 随机测度 (用来刻画变异的后代粒子);

(3) $N_0(ds,di,du)$ 是 $(0,\infty)\times\mathbb{N}\times(0,\infty)$ 上强度为 $dsn(di)du$ 的 Poisson 随机测度 (用来刻画粒子的死亡).

定义从 $M_\delta(D)$ 到 $\widehat{\mathbb{R}}$ 上的映射 $h=(h_1,\ldots,h_k,\ldots)$:

$$h\bigg(\sum_{i=1}^n\delta_{x_i}\bigg)=(x_{\sigma(1)},\ldots,x_{\sigma(n)},0,\ldots,0,\ldots),$$

其中 $x_{\sigma(1)}\leqslant\cdots\leqslant x_{\sigma(n)}$. 此处 h 的作用是为了能够把 $\nu\in M_\delta(D)$ 描述的粒子系统中的粒子按照均匀分布提取出来, 即如果从 $\{1,\ldots,\langle\nu,1\rangle\}$ 中均匀地选出了某个 i, 则我们就选择了粒子 $h_i(\nu)$.

对于一个空间 V 以及任意 $\mathbb{R}\times M(\mathbb{R})$ 或 $\mathbb{R}\times M(\mathbb{R})\times V$ 上的函数 F, 方便起见, 记 $F(i,\nu)=F(h_i(\nu),\nu)$ 或 $F(i,\nu,\cdot)=F(h_i(\nu),\nu,\cdot)$. 设 ν_0 为取值于 $M_\delta(\mathbb{R})$ 的随机变量并且满足 $\mathrm{E}(\langle\nu_0,1\rangle)<\infty$, 考虑下面随机积分方程:

$$\begin{aligned}\nu_t=\nu_0&+\int_0^t\int_{\mathbb{N}}\int_{\mathbb{N}}\int_0^\infty 1_{\{1\leqslant i\leqslant\langle\nu_{s-},1\rangle\}}1_{\{u\leqslant b(i,\nu_{s-})(1-\rho(i,\nu_{s-}))p_j(i,\nu_{s-})\}}j\delta_{h_i(\nu_{s-})}N_1(ds,di,dj,du)\\&+\int_0^t\int_{\mathbb{N}}\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{N}}\int_{\widehat{\mathbb{R}}}\int_0^\infty 1_{\{1\leqslant i\leqslant\langle\nu_{s-},1\rangle\}}1_{\{u\leqslant b(i,\nu_{s-})\rho(i,\nu_{s-})\pi(i,\nu_{s-},\theta)q_j(i,\nu_{s-},\theta)\widehat{m}(i,\nu_{s-},\theta,\widehat{z})\}}\\&\times\sum_{l=1}^j\delta_{z_l}N_2(ds,di,d\theta,dj,d\widehat{z},du)\\&-\int_0^t\int_{\mathbb{N}}\int_0^\infty 1_{\{1\leqslant i\leqslant\langle\nu_{s-},1\rangle\}}1_{\{u\leqslant d(i,\nu_{s-})\}}\delta_{h_i(\nu_{s-})}N_0(ds,di,du).\end{aligned}\tag{2.2}$$

定义 2.2 称一个取值于 $M_\delta(\mathbb{R})$ 的随机过程 $\{\nu_t:t\geqslant0\}$ 为方程 (2.2) 的解, 如果它是 $(\mathscr{F}_t)$ 适应的左极右连过程且对任意 $t\geqslant0$ 都几乎必然地满足方程 (2.2).

命题 2.1 设 $\{\nu_t:t\geqslant0\}$ 是方程 (2.2) 的一个解, 则它是生成元满足 (2.1) 的 Markov 过程, 即 $\{\nu_t:t\geqslant0\}$ 是以 (b,d,ρ,π,m,g,h) 为参数的带变异的分枝交互粒子系统.

证明 对任意的 $\phi\in B(M_\delta(\mathbb{R}))$, 由 (2.2) 和 Itô 公式, 可得

$$\begin{aligned}\phi(\nu_t)=\phi(\nu_0)&+\int_0^t\int_{\mathbb{N}}\int_{\mathbb{N}}\int_0^\infty(\phi(\nu_{s-}+j\delta_{h_i(\nu_{s-})})-\phi(\nu_{s-}))1_{\{1\leqslant i\leqslant\langle\nu_{s-},1\rangle\}}\\&\times 1_{\{u\leqslant b(i,\nu_{s-})(1-\rho(i,\nu_{s-}))p_j(i,\nu_{s-})\}}N_1(ds,di,dj,du)\\&+\int_0^t\int_{\mathbb{N}}\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{N}}\int_{\widehat{\mathbb{R}}}\int_0^\infty\bigg(\phi\bigg(\nu_{s-}+\sum_{l=1}^j\delta_{z_l}\bigg)-\phi(\nu_{s-})\bigg)1_{\{1\leqslant i\leqslant\langle\nu_{s-},1\rangle\}}\\&\times 1_{\{u\leqslant b(i,\nu_{s-})\rho(i,\nu_{s-})\pi(i,\nu_{s-},\theta)q_j(i,\nu_{s-},\theta)\widehat{m}(i,\nu_{s-},\theta,\widehat{z})\}}N_2(ds,di,d\theta,dj,d\widehat{z},du)\\&+\int_0^t\int_{\mathbb{N}}\int_0^\infty(\phi(\nu_{s-}-\delta_{h_i(\nu_{s-})})-\phi(\nu_{s-}))1_{\{1\leqslant i\leqslant\langle\nu_{s-},1\rangle\}}1_{\{u\leqslant d(i,\nu_{s-})\}}N_0(ds,di,du).\end{aligned}\tag{2.3}$$

两边取期望得

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(\phi(\nu_t))=\mathrm{E}(\phi(\nu_0))&+\int_0^t ds\mathrm{E}\bigg\{\sum_{i=1}^{\langle\nu_s,1\rangle}\bigg[b(i,\nu_s)(1-\rho(i,\nu_s))\\&\times\sum_{j=0}^\infty(\phi(\nu_s+j\delta_{h_i(\nu_s)})-\phi(\nu_s))p_j(i,\nu_s)\bigg]\bigg\}\\&+\int_0^t ds\mathrm{E}\bigg\{\sum_{i=1}^{\langle\nu_s,1\rangle}\bigg[b(i,\nu_s)\rho(i,\nu_s)\int_{\mathbb{R}}d\theta\pi(i,\nu_s,\theta)\sum_{j=0}^\infty q_j(i,\nu_s,\theta)\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\times \int_{\widehat{\mathbb{R}}} \bigg(\phi\bigg(\nu_s + \sum_{l=1}^{j} \delta_{z_l}\bigg) - \phi(\nu_s)\bigg) \widehat{m}(i, \nu_s, \theta, \widehat{z}) d\widehat{z}\bigg]\bigg\} \\
&+ \int_0^t ds \mathrm{E}\bigg\{ \sum_{i=1}^{\langle \nu_s, 1\rangle} d(i, \nu_s)(\phi(\nu_s - \delta_{h_i(\nu_s)}) - \phi(\nu_s))\bigg\} \\
= {}& \mathrm{E}(\phi(\nu_0)) + \int_0^t ds \mathrm{E}\bigg\{ \int_{\mathbb{R}} \nu_s(dx) \bigg[b(x, \nu_s)(1 - \rho(x, \nu_s)) \\
&\times \sum_{j=0}^{\infty} (\phi(\nu_s + j\delta_x) - \phi(\nu_s)) p_j(x, \nu_s)\bigg]\bigg\} \\
&+ \int_0^t ds \mathrm{E}\bigg\{ \int_{\mathbb{R}} \nu_s(dx) \bigg[b(x, \nu_s)\rho(x, \nu_s) \int_{\mathbb{R}} d\theta \pi(x, \nu_s, \theta) \sum_{j=0}^{\infty} q_j(x, \nu_s, \theta) \\
&\times \int_{\widehat{\mathbb{R}}} \bigg(\phi\bigg(\nu_s + \sum_{l=1}^{j} \delta_{z_l}\bigg) - \phi(\nu_s)\bigg) \widehat{m}(x, \nu_s, \theta, \widehat{z}) d\widehat{z}\bigg]\bigg\} \\
&+ \int_0^t ds \mathrm{E}\bigg\{ \int_{\mathbb{R}} \nu_s(dx)(\phi(\nu_s - \delta_x) - \phi(\nu_s)) d(x, \nu_s)\bigg\}.
\end{aligned} \tag{2.4}
$$

在 $t = 0$ 处求导数即得 (2.1). □

命题 2.2 设 $\{\nu_t : t \geqslant 0\}$ 是方程 (2.2) 的解, 则存在局部有界的正函数 $t \mapsto Q(t)$ 满足

$$
\mathrm{E}\Big(\sup_{0 \leqslant s \leqslant t} \langle \nu_s, 1\rangle\Big) \leqslant Q(t), \quad t \geqslant 0. \tag{2.5}
$$

证明 由 (2.3), 显然有

$$
\begin{aligned}
\sup_{0 \leqslant s \leqslant t} \langle \nu_s, 1\rangle \leqslant {}& \langle \nu_0, 1\rangle + \int_0^t \int_{\mathbb{N}} \int_{\mathbb{N}} \int_0^{\infty} 1_{\{1 \leqslant i \leqslant \langle \nu_{s-}, 1\rangle\}} 1_{\{u \leqslant b(i, \nu_{s-})(1 - \rho(i, \nu_{s-})) p_j(i, \nu_{s-})\}} j N_1(ds, di, dj, du) \\
&+ \int_0^t \int_{\mathbb{N}} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{N}} \int_{\widehat{\mathbb{R}}} \int_0^{\infty} 1_{\{1 \leqslant i \leqslant \langle \nu_{s-}, 1\rangle\}} 1_{\{u \leqslant b(i, \nu_{s-})\rho(i, \nu_{s-})\pi(i, \nu_{s-}, \theta) q_j(i, \nu_{s-}, \theta) \widehat{m}(i, \nu_{s-}, \theta, \widehat{z})\}} \\
&\times j N_2(ds, di, d\theta, dj, d\widehat{z}, du).
\end{aligned}
$$

从而,

$$
\begin{aligned}
\mathrm{E}\Big(\sup_{0 \leqslant s \leqslant t} \langle \nu_s, 1\rangle\Big) \leqslant {}& \mathrm{E}(\langle \nu_0, 1\rangle) + \int_0^t ds \mathrm{E}\bigg\{ \sum_{i=1}^{\langle \nu_s, 1\rangle} b(i, \nu_s)(1 - \rho(i, \nu_s)) \bigg[\sum_{j=0}^{\infty} j p_j(i, \nu_s)\bigg]\bigg\} \\
&+ \int_0^t ds \mathrm{E}\bigg\{ \sum_{i=1}^{\langle \nu_s, 1\rangle} b(i, \nu_s)\rho(i, \nu_s) \int_{\mathbb{R}} d\theta \pi(i, \nu_s, \theta) \bigg[\sum_{j=0}^{\infty} j q_j(i, \nu_s, \theta)\bigg]\bigg\} \\
= {}& \mathrm{E}(\langle \nu_0, 1\rangle) + \mathrm{E}\bigg\{ \int_0^t ds \int_{\mathbb{R}} \nu_s(dx) b(x, \nu_s)(1 - \rho(x, \nu_s)) g_z'(x, \nu, 1)\bigg\} \\
&+ \mathrm{E}\bigg\{ \int_0^t ds \int_{\mathbb{R}} \nu_s(dx) b(x, \nu_s)\rho(x, \nu_s) \int_{\mathbb{R}} d\theta \pi(x, \nu_s, \theta) h_z'(x, \nu_s, \theta, 1)\bigg\} \\
\leqslant {}& \mathrm{E}(\langle \nu_0, 1\rangle) + \bar{b}(\bar{g} \vee \bar{h}) \int_0^t \mathrm{E}(\langle \nu_s, 1\rangle) ds.
\end{aligned}
$$

再由 Gronwall 不等式知命题成立. □

由命题 2.2, 类似于文献 [2, 定理 3.1] 的证明, 易知下面定理成立:

定理 2.1 随机方程 (2.2) 存在轨道唯一的解.

下面给出方程 (2.2) 的解 $\{\nu_t : t \geqslant 0\}$ 的一些性质.

定理 2.2 对任意的 $\phi \in B(M_\delta(\mathbb{R}))$, 有

$$\phi(\nu_t) = \phi(\nu_0) + \int_0^t L\phi(\nu_s)ds + \text{局部鞅}. \tag{2.6}$$

特别地, 对任意的 $f, G \in B(\mathbb{R})$, 都有

$$\begin{aligned} G(\langle \nu_t, f\rangle) = G(\langle \nu_0, f\rangle) + \int_0^t ds \int_{\mathbb{R}} \nu_s(dx) \bigg\{ & b(x,\nu_s)(1-\rho(x,\nu_s)) \\ & \times \sum_{j=0}^{\infty} p_j(x,\nu_s)[G(\langle \nu_s, f\rangle + jf(x)) - G(\langle \nu_s, f\rangle)] \\ & + b(x,\nu_s)\rho(x,\nu_s)\int_{\mathbb{R}} d\theta \pi(x,\nu_s,\theta) \sum_{j=0}^{\infty} q_j(x,\nu_s,\theta) \\ & \times \int_{\widehat{\mathbb{R}}} \bigg[G\bigg(\langle \nu_s, f\rangle + \sum_{l=1}^{j} f(z_l) \bigg) - G(\langle \nu_s, f\rangle) \bigg] \widehat{m}(x,\nu_s,\theta,\widehat{z}) d\widehat{z} \\ & + d(x,\nu_s)[G(\langle \nu_s, f\rangle - f(x)) - G(\langle \nu_s, f\rangle)] \bigg\} + \text{局部鞅}. \end{aligned} \tag{2.7}$$

证明 由 (2.3) 和 (2.4) 的证明可得 (2.6). 在 (2.6) 中令 $\phi(\nu) = G(\langle \nu, f\rangle)$ 即得 (2.7). □

设 ν 为任意随机测度, 则

$$\int_{\mathbb{R}} f(x) \mathrm{E}(\nu)(dx) = \mathrm{E}\bigg(\int_{\mathbb{R}} f(x)\nu(dx) \bigg), \quad f \in B(\mathbb{R})$$

定义了一个与 ν 相联系的确定性的测度 $\mathrm{E}(\nu)$.

推论 2.1 如果 $\mathrm{E}(\nu_0)$ 关于 Lebesgue 测度是绝对连续的, 则对任意的 $t \geqslant 0$, $\mathrm{E}(\nu_t)$ 关于 Lebesgue 测度也是绝对连续的.

证明 证明类似于文献 [3, 命题 3.1]. 对于任意 $\mathbb{R}$ 中的零测集 A, 在 (2.7) 中令 $G(x) = x$ 以及 $f(x) = 1_A(x)$, 可得对任意的 $t \geqslant 0$, 都有

$$\begin{aligned} \mathrm{E}(\langle \nu_t, 1_A\rangle) &= \mathrm{E}(\langle \nu_0, 1_A\rangle) + \mathrm{E}\bigg\{ \int_0^t ds \int_{\mathbb{R}} \nu_s(dx) \bigg[b(x,\nu_s)(1-\rho(x,\nu_s)) \sum_{j=0}^{\infty} j p_j(x,\nu_s) 1_A(x) \\ &\quad + b(x,\nu_s)\rho(x,\nu_s) \int_{\mathbb{R}} d\theta\pi(x,\nu_s,\theta) \sum_{j=0}^{\infty} q_j(x,\nu_s,\theta) \int_{\widehat{\mathbb{R}}} \sum_{l=1}^{j} 1_A(z_l) \widehat{m}(x,\nu_s,\theta,\widehat{z}) d\widehat{z} \\ &\quad - d(x,\nu_s) 1_A(x) \bigg] \bigg\} \\ &\leqslant \mathrm{E}(\langle \nu_0, 1_A\rangle) + \mathrm{E}\bigg(\bar{b}\bar{g} \int_0^t ds \int_{\mathbb{R}} \nu_s(dx) 1_A(x) \bigg) \\ &\quad + \mathrm{E}\bigg(\bar{b}\bar{h} \int_0^t ds \int_{\mathbb{R}} \nu_s(dx) \int_{\mathbb{R}} d\theta\pi(x,\nu_s,\theta) \int_{\mathbb{R}} 1_A(z) m(x,\nu_s,\theta,z) dz \bigg). \end{aligned}$$

由假设, 上面不等式右边第一和三项均为 0. 于是, 由 Gronwall 不等式知结论成立. □

3　极限定理

本节证明一列带变异的分枝交互粒子系统的重整化过程在不同的条件下会收敛到不同的超过程.

对每个整数 $n\geqslant 1$, 考虑一组参数 $(b_n,d_n,\rho_n,\pi_n,m_n,g_n,h_n)$. 给定初值 $\nu_0^n\in M_\delta(D)$, 设 $\{\nu_t^n:t\geqslant 0\}$ 是由随机方程 (2.2) 的解给出的以 $(b_n,d_n,\rho_n,\pi_n,m_n,g_n,h_n)$ 为参数的带变异的分枝交互粒子系统. 另外, 假设对所有的 $n\geqslant 1$, 都存在 $\alpha_n,\beta_n,\gamma_n\in B(\mathbb{R}\times M(\mathbb{R}))^+$ 满足

(1) $b_n(x,\nu)=\alpha_n(x,\nu)+\beta_n(x,\nu)$;

(2) $\rho_n(x,\nu)=\frac{\beta_n(x,\nu)}{\alpha_n(x,\nu)+\beta_n(x,\nu)}$;

(3) $d_n(x,\nu)=\alpha_n(x,\nu)+\beta_n(x,\nu)+\gamma_n(x,\nu)$.

定义 $M(\mathbb{R})$ 的子集

$$M_\delta^n(\mathbb{R})=\left\{\frac{1}{n}\nu,\nu\in M_\delta(\mathbb{R})\right\}.$$

令

$$X_t^n=\frac{1}{n}\nu_t^n,\quad t\geqslant 0.$$

类似命题 2.1 的计算得, $\{X_t^n:t\geqslant 0\}$ 是一个取值于 $M_\delta^n(\mathbb{R})$ 的 Markov 过程, 其生成元 L_n 满足: 对任意的有界实函数 ϕ, 有

$$\begin{aligned}L_n\phi(\nu)&=n\int_{\mathbb{R}}\nu(dx)\bigg[\alpha_n(x,n\nu)\sum_{j=0}^{\infty}\bigg(\phi\bigg(\nu+\frac{j}{n}\delta_x\bigg)-\phi(\nu)\bigg)p_j^n(x,n\nu)\bigg]\\&\quad+n\int_{\mathbb{R}}\nu(dx)\bigg[\beta_n(x,n\nu)\int_{\mathbb{R}}d\theta\pi_n(x,n\nu,\theta)\sum_{j=0}^{\infty}q_j^n(x,n\nu,\theta)\\&\quad\times\int_{\widehat{\mathbb{R}}}\bigg(\phi\bigg(\nu+\frac{1}{n}\sum_{l=1}^{j}\delta_{z_l}\bigg)-\phi(\nu)\bigg)\widehat{m}_n(x,n\nu,\theta,\widehat{z})d\widehat{z}\bigg]\\&\quad+n\int_{\mathbb{R}}\nu(dx)\bigg(\phi\bigg(\nu-\frac{1}{n}\delta_x\bigg)-\phi(\nu)\bigg)[\alpha_n(x,n\nu)+\beta_n(x,n\nu)+\gamma_n(x,n\nu)].\end{aligned}\tag{3.1}$$

显然, 对任意的 $f\in B(\mathbb{R})$, 都有

$$\langle X_t^n,f\rangle=\left\langle\nu_t^n,\frac{f}{n}\right\rangle.\tag{3.2}$$

从而,

$$\begin{aligned}\langle X_t^n,f\rangle&=\langle X_0^n,f\rangle+\frac{1}{n}\int_0^t\int_{\mathbb{N}}\int_{\mathbb{N}}\int_0^\infty jf(h_i(\nu_{s-}^n))1_{\{1\leqslant i\leqslant\langle\nu_{s-}^n,1\rangle\}}\\&\quad\times 1_{\{u\leqslant\alpha_n(i,\nu_{s-}^n)p_j^n(i,\nu_{s-}^n)\}}N_1(ds,di,dj,du)\\&\quad+\frac{1}{n}\int_0^t\int_{\mathbb{N}}\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{N}}\int_{\widehat{\mathbb{R}}}\int_0^\infty\sum_{l=1}^{j}f(z_l)1_{\{1\leqslant i\leqslant\langle\nu_{s-}^n,1\rangle\}}\\&\quad\times 1_{\{u\leqslant\beta_n(i,\nu_{s-}^n)\pi_n(i,\nu_{s-}^n,\theta)q_j^n(i,\nu_{s-}^n,\theta)\widehat{m}_n(i,\nu_{s-}^n,\theta,\widehat{z})\}}N_2(ds,di,d\theta,dj,d\widehat{z},du)\\&\quad-\frac{1}{n}\int_0^t\int_{\mathbb{N}}\int_0^\infty f(h_i(\nu_{s-}^n))1_{\{1\leqslant i\leqslant\langle\nu_{s-}^n,1\rangle\}}1_{\{u\leqslant d_n(i,\nu_{s-}^n)\}}N_0(ds,di,du).\end{aligned}\tag{3.3}$$

由 Itô 公式易知, 对任意的 $f, G \in B(\mathbb{R})$, 有

$$\begin{aligned} G(\langle X_t^n, f\rangle) = {} & G(\langle X_0^n, f\rangle) + n\int_0^t ds \int_{\mathbb{R}} X_s^n(dx)\bigg\{\alpha_n(x,\nu_s^n)\sum_{j=0}^{\infty} p_j^n(x,\nu_s^n) \\ & \times \bigg[G\bigg(\langle X_s^n, f\rangle + \frac{jf(x)}{n}\bigg) - G(\langle X_s^n, f\rangle)\bigg] \\ & + \beta_n(x,\nu_s^n)\int_{\mathbb{R}} d\theta \pi_n(x,\nu_s^n,\theta)\sum_{j=0}^{\infty} q_j^n(x,\nu_s^n,\theta) \\ & \times \int_{\widehat{\mathbb{R}}} \bigg[G\bigg(\langle X_s^n, f\rangle + \sum_{l=1}^{j}\frac{f(z_l)}{n}\bigg) - G(\langle X_s^n, f\rangle)\bigg]\widehat{m}_n(x,\nu_s^n,\theta,\widehat{z})d\widehat{z} \\ & + d_n(x,\nu_s^n)\bigg[G\bigg(\langle X_s^n, f\rangle - \frac{f(x)}{n}\bigg) - G(\langle X_s^n, f\rangle)\bigg]\bigg\} + \text{局部鞅}. \end{aligned} \tag{3.4}$$

3.1 加速出生和死亡并且很少变异的情形

本小节考虑粒子的出生率和死亡率与 n 是同阶的, 同时变异率与 $1/n$ 同阶的情形.

条件 3.1 各参数满足

$$\sup_{n,x,\nu,\theta}\bigg\{\alpha_n(x,\nu)\sum_{j=1}^{\infty}(j-1)p_j^n(x,\nu) + \sum_{j=1}^{\infty} jq_j^n(x,\nu,\theta) + \frac{\alpha_n(x,\nu)}{n} + \beta_n(x,\nu) + \gamma_n(x,\nu)\bigg\} < \infty.$$

命题 3.1 假设 $\sup_{n\geqslant 1}\mathrm{E}(\langle X_0^n, 1\rangle) < \infty$ 以及条件 3.1 成立, 则 $\{X_t^n : t \geqslant 0\}_{n\geqslant 1}$ 是 $D(\mathbb{R}_+, M(\mathbb{R}))$ 中胎紧的序列.

证明 首先证明对任意的 $t > 0$, 有

$$\sup_{n\geqslant 1}\mathrm{E}\Big(\sup_{0\leqslant s\leqslant t}\langle X_s^n, 1\rangle\Big) < \infty. \tag{3.5}$$

由 (3.3) 得

$$\begin{aligned} \langle X_t^n, 1\rangle = {} & \langle X_0^n, 1\rangle + \frac{1}{n}\int_0^t\int_{\mathbb{N}}\int_{\mathbb{N}}\int_0^{\infty} j1_{\{1\leqslant i\leqslant\langle\nu_{s-}^n,1\rangle\}}1_{\{u\leqslant\alpha_n(i,\nu_{s-}^n)p_j^n(i,\nu_{s-}^n)\}}N_1(ds,di,dj,du) \\ & + \frac{1}{n}\int_0^t\int_{\mathbb{N}}\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{N}}\int_{\widehat{\mathbb{R}}}\int_0^{\infty} j1_{\{1\leqslant i\leqslant\langle\nu_{s-}^n,1\rangle\}} \\ & \times 1_{\{u\leqslant\beta_n(i,\nu_{s-}^n)\pi_n(i,\nu_{s-}^n,\theta)q_j^n(i,\nu_{s-}^n,\theta)\widehat{m}_n(i,\nu_{s-}^n,\theta,\widehat{z})\}}N_2(ds,di,d\theta,dj,d\widehat{z},du) \\ & - \frac{1}{n}\int_0^t\int_{\mathbb{N}}\int_0^{\infty} 1_{\{1\leqslant i\leqslant\langle\nu_{s-}^n,1\rangle\}}1_{\{u\leqslant d_n(i,\nu_{s-}^n)\}}N_0(ds,di,du) \\ \leqslant {} & \langle X_0^n, 1\rangle + \frac{1}{n}\int_0^t\int_{\mathbb{N}}\int_{\mathbb{N}_+}\int_0^{\infty}(j-1)1_{\{1\leqslant i\leqslant\langle\nu_{s-}^n,1\rangle\}}1_{\{u\leqslant\alpha_n(i,\nu_{s-}^n)p_j^n(i,\nu_{s-}^n)\}}N_1(ds,di,dj,du) \\ & + \frac{1}{n}\int_0^t\int_{\mathbb{N}}\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{N}}\int_{\widehat{\mathbb{R}}}\int_0^{\infty} j1_{\{1\leqslant i\leqslant\langle\nu_{s-}^n,1\rangle\}} \\ & \times 1_{\{u\leqslant\beta_n(i,\nu_{s-}^n)\pi_n(i,\nu_{s-}^n,\theta)q_j^n(i,\nu_{s-}^n,\theta)\widehat{m}_n(i,\nu_{s-}^n,\theta,\widehat{z})\}}N_2(ds,di,d\theta,dj,d\widehat{z},du) \\ & + M_t^n, \end{aligned}$$

其中

$$M_t^n = \frac{1}{n}\int_0^t\int_{\mathbb{N}}\int_{\mathbb{N}}\int_0^{\infty} 1_{\{1\leqslant i\leqslant\langle\nu_{s-}^n,1\rangle\}}1_{\{u\leqslant\alpha_n(i,\nu_{s-}^n)p_j^n(i,\nu_{s-}^n)\}}N_1(ds,di,dj,du)$$

$$-\frac{1}{n}\int_0^t\int_{\mathbb{N}}\int_0^\infty 1_{\{1\leqslant i\leqslant\langle\nu_{s-}^n,1\rangle\}}1_{\{u\leqslant\alpha_n(i,\nu_{s-}^n)\}}N_0(ds,di,du).$$

类似命题 2.1 中的计算可得

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}\Big(\sup_{0\leqslant s\leqslant t}\langle X_t^n,1\rangle\Big)\leqslant{}&\mathrm{E}(\langle X_0^n,1\rangle)+\frac{1}{n}\mathrm{E}\bigg\{\int_0^t\int_{\mathbb{N}}\int_{\mathbb{N}_+}\int_0^\infty(j-1)1_{\{1\leqslant i\leqslant\langle\nu_{s-}^n,1\rangle\}}\\
&\times 1_{\{u\leqslant\alpha_n(i,\nu_{s-}^n)p_j^n(i,\nu_{s-}^n)\}}N_1(ds,di,dj,du)\\
&+\frac{1}{n}\int_0^t\int_{\mathbb{N}}\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{N}}\int_{\widehat{\mathbb{R}}}\int_0^\infty j1_{\{1\leqslant i\leqslant\langle\nu_{s-}^n,1\rangle\}}\\
&\times 1_{\{u\leqslant\beta_n(i,\nu_{s-}^n)\pi_n(i,\nu_{s-}^n,\theta)q_j^n(i,\nu_{s-}^n,\theta)\widehat{m}_n(i,\nu_{s-}^n,\theta,\widehat{z})\}}N_2(ds,di,d\theta,dj,d\widehat{z},du)\bigg\}\\
&+\mathrm{E}\Big(\sup_{0\leqslant s\leqslant t}M_s^n\Big)\\
={}&\mathrm{E}(\langle X_0^n,1\rangle)+\mathrm{E}\bigg\{\int_0^t ds\int_{\mathbb{R}}X_s^n(dx)\bigg[\alpha_n(x,\nu_s^n)\sum_{j=1}^\infty(j-1)p_j^n(x,\nu_s^n)\\
&+\beta_n(x,\nu_s^n)\int_{\mathbb{R}}d\theta\pi_n(x,\nu_s^n,\theta)\sum_{j=0}^\infty jq_j^n(x,\nu_s^n,\theta)\bigg]\bigg\}+\mathrm{E}\Big(\sup_{0\leqslant s\leqslant t}M_s^n\Big).
\end{aligned}\tag{3.6}$$

另一方面, 易证 M_t^n 是平方可积鞅, 其二次变差过程为

$$\langle M^n\rangle_t=2\int_0^t\Big\langle X_s^n,\alpha_n\Big(\cdot,\frac{\nu_s^n}{n}\Big)\Big\rangle ds.$$

于是, 由 Doob 不等式和 Gronwall 不等式易知 (3.5) 成立.

设 $\{\tau_n:n\geqslant 0\}$ 是一列关于 $\{X_t^n:t\geqslant 0\}$ 的上界为 T 的停时. 对任意的 $f\in B(\mathbb{R})$, 由 (3.3) 得

$$\begin{aligned}
&\mathrm{E}\{|\langle X_{\tau_n+t}^n,f\rangle-\langle X_{\tau_n}^n,f\rangle|\}\\
&\quad\leqslant\mathrm{E}\bigg\{\frac{1}{n}\|f\|\int_{\tau_n}^{\tau_n+t}\int_{\mathbb{N}}\int_{\mathbb{N}_+}\int_0^\infty(j-1)1_{\{1\leqslant i\leqslant\langle\nu_{s-}^n,1\rangle\}}\\
&\qquad\times 1_{\{u\leqslant\alpha_n(i,\nu_{s-}^n)p_j^n(i,\nu_{s-}^n)\}}N_1(ds,di,dj,du)\\
&\qquad+\frac{1}{n}\|f\|\int_{\tau_n}^{\tau_n+t}\int_{\mathbb{N}}\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{N}}\int_{\widehat{\mathbb{R}}}\int_0^\infty j1_{\{1\leqslant i\leqslant\langle\nu_{s-}^n,1\rangle\}}\\
&\qquad\times 1_{\{u\leqslant\beta_n(i,\nu_{s-}^n)\pi_n(i,\nu_{s-}^n,\theta)q_j^n(i,\nu_{s-}^n,\theta)\widehat{m}_n(i,\nu_{s-}^n,\theta,\widehat{z})\}}N_2(ds,di,d\theta,dj,d\widehat{z},du)\\
&\qquad+\bigg|\frac{1}{n}\int_{\tau_n}^{\tau_n+t}\int_{\mathbb{N}}\int_{\mathbb{N}}\int_0^\infty f(h_i(\nu_{s-}^n))1_{\{1\leqslant i\leqslant\langle\nu_{s-}^n,1\rangle\}}\\
&\qquad\times 1_{\{u\leqslant\alpha_n(i,\nu_{s-}^n)p_j^n(i,\nu_{s-}^n)\}}N_1(ds,di,dj,du)\\
&\qquad-\frac{1}{n}\int_{\tau_n}^{\tau_n+t}\int_{\mathbb{N}}\int_0^\infty f(h_i(\nu_{s-}^n))1_{\{1\leqslant i\leqslant\langle\nu_{s-}^n,1\rangle\}}1_{\{u\leqslant d_n(i,\nu_{s-}^n)\}}N_0(ds,di,du)\bigg|\bigg\}\\
&\quad\leqslant\|f\|\mathrm{E}\bigg\{\int_{\tau_n}^{\tau_n+t}ds\int_{\mathbb{R}}X_s^n(dx)\bigg[\alpha_n(x,\nu_s^n)\sum_{j=1}^\infty(j-1)p_j^n(x,\nu_s^n)\\
&\qquad+\beta_n(x,\nu_s^n)\int_{\mathbb{R}}d\theta\pi_n(x,\nu_s^n,\theta)\sum_{j=0}^\infty jq_j^n(x,\nu_s^n,\theta)\bigg]\bigg\}
\end{aligned}$$

$$+\|f\|\mathrm{E}\bigg\{\int_{\tau_n}^{\tau_n+t}ds\int_{\mathbb{R}}X_s^n(dx)[\beta_n(x,\nu_s^n)+\gamma_n(x,\nu_s^n)]\bigg\}+\mathrm{E}(|M_t^{n,f}|), \tag{3.7}$$

其中 $M_t^{n,f}$ 是平方可积鞅并且其二次变差过程为

$$\langle M^{n,f}\rangle_t=\int_{\tau_n}^{\tau_n+t}\Big\langle X_s^n,[\alpha_n(\cdot,\nu_s^n)+d_n(\cdot,\nu_s^n)]\frac{f^2}{n}\Big\rangle ds.$$

于是, 由 (3.5)、(3.7) 和 Doob 不等式可得

$$\lim_{t\to 0}\sup_{n\geqslant 1}\mathrm{E}\{|\langle X_{\tau_n+t}^n,f\rangle-\langle X_{\tau_n}^n,f\rangle|\}=0.$$

根据文献 [7, 推论 2.3.3] 知, $\{\langle X_t^n,f\rangle:t\geqslant 0\}_{n\geqslant 1}$ 是 $D(\mathbb{R}_+,\mathbb{R})$ 中胎紧的序列, 再由文献 [8] 中的判别准则可得 $\{X_t^n:t\geqslant 0\}_{n\geqslant 1}$ 是 $D(\mathbb{R}_+,M(\mathbb{R}))$ 中胎紧的序列. □

对任意的 $(x,\nu,\theta,\lambda)\in\mathbb{R}\times M(\mathbb{R})\times\mathbb{R}\times[0,n]$, 定义

$$\phi_n(x,\nu,\lambda)=n\alpha_n(x,n\nu)\bigg[g_n\bigg(x,n\nu,1-\frac{\lambda}{n}\bigg)-\bigg(1-\frac{\lambda}{n}\bigg)\bigg],$$
$$\zeta_n(x,\nu,\theta,\lambda)=n\bigg[1-h_n\bigg(x,n\nu,\theta,1-\frac{\lambda}{n}\bigg)\bigg].$$

对任意从 V 到 $\mathbb{R}$ 的核 $\mu(x,dz)$ 和 $\mu'(x,z)dz$ 以及任意的 $f\in B(\mathbb{R})$, 记

$$\mu(x,f)=\int_{\mathbb{R}}f(z)\mu(x,dz)\quad 和\quad \mu'(x,f)=\int_{\mathbb{R}}f(z)\mu'(x,z)dz,\quad x\in V.$$

为了方便叙述, 列出下列条件:

条件 3.2 存在函数 $\alpha,\beta,\gamma\in B(\mathbb{R}\times M(\mathbb{R}))^+$、从 $\mathbb{R}\times M(\mathbb{R})$ 到 $\mathbb{R}$ 的概率核 $\pi(x,\nu,d\theta)$ 以及从 $\mathbb{R}\times M(\mathbb{R})\times\mathbb{R}$ 到 $\mathbb{R}$ 的概率核 $m(x,\nu,\theta,dz)$ 满足, 当 $n\to\infty$ 时, 如果 $\nu_n\xrightarrow{W}\nu$, 则

(1) $\alpha_n(x,n\nu_n)/n\to\alpha(x,\nu)$、$\beta_n(x,n\nu_n)\to\beta(x,\nu)$ 和 $\gamma_n(x,n\nu_n)\to\gamma(x,\nu)$ 在 $\mathbb{R}$ 上一致成立.

(2) $\pi_n(x,n\nu_n,f)\to\pi(x,\nu,f)$ 和 $m_n(x,n\nu_n,\theta,f)\to m(x,\nu,\theta,f)$ 分别在 $\mathbb{R}\times B(\mathbb{R})$ 和 $\mathbb{R}^2\times B(\mathbb{R})$ 上一致成立.

(3) 对任意的 $l\geqslant 0$, 序列 $\{\phi_n(x,\nu,\lambda)\}$ 关于 λ 在 $\mathbb{R}\times M(\mathbb{R})\times[0,l]$ 上是一致 Lipschitz 的. 另外, $\phi_n(x,\nu,\lambda)$ 在 $\mathbb{R}\times M(\mathbb{R})\times[0,l]$ 上一致收敛到某个 $\phi(x,\nu,\lambda)$ 并且极限函数满足 $\phi(x,\nu_n,\lambda)$ 在 $\mathbb{R}\times[0,l]$ 上一致收敛到 $\phi(x,\nu,\lambda)$.

(4) 对任意的 $l\geqslant 0$, 序列 $\zeta_n(x,\nu,\theta,\lambda)$ 在 $\mathbb{R}\times M(\mathbb{R})\times\mathbb{R}\times[0,l]$ 上一致收敛到某个 $\zeta(x,\nu,\theta,\lambda)$ 并且极限函数满足 $\zeta(x,\nu_n,\theta,\lambda)$ 在 $\mathbb{R}^2\times[0,l]$ 上一致收敛到 $\zeta(x,\nu,\theta,\lambda)$.

由文献 [1, 命题 4.3 和 4.11] 的证明知, 如果条件 3.2 成立, 则对任意的 $(x,\nu,\lambda)\in\mathbb{R}\times M(\mathbb{R})\times\mathbb{R}_+$, 极限函数 ϕ 都有如下表示:

$$\phi(x,\nu,\lambda)=a(x,\nu)\lambda+c(x,\nu)\lambda^2+\int_0^\infty(\mathrm{e}^{-\lambda u}-1+\lambda u)n_1(x,\nu,du), \tag{3.8}$$

其中 $a\in B(\mathbb{R}\times M(\mathbb{R}))$, $c\in B(\mathbb{R}\times M(\mathbb{R}))^+$, 以及 $(u\wedge u^2)n_1(x,\nu,du)$ 是从 $\mathbb{R}\times M(\mathbb{R})$ 到 $(0,\infty)$ 的有界核. 同时, 对于任意的 $(x,\nu,\theta,\lambda)\in\mathbb{R}\times M(\mathbb{R})\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+$, ζ 有如下表示:

$$\zeta(x,\nu,\theta,\lambda)=r(x,\nu,\theta)\lambda+\int_0^\infty(1-\mathrm{e}^{-\lambda u})n_2(x,\nu,\theta,du), \tag{3.9}$$

其中 $r \in B(\mathbb{R} \times M(\mathbb{R}) \times \mathbb{R})^+$, 以及 $un_2(x,\nu,\theta,du)$ 是从 $\mathbb{R} \times M(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}$ 到 $(0,\infty)$ 的有界核. 对于 $(x,\nu,f) \in \mathbb{R} \times M(\mathbb{R}) \times B(\mathbb{R})^+$, 定义

$$\psi_n(x,\nu,f) = \int_{\mathbb{R}} \zeta_n(x,\nu,\theta,m_n(x,n\nu,\theta,f))\pi_n(x,n\nu,\theta)d\theta,$$

以及

$$\psi(x,\nu,f) = \int_{\mathbb{R}} \zeta(x,\nu,\theta,m(x,\nu,\theta,f))\pi(x,\nu,d\theta). \tag{3.10}$$

易知对任意的 $f \in B(\mathbb{R})$ 和 $\nu_n \xrightarrow{W} \nu$, 如果条件 3.2 成立, 则 $\psi_n(x,\nu_n,f) \to \psi(x,\nu,f)$ 在 $\mathbb{R}$ 上一致成立. 记

$$\eta_1(x,\nu,f) = \beta(x,\nu)\int_{\mathbb{R}} r(x,\nu,\theta)m(x,\mu,\theta,f)\pi(x,\nu,d\theta),$$
$$\eta_2(x,\nu,f) = \beta(x,\nu)\int_{\mathbb{R}} \left[r(x,\nu,\theta) + \int_0^\infty un_2(x,\mu,\theta,du)\right]m(x,\mu,\theta,f)\pi(x,\nu,d\theta),$$

以及

$$\kappa(x,\nu) = a(x,\nu) + \beta(x,\nu) + \gamma(x,\nu).$$

定理 3.1 假设条件 3.1 和 3.2 成立. 如果 X_0^n 弱收敛到 $X_0 \in M(\mathbb{R})$, 则 $\{X_t^n : t \geqslant 0\}_{n\geqslant 1}$ 中的任意极限点 $\{X_t : t \geqslant 0\}$ 都满足下列等价性质:

(1) (i) 过程 $\{X_t : t \geqslant 0\}$ 有非负跳. 令 $M(\mathbb{R})^\circ = M(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$, 其中 0 表示零测度. 定义 $\Delta X_s = X_s - X_{s-}$ 以及 $\mathbb{R}_+ \times M(\mathbb{R})^\circ$ 上的可选随机测度

$$N(ds,d\nu) = \sum_{s>0} 1_{\{\Delta X_s \neq 0\}}\delta_{(s,\Delta X_s)}(ds,d\nu),$$

则 $N(ds,d\nu)$ 的可料补偿 $\hat{N}(ds,d\nu)$ 满足 $\hat{N}(ds,d\nu) = dsK(X_{s-},d\nu)$, 其中 $K(\mu,d\nu)$ 满足

$$\int_{M(\mathbb{R})^\circ} F(\nu)K(\mu,d\nu) = \int_{\mathbb{R}} \mu(dx)\bigg\{\int_0^\infty F(u\delta_x)n_1(x,\mu,du) + \beta(x,\mu)\int_{\mathbb{R}} \pi(x,\mu,d\theta)\int_0^\infty F(um(x,\mu,\theta,dz))n_2(x,\mu,\theta,du)\bigg\}.$$

(ii) 令 $\tilde{N}(ds,d\nu) = N(ds,d\nu) - \hat{N}(ds,d\nu)$, 则对任意的 $f \in B(\mathbb{R})$, 都有

$$\langle X_t,f\rangle = \langle X_0,f\rangle + \int_0^t \langle X_s,\eta_2(\cdot,X_s,f) - \kappa(\cdot,X_s)f\rangle ds + M_t^c(f) + M_t^d(f), \tag{3.11}$$

其中 $\{M_t^c(f) : t \geqslant 0\}$ 是二次变差为

$$\int_0^t \langle X_s,[c(\cdot,X_s) + \alpha(\cdot,X_s)]f^2\rangle ds$$

的连续平方可积局部鞅以及

$$t \mapsto M_t^d(f) = \int_0^t \int_{M(\mathbb{R})^\circ} \langle \nu,f\rangle \tilde{N}(ds,d\nu) \tag{3.12}$$

是纯断的局部鞅.

(2) 对任意的 $G \in C^2(\mathbb{R})$ 和 $f \in B(\mathbb{R})$, 有

$$\begin{aligned} G(\langle X_t, f\rangle) &= G(\langle X_0, f\rangle) + \int_0^t ds \int_{\mathbb{R}} X_s(dx) G'(\langle X_s, f\rangle)[\eta_1(x, X_s, f) - \kappa(x, X_s) f(x)] \\ &+ \int_0^t ds \int_{\mathbb{R}} X_s(dx) G''(\langle X_s, f\rangle)[c(x, X_s) + \alpha(x, X_s)] f^2(x) \\ &+ \int_0^t ds \int_{\mathbb{R}} X_s(dx) \int_0^\infty [G(\langle X_s, f\rangle + u f(x)) - G(\langle X_s, f\rangle) \\ &- u f(x) G'(\langle X_s, f\rangle)] n_1(x, X_s, du) \\ &+ \int_0^t ds \int_{\mathbb{R}} X_s(dx) \beta(x, X_s) \int_{\mathbb{R}} \pi(x, X_s, d\theta) \int_0^\infty [G(\langle X_s, f\rangle + u m(x, X_s, \theta, f)) \\ &- G(\langle X_s, f\rangle)] n_2(x, X_s, \theta, du) + \text{局部鞅}. \end{aligned} \tag{3.13}$$

证明 在 (3.4) 中令 $G(x) = \mathrm{e}^{-x}$, 则对任意的 $f \in B(\mathbb{R})^+$, 有

$$\begin{aligned} \mathrm{e}^{-\langle X_t^n, f\rangle} &= \mathrm{e}^{-\langle X_0^n, f\rangle} + n \int_0^t ds \mathrm{e}^{-\langle X_s^n, f\rangle} \int_{\mathbb{R}} X_s^n(dx) \bigg\{ \alpha_n(x, \nu_s^n) \sum_{j=0}^\infty (\mathrm{e}^{-j f(x)/n} - 1) p_j^n(x, \nu_s^n) \\ &\quad + \beta_n(x, \nu_s^n) \int_{\mathbb{R}} d\theta \pi_n(x, \nu_s^n, \theta) \sum_{j=0}^\infty q_j^n(x, \nu_s^n, \theta) \int_{\widehat{\mathbb{R}}} (\mathrm{e}^{-\sum_{l=1}^j f(z_l)/n} - 1) \widehat{m}_n(x, \nu_s^n, \theta, \widehat{z}) d\widehat{z} \\ &\quad + d_n(x, \nu_s^n)(\mathrm{e}^{f(x)/n} - 1) \bigg\} + \text{局部鞅} \\ &= \mathrm{e}^{-\langle X_0^n, f\rangle} + n \int_0^t ds \mathrm{e}^{-\langle X_s^n, f\rangle} \int_{\mathbb{R}} X_s^n(dx) \bigg\{ \alpha_n(x, \nu_s^n) \sum_{j=0}^\infty (\mathrm{e}^{-j f(x)/n} - \mathrm{e}^{-f(x)/n}) p_j^n(x, \nu_s^n) \\ &\quad + \beta_n(x, \nu_s^n) \int_{\mathbb{R}} d\theta \pi_n(x, \nu_s^n, \theta) \bigg[\sum_{j=0}^\infty q_j^n(x, \nu_s^n, \theta) \bigg(\int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-f(z)/n} m_n(x, \nu_s^n, \theta, z) dz \bigg)^j - 1 \bigg] \\ &\quad + \alpha_n(x, \nu_s^n)(\mathrm{e}^{-f(x)/n} + \mathrm{e}^{f(x)/n} - 2) + (\beta_n(x, \nu_s^n) + \gamma_n(x, \nu_s^n))(\mathrm{e}^{f(x)/n} - 1) \bigg\} \\ &\quad + \text{局部鞅} \\ &= \mathrm{e}^{-\langle X_0^n, f\rangle} + \int_0^t ds \mathrm{e}^{-\langle X_s^n, f\rangle} \int_{\mathbb{R}} X_s^n(dx) \bigg\{ \tilde{\phi}_n(x, X_s^n, f(x)) - \beta_n(x, \nu_s^n) \psi_n(x, X_s^n, f) \\ &\quad + n\alpha_n(x, \nu_s^n)(\mathrm{e}^{-f(x)/n} + \mathrm{e}^{f(x)/n} - 2) + (\beta_n(x, \nu_s^n) + \gamma_n(x, \nu_s^n)) f(x) + O\bigg(\frac{1}{n}\bigg) \bigg\} \\ &\quad + \text{局部鞅}, \end{aligned} \tag{3.14}$$

其中

$$\tilde{\phi}_n(x, \nu, \lambda) = n\alpha_n(x, n\nu)[g_n(x, n\nu, \mathrm{e}^{-\lambda/n}) - \mathrm{e}^{-\lambda/n}], \quad (x, \nu, \lambda) \in \mathbb{R} \times M(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}_+.$$

如果条件 3.1 和 3.2 成立, 则由文献 [1, 命题 3.40] 的证明可知, 对任意的 $l \geqslant 0$, 当 $n \to \infty$ 时, $\tilde{\phi}_n$ 在 $\mathbb{R} \times M(\mathbb{R}) \times [0, l]$ 上一致收敛到 ϕ. 由命题 3.1, 不妨设 $\{X_t^n : t \geqslant 0\}_{n \geqslant 1}$ 的子列 $\{X_t^{n_k} : t \geqslant 0\}_{k \geqslant 1}$ 依分布收敛到 $\{X_t : t \geqslant 0\}$. 由 Skorokhod 表示定理, 不妨设 $\{X_t^{n_k} : t \geqslant 0\}$ 在拓扑 $D(\mathbb{R}_+, M(\mathbb{R}))$ 之下几乎

必然收敛到 $\{X_t : t \geqslant 0\}$. 由 (3.14), 令 $k \to \infty$ 可得

$$\begin{aligned}\mathrm{e}^{-\langle X_t,f\rangle} = \mathrm{e}^{-\langle X_0,f\rangle} + \int_0^t ds \mathrm{e}^{-\langle X_s,f\rangle} \int_{\mathbb{R}} X_s(dx)\{\phi(x,X_s,f(x)) - \beta(x,X_s)\psi(x,X_s,f)\\ + \alpha(x,X_s)f(x)^2 + [\beta(x,X_s)+\gamma(x,X_s)]f(x)\} + \text{局部鞅}.\end{aligned}$$

于是, 由文献 [1, 定理 7.13] 的证明知结论成立. □

注 3.1 (1) 由文献 [1, 例 2.5 和定理 7.13] 可知, 鞅问题 (3.13) 的解 $\{X_t : t \geqslant 0\}$ 可看成是带交互的超过程. 超过程 $\{X_t : t \geqslant 0\}$ 具有局部分枝机制 $(x,\nu,z) \mapsto \beta(x,\nu)z + \gamma(x,\nu)z + \alpha(x,\nu)z^2 + \phi(x,\nu,z)$ 以及非局部分枝机制 $(x,\nu,f) \mapsto \beta(x,\nu)\psi(x,\nu,f)$, 其底运动是平凡的.

(2) 假设 α、β、ϕ、r、n_2 和 π 均不依赖于 x 和 ν, $m(x,\nu,\theta,dz) = \delta_{x\vee\theta}$, $\gamma \equiv 0$, π 是某个区间 $[0,l]$ 上关于 Lebesgue 测度绝对连续的测度, 则由文献 [4] 中的结论知, 鞅问题 (3.13) 具有分布唯一的解.

接下来讨论鞅问题 (3.13) 的解的分布唯一性.

对于 $p,q \in \{-\infty\} \cup \mathbb{R}$ 和 $\nu \in M(\mathbb{R})$, 记

$$B(p,q,\nu) = \int_{\mathbb{R}} [\eta_1(x,\nu,1_{(p,q]}) - \kappa(x,\nu)1_{(p,q]}(x)]\nu(dx).$$

条件 3.3 (1) 存在 $B_1 \in B(\mathbb{R}^2 \times M(\mathbb{R}))$、$\bar{B}_1 \in \mathbb{R}_+$ 和 $B_2 \in B(\mathbb{R}_+)$ 满足对所有的 $p < q \in \{-\infty\} \cup \mathbb{R}$ 和 $\nu_1,\nu_2 \in M(\mathbb{R})$, 有 $|B_1(p,q,\nu_1) - B_1(p,q,\nu_2)| \leqslant \bar{B}_1|\nu_1(p,q] - \nu_2(p,q]|$, B_2 是非降的, 并且 $B(p,q,\nu_1) = B_1(p,q,\nu_1) - B_2(\nu_1(p,q])$.

(2) 存在 $c_0 \in B(\mathbb{R})^+$ 满足 $c(x,\nu) + \alpha(x,\nu) = c_0(\nu(-\infty,x])^2$.

(3) 存在 $\mathbb{R}_+$ 上的有界核 $(u \wedge u^2)\bar{n}_1(y,du)$、从 $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$ 到 $\mathbb{R}_+$ 的有界核 $u\bar{n}_2(y,\theta,du)$ 以及从 $\mathbb{R}_+$ 到 $\mathbb{R}$ 的有界核 $\bar{\pi}(y,d\theta)$ 满足, 对任意的 $(x,\nu,\theta) \in \mathbb{R} \times M(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}$, 有

$$\begin{aligned}&n_1(x,\nu,du) = \bar{n}_1(\nu(-\infty,x],du), \quad n_2(x,\nu,\theta,du) = \bar{n}_2(\nu(-\infty,x],\theta,du),\\ &\pi(x,\nu,d\theta) = \bar{\pi}(\nu(-\infty,x],d\theta) \quad \text{以及} \quad m(x,\nu,\theta,dz) = \delta_{x\vee\theta}.\end{aligned}$$

定理 3.2 假设条件 3.3 成立, 则鞅问题 (3.13) 的解是分布唯一的.

证明 由定理 3.1, 类似文献 [5, 定理 3.1] 的计算可得, 若一个左极右连的 $M(\mathbb{R})$ 值的过程 $\{X_t : t \geqslant 0\}$ 是 (3.13) 的解, 则在一个扩充的概率空间上存在以 $dsdu$ 为强度的 Gauss 白噪声 $\{W(ds,du) : s \geqslant 0, u > 0\}$ 以及分别以 $ds\bar{n}_1(y,du)dy$ 和 $ds\bar{n}_2(y,\theta,du)\pi(y,d\theta)dy$ 为强度的 Poisson 随机测度 $\{M_1(ds,du,dy) : s \geqslant 0, u > 0, y > 0\}$ 和 $\{M_2(ds,du,d\theta,dy) : s \geqslant 0, u > 0, \theta \in R, y > 0\}$ 使得 $Y_t(p) := X_t(-\infty,p]$ 满足以下随机方程:

$$\begin{aligned}Y_t(p) = Y_0(p) &+ \int_0^t B(-\infty,p,X_s)ds + \int_0^t \int_0^{Y_{s-}(p)} c_0(u)W(ds,du)\\ &+ \int_0^t \int_0^\infty \int_0^{Y_{s-}(p)} u\tilde{M}_1(ds,du,dy)\\ &+ \int_0^t \int_0^\infty \int_{-\infty}^p \int_0^{Y_{s-}(p)} uM_2(ds,du,d\theta,dy), \quad p \in \mathbb{R}, \quad t \geqslant 0,\end{aligned} \tag{3.15}$$

其中 $\tilde{M}_1(ds,du,dy) = M_1(ds,du,dy) - \hat{M}_1(ds,du,dy)$. 对 $q > p$, 令 $Y_t(p,q) = X_t(p,q]$. 由 (3.15), $Y_t(p,q)$ 满足

$$Y_t(p,q) = Y_0(p,q) + \int_0^t B(p,q,X_s)ds + \int_0^t \int_{Y_{s-}(p)}^{Y_{s-}(p)+Y_{s-}(p,q)} c_0(u)W(ds,du)$$

$$+\int_0^t\int_0^\infty\int_{Y_{s-}(p)}^{Y_{s-}(p)+Y_{s-}(p,q)}u\tilde{M}_1(ds,du,dy)$$
$$+\int_0^t\int_0^\infty\int_{-\infty}^{q}\int_{Y_{s-}(p)}^{Y_{s-}(p)+Y_{s-}(p,q)}uM_2(ds,du,d\theta,dy)$$
$$+\int_0^t\int_0^\infty\int_p^q\int_0^{Y_{s-}(p)}uM_2(ds,du,d\theta,dy). \tag{3.16}$$

类似文献 [9, 定理 2.1] 的证明, 随机方程组 (3.15) 和 (3.16) 的解满足轨道唯一性. 从而, $\{(Y_t(p),Y_t(p,q)):t\geqslant 0\}$ 的分布被方程 (3.15) 和 (3.16) 唯一决定, 故 $\{(Y_t(p),Y_t(q)):t\geqslant 0\}$ 的分布也被方程 (3.15) 和 (3.16) 唯一决定. 同理可得, $\{\{Y_t(p):t\geqslant 0\}:p\in\mathbb{R}\}$ 的任意有限维分布都被方程 (3.15) 唯一决定. 因此, 鞅问题 (3.13) 的解的分布唯一性成立. □

设 $\{X_t:t\geqslant 0\}$ 是满足鞅问题 (3.13) 的左极右连过程. 由定理 3.1 和 3.2 立刻得到下面的定理:

定理 3.3 假设条件 3.1–3.3 均成立并且 X_0^n 弱收敛到 $X_0\in M(\mathbb{R})$, 则 $\{X_t^n:t\geqslant 0\}$ 在 $D(\mathbb{R}_+, M(\mathbb{R}))$ 中依分布收敛到 $\{X_t:t\geqslant 0\}$.

3.2 加速变异的情形

本小节考虑出生率、死亡率和变异率都与 n 同阶的情形. 另外, 假设 $m(x,\nu,\theta,z)$ 不依赖于 θ 并简单记为 $m(x,\nu,z)$.

对任意 $(x,\nu,\theta,\lambda)\in\mathbb{R}\times M(\mathbb{R})\times\mathbb{R}\times[0,n]$, 定义

$$\bar{\zeta}_n(x,\nu,\theta,\lambda)=n\beta_n(x,n\nu)\bigg[h_n\bigg(x,n\nu,\theta,1-\frac{\lambda}{n}\bigg)-\bigg(1-\frac{\lambda}{n}\bigg)\bigg].$$

为方便叙述, 列出以下条件:

条件 3.4 各参数满足

$$\sup_{n,x,\nu,\theta}\bigg\{\sum_{j=1}^{\infty}(j-1)[\alpha_n(x,\nu)p_j^n(x,\nu)+\beta_n(x,\nu)q_j^n(x,\nu,\theta)]+\frac{\alpha_n(x,\nu)+\beta_n(x,\nu)}{n}+\gamma_n(x,\nu)\bigg\}<\infty.$$

条件 3.5 存在函数 $\alpha,\beta,\gamma\in B(\mathbb{R}\times M(\mathbb{R}))^+$、从 $\mathbb{R}\times M(\mathbb{R})$ 到 $\mathbb{R}$ 概率核 $\pi(x,\nu,d\theta)$ 以及 $C(\mathbb{R})$ 上一族以 $\{A(\nu)\}_{\nu\in M(\mathbb{R})}$ 为生成元的 Feller 半群 $\{P_t(\nu)\}_{\nu\in M(\mathbb{R})}$ 满足, 当 $n\to\infty$ 时, 如果 $\nu_n\xrightarrow{W}\nu$, 则

(1) $\alpha_n(x,n\nu_n)/n\to\alpha(x,\nu)$、$\beta_n(x,n\nu_n)/n\to\beta(x,\nu)$ 和 $\gamma_n(x,n\nu_n)\to\gamma(x,\nu)$ 在 $\mathbb{R}$ 上一致成立.

(2) $\pi_n(x,n\nu_n,f)\to\pi(x,\nu,f)$ 在 $\mathbb{R}^2\times B(\mathbb{R})$ 上一致成立.

(3) 对所有的 $n\geqslant 1$, 有 $m_n(x,n\nu,f)=P_{1/n}(\nu)f(x)$. 另外, 对任意的 $f\in B(\mathbb{R})$, $P_{1/n}(\nu)f(x)\to f(x)$ 在 $\mathbb{R}\times M(\mathbb{R})$ 上一致成立并且 $\{A(\nu)\}_{\nu\in M(\mathbb{R})}$ 的定义域 $D(A)$ 不依赖于 ν 且是 $C_0(\mathbb{R})$ 的稠子集.

(4) 对任意的 $l\geqslant 0$, 序列 $\{\phi_n(x,\nu,\lambda)\}$ 关于 λ 在 $\mathbb{R}\times M(\mathbb{R})\times[0,l]$ 上是一致 Lipschitz 的, 并且 $\phi_n(x,\nu,\lambda)$ 在 $\mathbb{R}\times M(\mathbb{R})\times[0,l]$ 上一致收敛到某个 $\phi(x,\nu,\lambda)$. 另外, $\phi(x,\nu_n,\lambda)\to\phi(x,\nu,\lambda)$ 在 $\mathbb{R}\times[0,l]$ 上一致成立.

(5) 对任意的 $l\geqslant 0$, 序列 $\{\bar{\zeta}_n(x,\nu,\theta,\lambda)\}$ 在 $\mathbb{R}\times M(\mathbb{R})\times\mathbb{R}\times[0,l]$ 上关于 λ 是一致 Lipschitz 的并且 $\bar{\zeta}_n(x,\nu,\theta,\lambda)$ 在 $\mathbb{R}\times M(\mathbb{R})\times\mathbb{R}\times[0,l]$ 上一致收敛到某个 $\bar{\zeta}(x,\nu,\theta,\lambda)$, 另外, $\bar{\zeta}(x,\nu_n,\theta,\lambda)\to\bar{\zeta}(x,\nu,\theta,\lambda)$ 在 $\mathbb{R}^2\times[0,l]$ 上一致成立.

由文献 [1, 命题 4.3] 知, 如果条件 3.5(5) 成立, 则对任意的 $(x,\nu,\theta,\lambda)\in\mathbb{R}\times M(\mathbb{R})\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+$, 极限函数 $\bar{\zeta}$ 有如下表示:

$$\bar{\zeta}(x,\nu,\theta,\lambda)=\bar{a}(x,\nu,\theta)\lambda+\bar{c}(x,\nu,\theta)\lambda^2+\int_0^\infty(\mathrm{e}^{-\lambda u}-1+\lambda u)n_3(x,\nu,\theta,du), \tag{3.17}$$

其中 $\bar{a}\in B(\mathbb{R}\times M(\mathbb{R}))\times\mathbb{R}$, $\bar{c}\in B(\mathbb{R}\times M(\mathbb{R})\times\mathbb{R})^+$ 以及 $(u\wedge u^2)n_3(x,\nu,\theta,du)$ 是从 $\mathbb{R}\times M(\mathbb{R})\times\mathbb{R}$ 到 $(0,\infty)$ 的有界核.

对 $(x,\nu)\in\mathbb{R}\times M(\mathbb{R})$, 令

$$\begin{aligned}\bar{\kappa}(x,\nu)&=a(x,\nu)+\pi(x,\nu,\bar{a}(x,\nu,\cdot))+\gamma(x,\nu),\\ \sigma(x,\nu)&=c(x,\nu)+\pi(x,\nu,\bar{c}(x,\nu,\cdot))+\alpha(x,\nu),\end{aligned}$$

以及

$$n_0(x,\nu,du)=n_1(x,\nu,du)+\int_{\mathbb{R}}n_3(x,\nu,\theta,du)\pi(x,\nu,d\theta).$$

定义从 $M(\mathbb{R})$ 到 $M(\mathbb{R})^\circ$ 的核 $\bar{K}(\mu,d\nu)$ 满足

$$\int_{M(\mathbb{R})^\circ}F(\nu)\bar{K}(\mu,d\nu)=\int_{\mathbb{R}}\mu(dx)\int_0^\infty F(u\delta_x)n_0(x,\mu,du),$$

其中 F 是 $M(\mathbb{R})$ 上的正可测函数.

定理 3.4 假设条件 3.4 和 3.5 成立并且 X_0^n 弱收敛到 $X_0\in M(\mathbb{R})$, 则 $\{X_t^n:t\geqslant 0\}_{n\geqslant 1}$ 中任意极限点 $\{X_t:t\geqslant 0\}$ 都满足如下两个等价性质:

(1) 对任意的 $f\in D(A)$, 有

$$\langle X_t,f\rangle=\langle X_0,f\rangle+\int_0^t\langle X_s,\beta(\cdot,X_s)A(X_s)f-\bar{\kappa}(\cdot,X_s)f\rangle ds+M_t^c(f)+M_t^d(f), \tag{3.18}$$

其中 $t\mapsto M_t^c(f)$ 是二次变差为 $\int_0^t\langle X_s,\sigma(\cdot,X_s)f^2\rangle ds$ 的连续平方可积局部鞅, $t\mapsto M_t^d(f)$ 是纯断局部鞅. 另外, 存在 $(0,\infty)\times M(\mathbb{R})^\circ$ 上以 $\hat{N}(ds,d\nu)=ds\bar{K}(X_{s-},d\nu)$ 为补偿的可选随机测度 $N(ds,d\nu)$ 满足

$$t\mapsto M_t^d(f)=\int_0^t\int_{M(\mathbb{R})^\circ}\langle\nu,f\rangle\tilde{N}(ds,d\nu),$$

其中 $\tilde{N}(ds,d\nu)=N(ds,d\nu)-\hat{N}(ds,d\nu)$.

(2) 对任意的 $G\in C^2(\mathbb{R})$ 和 $f\in D(A)$, 有

$$\begin{aligned}G(\langle X_t,f\rangle)=G(\langle X_0,f\rangle)&+\int_0^t ds\int_{\mathbb{R}}X_s(dx)G''(\langle X_s,f\rangle)\sigma(x,X_s)f^2(x)\\ &+\int_0^t ds\int_{\mathbb{R}}X_s(dx)G'(\langle X_s,f\rangle)[\beta(x,X_s)A(X_s)f(x)-\bar{\kappa}(x,X_s)f(x)]\\ &+\int_0^t ds\int_{\mathbb{R}}X_s(dx)\int_0^\infty[G(\langle X_s,f\rangle+uf(x))-G(\langle X_s,f\rangle)\\ &-uf(x)G'(\langle X_s,f\rangle)]n_0(x,X_s,du)+\text{局部鞅}.\end{aligned} \tag{3.19}$$

证明 对任意的 $f \in D(A)^+$, 在 (3.4) 中令 $G(x) = \mathrm{e}^{-x}$, 得

$$
\begin{aligned}
\mathrm{e}^{-\langle X_t^n, f\rangle} = {} & \mathrm{e}^{-\langle X_0^n, f\rangle} + n\int_0^t ds \mathrm{e}^{-\langle X_s^n, f\rangle}\int_{\mathbb{R}} X_s^n(dx)\bigg\{\alpha_n(x,\nu_s^n)\sum_{j=0}^{\infty}(\mathrm{e}^{-jf(x)/n} - \mathrm{e}^{-f(x)/n})p_j^n(x,\nu_s^n) \\
& + \beta_n(x,\nu_s^n)\int_{\mathbb{R}} d\theta \pi_n(x,\nu_s^n,\theta)\bigg[\sum_{j=0}^{\infty} q_j^n(x,\nu_s^n,\theta)\bigg(\int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-f(z)/n} m_n(x,\nu_s^n,z)dz\bigg)^j \\
& - \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-f(z)/n} m_n(x,\nu_s^n,z)dz\bigg] \\
& + \beta_n(x,\nu_s^n)\bigg(\int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-f(z)/n} m_n(x,\nu_s^n,z)dz + \mathrm{e}^{f(x)/n} - 2\bigg) \\
& + \alpha_n(x,\nu_s^n)(\mathrm{e}^{-f(x)/n} + \mathrm{e}^{f(x)/n} - 2) + \gamma_n(x,\nu_s^n)(\mathrm{e}^{f(x)/n} - 1)\bigg\} \\
& + \text{局部鞅} \\
= {} & \mathrm{e}^{-\langle X_0^n, f\rangle} + \int_0^t ds \mathrm{e}^{-\langle X_s^n, f\rangle}\int_{\mathbb{R}} X_s^n(dx)\bigg\{\tilde{\phi}_n(x, X_s^n, f(x)) \\
& + \int_{\mathbb{R}} \tilde{\zeta}_n^m(x, X_s^n, \theta, f)\pi_n(x,\nu_s^n,\theta)d\theta - \beta_n(x,\nu_s^n)[P_{1/n}(X_s^n)f(x) - f(x)] \\
& + n^{-1}\alpha_n(x,\nu_s^n)f(x)^2 + \gamma_n(x,\nu_s^n)f(x)\bigg\} + O\bigg(\frac{1}{n}\bigg) + \text{局部鞅},
\end{aligned} \tag{3.20}
$$

其中 $\tilde{\phi}_n$ 是定理 3.1 的证明中定义的函数,

$$
\tilde{\zeta}_n(x, X_s^n, \theta, f) = n\beta_n(x,\nu_s^n)[h_n(x,\nu_s^n,\theta, m_n(x,\nu_s^n, \mathrm{e}^{-f(z)/n})) - m_n(x,\nu_s^n,\mathrm{e}^{-f(z)/n})].
$$

类似命题 3.1 中的讨论, 如果条件 3.4 成立, 则 $\{x_t^n : t \geqslant 0\}_{n\geqslant 1}$ 是 $D(\mathbb{R}_+, M(\mathbb{R}))$ 中胎紧的序列. 不失一般性, 假设 $\{X_t^n : t \geqslant 0\}_{n\geqslant 1}$ 的子列 $\{X_t^{n_k} : t \geqslant 0\}_{k\geqslant 1}$ 在 $D(\mathbb{R}_+, M(\mathbb{R}))$ 的拓扑之下几乎必然收敛到 $\{X_t : t \geqslant 0\}$. 由文献 [1, 命题 4.3 和 4.11] 中的证明可得 $\tilde{\zeta}_n(x, X_s^{n_k}, \theta, f) \to \bar{\zeta}(x, X_s, \theta, f(x))$ 在 $\mathbb{R}^2$ 上一致成立. 由 (3.20), 令 $k \to \infty$ 即得

$$
\begin{aligned}
\mathrm{e}^{-\langle X_t, f\rangle} = {} & \mathrm{e}^{-\langle X_0, f\rangle} + \int_0^t ds \mathrm{e}^{-\langle X_s, f\rangle}\int_{\mathbb{R}} X_s(dx)\bigg\{\phi(x, X_s, f(x)) + \int_{\mathbb{R}} \bar{\zeta}(x, X_s, \theta, f(x))\pi(x, X_s, d\theta) \\
& - \beta(x, X_s)A(X_s)f(x) + \alpha(x, X_s)f(x)^2 + \gamma(x, X_s)f(x)\bigg\} + \text{局部鞅}.
\end{aligned} \tag{3.21}
$$

于是, 由文献 [1, 定理 7.13] 的证明知结论成立. □

注 3.2 由文献 [1, 定理 7.13], 鞅问题 (3.19) 的解 $\{X_t : t \geqslant 0\}$ 可以看成是带交互的超过程, 它只有局部分枝机制 $(x,\nu,z) \mapsto \gamma(x,\nu)z + \alpha(x,\nu)z^2 + \phi(x,\nu,z) + \int_{\mathbb{R}} \bar{\zeta}(x,\nu,\theta,z)\pi(x,\nu,d\theta)$, 其底运动是非平凡的并且被 βA 所决定.

接下来讨论鞅问题 (3.19) 的分布唯一性.

对 $(p,\nu) \in \mathbb{R} \times M(\mathbb{R})$, 令

$$
B_0(p,\nu) = \int_{\mathbb{R}} \bar{\kappa}(x,\nu)1_{(-\infty,p]}(x)\nu(dx).
$$

定义 $M(\mathbb{R})$ 上的距离 ρ:

$$
\rho(\nu_1,\nu_2) = \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{|x|}|\nu_1(-\infty,x] - \nu_2(-\infty,x]|dx.
$$

为了方便叙述, 列出如下条件:

条件 3.6 (1) $\beta \in \mathbb{R}_+$ 是常数. 对任意的 $(x,\nu)\in\mathbb{R}\times M(\mathbb{R})$ 和 $f\in C_c^2(\mathbb{R})$, A 有如下表示:

$$A(\nu)f(x)=h_1(\nu)f'(x)+h_2f''(x)+\int_{\mathbb{R}^\circ}[f(x+z)-f(x)-f'(x)z1_{\{|z|\leqslant 1\}}]\mu(\nu,dz),$$

其中 $\mathbb{R}^\circ:=\mathbb{R}\setminus\{0\}$, $h_1\in B(M(\mathbb{R}))$, $h_2\in\mathbb{R}_+$, $(1\wedge z^2)\mu(\nu,dz)$ 是从 $M(\mathbb{R})$ 到 $\mathbb{R}^\circ$ 的有界核. 另外, μ 在 $\{z:|z|\leqslant 1\}$ 上的限制不依赖于 ν, 并且存在 $C\in\mathbb{R}_+$ 以及 $\{z:|z|>1\}$ 上的有限测度 $\bar{\mu}$ 满足, 对任意的 $p\in\mathbb{R}$、$\nu_1,\nu_2\in M(\mathbb{R})$ 和 $f\in B(\mathbb{R})^+$, 有

$$\begin{aligned}
&|B_0(p,\nu_1)-B_0(p,\nu_2)|\leqslant C|\nu_1(-\infty,p]-\nu_2(-\infty,p]|,\\
&|h_1(\nu_1)-h_2(\nu_2)|\leqslant C\rho(\nu_1-\nu_2),\\
&\left|\int_{\{|z|>1\}}f(z)\mu(\nu_1,dz)-\int_{\{|z|>1\}}f(z)\mu(\nu_2,dz)\right|\leqslant\rho(\nu_1-\nu_2)\int_{\{|z|>1\}}f(z)\bar{\mu}(dz).
\end{aligned}$$

(2) 存在 $\sigma_0\in B(\mathbb{R})^+$ 以及 $\mathbb{R}_+$ 上的有界核 $(u\wedge u^2)\bar{n}_0(y,du)$ 满足, 对所有的 $(x,\nu)\in\mathbb{R}\times M(\mathbb{R})$, 有

$$\sigma(x,\nu)=\sigma_0(\nu(-\infty,x])^2\quad 以及\quad n_0(x,\nu,du)=\bar{n}_0(\nu(-\infty,x],du).$$

定理 3.5 假设条件 3.6 成立, 则鞅问题 (3.19) 的解是分布唯一的.

证明 类似文献 [5, 定理 3.1] 中的计算, 由定理 3.4 可得, 如果一个左极右连的 $M(\mathbb{R})$ 值的过程 $\{X_t:t\geqslant 0\}$ 是 (3.19) 的解, 则在一个扩充的概率空间上存在以 $dsdu$ 为强度的 Gauss 白噪声 $\{W_0(ds,du):s\geqslant 0,u>0\}$ 和以 $ds\bar{n}_0(y,du)dy$ 为强度的补偿 Poisson 随机测度 $\{\tilde{M}_0(ds,du,dy):s\geqslant 0,u>0,y>0\}$ 使得由 $Y_t(p):=X_t(-\infty,p]$ 定义的随机过程 $\{Y_t(p):t\geqslant 0,p\in\mathbb{R}\}$ 满足以下随机方程:

对任意的 $t\geqslant 0$ 和 $f\in D(A)$, 有

$$\begin{aligned}
\langle Y_t,f\rangle=\langle Y_0,f\rangle&+\beta\int_0^t\langle Y_s,A(X_s)f\rangle ds+\int_{\mathbb{R}}f(p)dp\int_0^t\int_0^{Y_{s-}(p)}\sigma_0(u)W_0(ds,du)\\
&-\int_0^t\langle B_0(\cdot,X_s),f\rangle ds+\int_{\mathbb{R}}f(p)dp\int_0^t\int_0^\infty\int_0^{Y_{s-}(p)}u\tilde{M}_0(ds,du,dy),
\end{aligned}\tag{3.22}$$

其中对于 $g,h\in B(\mathbb{R})$, 有 $\langle g,h\rangle=\int_{\mathbb{R}}g(x)h(x)dx$. 由文献 [6, 定理 4.2] 知, 上述方程有轨道唯一的解, 于是结论成立. □

设 $\{X_t:t\geqslant 0\}$ 是满足鞅问题 (3.19) 的左极右连过程. 由定理 3.4 和 3.5 立刻得到下面的定理:

定理 3.6 假设条件 3.4–3.6 均成立并且 X_0^n 弱收敛到 $X_0\in M(\mathbb{R})$, 则 $\{X_t^n:t\geqslant 0\}$ 在 $D(\mathbb{R}_+,M(\mathbb{R}))$ 中依分布收敛到 $\{X_t:t\geqslant 0\}$.

致谢 感谢审稿人对初稿中一些书写错误的指正.

参考文献

1 Li Z. Measure-Valued Branching Markov Processes. Berlin: Springer, 2011
2 Fournier N, Méléard S. A microscopic probabilistic description of a locally regulated population and macroscopic approximations. Ann Appl Probab, 2004, 14: 1880–1919
3 Champagnat N, Ferrière R, Méléard S. From individual stochastic processes to macroscopic models in adaptive evolution. Stoch Models, 2008, 24: 2–44
4 Li Z. Path-valued branching processes and nonlocal branching superprocesses. Ann Probab, 2014, 42: 41–79

5 He H, Li Z, Yang X. Stochastic equations of super-Lévy processes with general branching mechanism. Stochastic Process Appl, 2014, 124: 1519–1565
6 Xiong J, Yang X. Superprocesses with interaction and immigration. Stochastic Process Appl, 2016, 126: 3377–3401
7 Joffe A, Metivier M. Weak convergence of sequences of semimartingales with applications to multitype branching processes. Adv Appl Probab, 1986, 18: 20–65
8 Roelly-Coppoletta S. A criterion of convergence of measure-valued processes: Application to measure branching processes. Stochastics, 1986, 17: 43–65
9 Dawson D A, Li Z. Stochastic equations, flows and measure-valued processes. Ann Probab, 2012, 40: 813–857

Branching interacting particle systems with mutation and related limit theorems

Rugang Ma

Abstract In this paper, a class of branching particle systems with interaction and mutation are constructed as the solutions of a class of jump-type stochastic integral equations driven by some Poisson random measures. We show that, under some conditions, the scaling limit of these particle systems is a superprocess with interaction, with local and non-local branching mechanism and trivial spatial motion or with local branching mechanism and non-trivial spatial motion.

Keywords **branching particle system, interaction, mutation, stochastic integral equation, non-local branching mechanism, scaling limit**

MSC(2010) **60H20, 60J80**

doi: 10.1360/SCM-2018-0149