非绝热和乐量子计算研究进展

赵培茆, 许国富*, 仝殿民*

山东大学物理学院, 济南 250100

* 联系人, E-mail: sduxgf@163.com; tdm@sdu.edu.cn

2021-01-08 收稿, 2021-02-26 修回, 2021-03-01 接受, 2021-03-02 网络版发表

国家自然科学基金(11575101, 11775129)资助

摘要 量子计算的实际应用依赖于高保真度的量子门, 而获得高保真度量子门所面临的两个主要挑战是克服系统的控制误差和环境噪声. 几何相仅依赖于系统的演化路径而与演化速度等细节无关, 因此基于几何相设计的量子门具有对控制误差的鲁棒性. 特别是, 基于非绝热非阿贝尔几何相设计的非绝热和乐(holonomic)门具有完全的几何性质并且不受绝热条件的限制, 受到了人们的广泛关注. 自2012年首次提出以来, 非绝热和乐量子计算取得了很大的进展: 人们逐步改进了非绝热和乐量子计算的设计理论, 使得非绝热和乐门的设计不断优化; 发展了抗退相干的非绝热和乐量子计算, 使得量子门既能抵抗控制误差又能抵抗退相干; 构建了基于各种具体物理系统的非绝热和乐量子计算方案, 并且在实验上成功演示了非绝热和乐门. 本文回顾了非绝热和乐量子计算的主要理论进展, 并简要介绍了物理实现和实验工作.

关键词 几何相, 非阿贝尔几何相, 量子门, 非绝热和乐量子计算

量子计算具有超越经典计算的运算能力, 可以解决经典计算机不能有效解决的问题, 比如大数因子分解问题^[1]和无结构数据库搜索问题^[2]. 量子计算的实际应用依赖于高保真度的量子门, 而实现高保真度量子门却面临着很大的挑战, 其中两个主要挑战是克服系统的控制误差和环境噪声. 量子系统的几何相具有仅依赖于系统演化路径而与演化速度等细节无关的特点, 因此基于几何相设计的量子门具有对系统控制误差的鲁棒性. 进一步, 把基于几何相的量子门设计理论与抗退相干的量子态保护理论相结合, 可以使几何量子计算具有对控制误差鲁棒性的同时又避开了环境噪声的影响.

量子系统的几何相理论是几何量子计算的基础. 1984年, Berry^[3]发现处于非简并能本征态的量子系统经历绝热周期演化后, 除了获得人们熟知的动力学

相位外, 还获得一个只依赖于演化路径而与演化速度无关的几何相位, 这个相位被称为Berry相. 这一概念很快被推广到具有简并能本征态量子系统的绝热演化过程. 研究发现, 处于简并能本征态的量子系统经过绝热周期演化后将获得一个由矩阵描述的绝热非阿贝尔几何相^[4]. 随后, 几何相的概念被推广到非绝热周期演化的量子态和非绝热周期演化的量子态子空间. 量子态经过非绝热周期演化后仍可获得几何相, 即非绝热阿贝尔几何相, 又被称为AA相^[5], 并且当量子态不是周期演化但量子态所在的状态子空间是周期演化时, 量子态经所在子空间周期演化后将获得一个非阿贝尔相^[6]. 至今, 几何相的概念已经从封闭系统的纯态几何相发展到么正演化的混合态几何相^[7,8]和非么正演化的混合态几何相^[9].

关于几何量子计算, 人们最初提出的是基于Berry

引用格式: 赵培茆, 许国富, 仝殿民. 非绝热和乐量子计算研究进展. 科学通报, 2021, 66: 1935–1945

Zhao P Z, Xu G F, Tong D M. Advances in nonadiabatic holonomic quantum computation (in Chinese). Chin Sci Bull, 2021, 66: 1935–1945, doi: [10.1360/TB-2021-0036](https://doi.org/10.1360/TB-2021-0036)

相的绝热几何量子计算^[10]和基于绝热非阿贝尔几何相的绝热和乐量子计算^[11,12],随后逐步发展并提出了基于非绝热阿贝尔几何相的非绝热几何量子计算^[13,14]和基于非绝热非阿贝尔几何相的非绝热和乐量子计算^[15,16].人们通常把这四类基于几何相设计量子门的方案统称为几何量子计算,而把基于非阿贝尔几何相的量子计算又特称为和乐量子计算,并且在不引起混淆的情况下,几何量子计算有时也被用来特指基于阿贝尔几何相的量子计算.对于基于阿贝尔几何相的量子门,它的几何性表现在单个几何相位参数上;而对于基于非阿贝尔几何相的量子门,演化算符整体就是几何的.对于绝热几何量子计算与绝热和乐量子计算,量子系统都必须满足绝热条件^[17],这意味着系统哈密顿量的变化必须非常缓慢,而系统的缓慢演化将使得量子门长时间暴露在环境中,增加了系统的退相干.非绝热和乐量子计算在前人工作的基础上,吸收了绝热和乐量子计算和非绝热几何量子计算的优点,使得非绝热和乐量子计算与绝热和乐量子计算相比不受绝热条件的限制,可以实现快速演化;与非绝热几何量子计算相比,其通用量子门具有全几何性质.

非绝热和乐量子计算自2012年首次被提出以来就引起了人们的广泛关注.截至目前,非绝热和乐量子计算已经取得了很大的进展:人们逐步改进了非绝热和乐量子计算的设计理论,使得非绝热和乐门的操作时间不断缩短;发展了抗退相干的非绝热和乐量子计算,使得量子门既能抵抗操控误差又能抵抗退相干;设计了基于各种具体物理系统的非绝热和乐量子计算方案,并且在实验上成功演示了非绝热和乐门.本文回顾非绝热和乐量子计算的主要理论进展并简要介绍物理实现和实验工作,主要分为四部分:非绝热和乐量子计算的理论基础、非绝热和乐门的基本设计方案、抗噪声的非绝热和乐量子计算以及非绝热和乐量子计算的物理实现和实验演示.

1 非绝热和乐量子计算的理论基础

首先介绍非绝热和乐量子计算的理论基础.考虑一个由哈密顿量 $H(t)$, $t \in [0, \tau]$ 控制的 N 维量子系统,相应的演化算符记为 $U(t) = T\exp\left[-i\int_0^t H(t')dt'\right]$.量子系统的状态满足薛定谔方程 $i\dot{|\phi_k(t)\rangle} = H(t)|\phi_k(t)\rangle$, $k=1,2,\dots,N$, 这里 $\{|\phi_k(t)\rangle\}_{k=1}^N$ 表示薛定谔方程的 N 个独立正交

解, $|\phi_k(t)\rangle$ 对应的初态为 $|\phi_k(0)\rangle$.如果这个 N 维解空间中存在一个 L 维子空间,记为 $S(t) = \text{Span}\{|\phi_k(t)\rangle\}_{k=1}^L$,满足下面两个基本条件:

$$(i) \sum_{k=1}^L |\phi_k(\tau)\rangle\langle\phi_k(\tau)| = \sum_{k=1}^L |\phi_k(0)\rangle\langle\phi_k(0)|, \quad (1)$$

$$(ii) \langle\phi_l(t)|H(t)|\phi_k(t)\rangle = 0, \quad l, k = 1, 2, \dots, L, \quad (2)$$

那么把 $S(0)$ 作为逻辑门编码空间,量子系统经历时间 τ 的演化后, $U(\tau)$ 对编码空间的作用就是一个 L 维非绝热和乐门^[15,16].这里条件(i)通常被称为周期演化条件,条件(ii)为平行移动条件,它们保证了 $U(\tau)$ 对计算空间作用的规范不变性,下面沿用文献^[16]的思路证明这一点.

条件(i)保证了 L 维子空间 $S(t)$ 在 $0 \leq t \leq \tau$ 时间内经历了一个周期演化,因此可引入满足 $|\nu_k(\tau)\rangle = |\nu_k(0)\rangle = |\phi_k(0)\rangle$ 的一组函数 $\{|\nu_k(t)\rangle\}_{k=1}^L$ 作为这个子空间的一组辅助基矢,这组辅助基矢所张开的空间与 $\{|\phi_k(t)\rangle\}_{k=1}^L$ 所张开的空间相同,但它们一般不是薛定谔方程的解.利用这组辅助基矢,可把 $|\phi_k(t)\rangle$ 展开为

$$|\phi_k(t)\rangle = \sum_{l=1}^L |\nu_l(t)\rangle C_{lk}(t), \quad (3)$$

式中, $C_{lk}(t)$ 为含时系数,并注意 $|\phi_k(t)\rangle$ 是薛定谔方程的解.将式(3)代入薛定谔方程得

$$\dot{C}_{lk}(t) = i \sum_{m=1}^L [A_{lm}(t) - K_{lm}(t)] C_{mk}(t), \quad (4)$$

式中, $A_{lm}(t) = i\langle\nu_l(t)|\dot{\nu}_m(t)\rangle$, $K_{lm}(t) = \langle\nu_l(t)|H(t)|\nu_m(t)\rangle$.

当 $\{|\phi_k(t)\rangle\}_{k=1}^L$ 满足平行移动条件(ii)时,可推得 $\{|\nu_k(t)\rangle\}_{k=1}^L$ 也满足平行移动条件,即 $K_{kl}(t) = 0$.因此式(4)可简化为

$$\dot{C}_{lk}(t) = i \sum_{m=1}^L A_{lm}(t) C_{mk}(t). \quad (5)$$

求解上式可得 $C(t) = T\exp\left[i\int_0^t A(t')dt'\right]$.特别是当 $t = \tau$ 时,有

$$C(\tau) = T\exp\left[i\int_0^\tau A(t)dt\right]. \quad (6)$$

由式(3)可知

$$|\phi_k(\tau)\rangle = \sum_{l=1}^L |v_l(\tau)\rangle C_{lk}(\tau) = \sum_{l=1}^L |\phi_l(0)\rangle C_{lk}(\tau),$$

即 $C(\tau)$ 等价于演化算符 $U(\tau)$ 对子空间的作用, 因此欲证明 $U(\tau)$ 对子空间作用的规范不变性, 只需要证明 $C(\tau)$ 不依赖于辅助基矢 $\{|v_k(t)\rangle\}_{k=1}^L$ 的选取. 为此, 用另一组满足 $|\nu'_k(\tau)\rangle = |\nu'_k(0)\rangle = |\phi_k(0)\rangle$ 的正交基矢 $\{|\nu'_k(t)\rangle\}_{k=1}^L$ 代替 $\{|v_k(t)\rangle\}_{k=1}^L$, 两组基矢之间存在幺正变换矩阵 V 使得 $|\nu'_k(t)\rangle = \sum_{l=1}^L |v_l(t)\rangle V_{lk}(t)$. 将其代入 $A'_{lm}(t) = i\langle \nu'_l(t) | \dot{\nu}'_m(t) \rangle$, 可得 $A'_{lm} = (V^\dagger A V)_{lm} + i(V^\dagger \dot{V})_{lm}$. 注意到 $V(\tau) = V(0) = I$, 于是有

$$T \exp \left[i \int_0^\tau A'(t) dt \right] = T \exp \left[i \int_0^\tau A(t) dt \right],$$

即 $C'(\tau) = C(\tau)$.

上述论证表明, 演化算符 $U(\tau)$ 对计算空间的作用完全取决于由 $\{|\phi_k(t)\rangle\}_{k=1}^L$ 所确定的空间本身, 而不依赖于空间基矢的选取. 或者等价地说, 演化算符 $U(\tau)$ 对计算空间的作用完全取决于量子态的演化路径而不依赖于演化速度等细节. 因此即便在演化过程中量子系统的哈密顿量不能精确控制, 但只要保证量子态在设定的编码空间内演化, 这样的控制误差就不影响量子门的保真度.

2 非绝热和乐门的基本设计理论

非绝热和乐量子计算被提出以后, 所开展的研究工作主要分为三方面, 一是逐步改进非绝热和乐门的理论设计, 旨在优化量子系统的演化路径、缩短量子门的操作时间; 二是发展抗环境噪声的非绝热和乐量子计算, 使得量子门既能抵抗操控误差又能抵抗退相干; 三是设计基于各种具体物理系统的非绝热和乐量子计算方案, 并在实验上演示非绝热和乐门. 本节介绍第一方面的工作, 并以任意单比特门的设计为例进行介绍.

2.1 基于共振三能级模型的设计理论

实现非绝热和乐量子计算就是要构造满足周期演化条件(i)和平行移动条件(ii)的量子系统, 研究发现, 利用共振三能级模型就可以构造这样的量子系统, 这是早期的非绝热和乐量子计算方案所使用的量子系统模

型^[15,16]. 如图1, 考虑由两个基态 $|0\rangle$ 、 $|1\rangle$ 和一个激发态 $|e\rangle$ 组成的三能级系统, 哈密顿量为 $H(t) = \Omega_0(t)|e\rangle\langle 0| + \Omega_1(t)|e\rangle\langle 1| + \text{H.c.}$, 这里H.c.表示厄米共轭, 量子比特编码在 $|0\rangle$ 和 $|1\rangle$ 上. 容易验证, 当把系统参数 $\Omega_0(t)$ 和 $\Omega_1(t)$ 取为 $\Omega_0(t) = \Omega(t)\sin(\theta/2)\exp(i\varphi)$ 和 $\Omega_1(t) = -\Omega(t)\cos(\theta/2)$ 时, 从计算空间出发的量子态在整个演化过程中始终满足平行移动条件(ii), 这里 $\Omega(t)$ 是可随时间变化的函数, θ 和 φ 是不含时间的参数. 如果进一步要求 $\Omega(t)$ 与演化时间 τ 之间满足 $\int_0^\tau \Omega(t)dt = \pi$, 那么从计算空间 $\text{Span}\{|0\rangle, |1\rangle\}$ 出发的量子态在经历 τ 时间演化后将回到该空间, 即满足周期演化条件(i). 此时, 演化算符对计算空间的作用可表示为 $U(\tau) = \exp(-i\pi \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma} / 2)$, 这里 $\mathbf{n} = (\sin\theta\cos\varphi, \sin\theta\sin\varphi, \cos\theta)$. 由于参数 θ 和 φ 可根据需要任意选取, 因此 $U(\tau)$ 是一个绕任意轴 $\mathbf{n}$ 旋转 π 角的非绝热和乐门, 通过组合两个绕不同旋转轴的 π 门可实现任意单比特门.

2.2 基于非共振三能级模型的设计理论

基于非共振三能级模型的非绝热和乐量子计算方案, 亦即一步实现方案, 是2015年被提出的^[18,19]. 如前所述, 在共振三能级方案中, 实现一个任意单比特门一般需要通过组合两个绕不同旋转轴旋转 π 角的单比特门实现, 即通过两步实现. 为了简化操作过程, 文献^[18,19]发现, 如果用非共振三能级系统取代原来方案中的共振三能级系统, 那么一步即可实现任意单比特量子门. 如图2, 非共振三能级模型的哈密顿量为 $H(t) = A|e\rangle\langle e| + [\Omega_0(t)|e\rangle\langle 0| + \Omega_1(t)|e\rangle\langle 1| + \text{H.c.}]$, 这里失谐量参数 A 的引入可使得量子门的旋转角由固定角 π 变成任意角, 从而可以一步实现作用在 $\text{Span}\{|0\rangle, |1\rangle\}$ 上的任意单比特门. 为了保证平行移动条件成立, 将哈密顿量的参数取为 $\Omega_0(t) = \Omega\cos\phi\sin(\theta/2)\exp(i\varphi)$, $\Omega_1(t) = -\Omega\cos\phi\cos(\theta/2)$, $A = 2\Omega\sin\phi$, 式中 Ω 、 ϕ 、 θ 和 φ 均不含时. 如果进一步要求量子系统的演化时间满足 $\Omega\tau = \pi$, 那么也保证了周期演化条件成立. 在上述参数的设定下, 系统经过 τ 时间的演化后将得到

$$U(\tau) = \exp[-i\pi(1 + \sin\phi)\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma} / 2],$$

即绕 $\mathbf{n}$ 轴旋转 $\pi(1 + \sin\phi)$ 角的单比特门.

图1 (网络版彩色)共振三能级模型示意图
Figure 1 (Color online) Schematic of the resonant three-level model

图2 (网络版彩色)非共振三能级模型示意图
Figure 2 (Color online) Schematic of the off-resonant three-level model

2.3 基于共振三能级模型的单回路多脉冲设计理论

文献[18,19]用非共振三能级系统取代了原始方案中的共振三能级系统,从而一步实现了一般单比特门,缩短了量子门的操作时间.后来发现,如果对共振三能级模型作一些改进,如选取多段式哈密顿量,也可同样达到缩短量子门操作时间的目的,这个改进的方案被称为单回路多脉冲方案^[20].该方案使用的哈密顿量仍是 $H(t) = \Omega_0(t)|e\rangle\langle 0| + \Omega_1(t)|e\rangle\langle 1| + \text{H.c.}$, $t \in [0, \tau]$,但哈密顿量中的含时参数取为分段函数.在 $t \in [0, \tau_1]$ 阶段,取 $\Omega_0(t) = \Omega(t)\sin(\theta/2)\exp(i\varphi)$, $\Omega_1(t) = -\Omega(t)\cos(\theta/2)$.这里, τ_1 满足 $\int_0^{\tau_1} \Omega(t)dt = \pi/2$.而在 $t \in (\tau_1, \tau]$ 阶段,取 $\Omega_0(t) = \Omega(t)\sin(\theta/2)\exp[i(\varphi + \phi + \pi)]$, $\Omega_1(t) = -\Omega(t)\cos(\theta/2)\exp[i(\phi + \pi)]$,并要求演化时间满足 $\int_{\tau_1}^{\tau} \Omega(t)dt = \pi/2$.也就是说,在第二演化阶段引入了一个额外的拉比频率相位参数 $\phi + \pi$,使量子门的旋转角由原来的固定角 π 变成任意角,达到了量子系统经历单个回路的演化即可实现任意单比特门的目的.

2.4 推广的单回路多脉冲设计理论

为了进一步缩短量子门的操作时间,文献[21]提出

了拓展的单回路多脉冲方案,又称为路径缩短方案.研究证明,通过非共振三能级哈密顿量参数的分段选取可达到进一步缩短量子系统演化路径的目的.用 $H_j = \Delta_j|e\rangle\langle e| + \Omega_j[\exp(i\phi_j)|e\rangle\langle b| + \text{H.c.}]$ 表示在 τ_j 演化时间段的哈密顿量,这里所有参数都不含时.短路径方案设计的关键是在周期演化条件(i)和平行移动条件(ii)限制下建立各分段参数间所需满足的衔接条件.以 $j = 1, 2$ 为例,令 $\vartheta_j = \sqrt{(\Delta_j/2)^2 + \Omega_j^2} \tau_j$, $\tan \eta_j = 2\Omega_j/\Delta_j$,那么当参数的选取满足 $|\sin \vartheta_1 \sin \eta_1| = |\sin \vartheta_2 \sin \eta_2|$ 时,就可通过调节相位参数 ϕ_2 使量子系统在整个演化过程中同时满足周期演化条件和平行移动条件.具体地,若 $|\sin \vartheta_1 \sin \eta_1| = |\sin \vartheta_2 \sin \eta_2| = 1$,则 ϕ_2 是一个全局相位,其取值不受限制;若 $|\sin \vartheta_1 \sin \eta_1| = |\sin \vartheta_2 \sin \eta_2| < 1$,则取 $\phi_2 = \phi_1 + (\Delta_1 - \Delta_2)\tau - a - \sum_{j=1,2} \arg(\cos \vartheta_j + i \sin \vartheta_j \cos \eta_j)$.这里,当 $\sin \vartheta_1 \sin \eta_1$ 与 $\sin \vartheta_2 \sin \eta_2$ 同号时 $a = \pi$;异号时 $a = 0$.注意之前方案的演化路径都是 $\sum_j \vartheta_j = \pi$,而路径缩短方案演化路径允许 $\sum_j \vartheta_j < \pi$,因此该方案缩短了系统的演化路径,从而缩短了量子门的操作时间.

2.5 非绝热和乐量子计算哈密顿量的构造

实现非绝热和乐量子计算的关键问题之一是构造满足周期演化条件和平行移动条件的量子系统,除上述方案中通过尝试找到的那些特殊哈密顿量外,文献[22]提出了一种构造非绝热和乐量子计算哈密顿量的一般方法,该方法可用于构造实现包括单比特门和双比特门在内的任意 L 维量子门的哈密顿量.其基本结论是:为了实现一个 L 维量子逻辑门,只需选择一组满足条件 $|v_k(\tau)\rangle = |v_k(0)\rangle$ 的辅助基矢 $\{|v_k(t)\rangle\}_{k=1}^{L+1}$,写出

$$H(t) = \left[i \sum_{k=1}^L \langle v_k(t) | \dot{v}_{L+1}(t) \rangle |v_k(t)\rangle \langle v_{L+1}(t)| + \text{H.c.} \right] + [i \langle v_{L+1}(t) | \dot{v}_{L+1}(t) \rangle - \gamma(t)] |v_{L+1}(t)\rangle \langle v_{L+1}(t)|$$

(式中 $\gamma(t)$ 是一个满足 $\gamma(0) = 0$ 的任意实函数),那么初始条件为 $|\phi_k(0)\rangle = |v_k(0)\rangle$ 的薛定谔方程 $i|\dot{\phi}_k(t)\rangle = H(t)|\phi_k(t)\rangle$ 的解所构成的子空间 $S_L(t) = \text{Span}\{|\phi_k(t)\rangle\}_{k=1}^L$ 就自然满足周期演化条件(i)和平行移动条件(ii).因此

把 $S_L(0) = \text{Span}\{|\phi_k(0)\rangle\}_{k=1}^L$ 作为量子门的编码空间, 演化算符 $U(\tau) = T \exp\left[i \int_0^\tau A(t) dt\right]$ (式中, $A_{ij}(t) = i\langle v_i(t) | \dot{v}_j(t) \rangle$) 在 $S_L(0)$ 上的作用就是一个只依赖于演化路径而不依赖于演化细节的乐门. 辅助基矢 $\{|\nu_k(t)\rangle\}_{k=1}^{L+1}$ 决定了编码量子空间量子态的演化路径, 因此这里所给出的构造哈密顿量的方法为优化系统演化路径、缩短量子门操作时间提供了一种有效途径. 此外, 参数 $\gamma(t)$ 选取的任意性可帮助简化哈密顿量的物理实现.

在非绝热和乐门的基本设计理论方面, 除了上述介绍的这些研究进展外, 人们也提出了增强非绝热和乐门对控制误差鲁棒性的方案, 比如复合门方案^[23]、构造环境算符方案^[24]以及设计优化算法方案^[25]等. 本文不再一一介绍.

3 抗退相干的非绝热和乐量子计算

上节介绍了非绝热和乐量子计算的基本设计理论, 这些理论解决了如何通过构造满足周期演化条件和平行移动条件的量子系统来实现非绝热和乐门的问题, 而并没有考虑环境噪声引起的退相干的影响. 接下来, 介绍在环境噪声存在时, 如何通过结合非绝热和乐量子计算与抗退相干技术来构造抗退相干的非绝热和乐量子计算.

3.1 无退相干子空间中的非绝热和乐量子计算

为了使量子计算既能抵抗操控误差又能抵抗退相干, 文献[16]提出了基于无退相干子空间的非绝热和乐量子计算. 考虑由哈密顿量 H 控制的量子系统, 它与环境的相互作用由哈密顿量 $H_I = \sum_a S_a \otimes B_a$ 描述, 其中 S_a 为系统算符, B_a 为环境算符. 如果所有 S_a 都存在一组简并本征态 $\{|\psi_1\rangle, |\psi_2\rangle, \dots, |\psi_K\rangle\}$, 并且它所对应的本征空间 $S = \text{Span}\{|\psi_k\rangle\}_{k=1}^K$ 为哈密顿量 H 的不变子空间, 即满足 $S_a|\psi_k\rangle = \lambda_a|\psi_k\rangle$ 和 $H|\psi_k\rangle \in S$, 那么从 S 出发的量子态将不受环境噪声的影响, 其动力学演化是酉演化, 即 S 是一个无退相干子空间. 进一步, 如果 S 内还存在一个满足前述周期演化条件和平行移动条件的 L 维子空间 $S^L = \text{Span}\left\{|\psi_{k_j}\rangle\right\}_{j=1}^L$, 那么把量子比特编码在 S^L 内, 作用在该子空间上的酉算符就是非绝热和乐门.

文献[16]以 N 个处在集体退相位环境中的物理比特所组成的量子系统为例, 首次提出了无退相干子空间中的非绝热和乐量子计算. 文中的系统哈密顿量 $H = \sum_{k < l}^N (J_{kl}^x R_{kl}^x + J_{kl}^y R_{kl}^y)$, 其中 J_{kl}^x 和 J_{kl}^y 为比特之间的耦合参数, $R_{kl}^x = (\sigma_k^x \sigma_l^x + \sigma_k^y \sigma_l^y) / 2$ 和 $R_{kl}^y = (\sigma_k^x \sigma_l^y - \sigma_k^y \sigma_l^x) / 2$ 分别为 XY 相互作用部分和 DM 相互作用部分, $\sigma_k^{\alpha(x,y,z)}$ 是作用在第 k 个比特上的泡利算符. 系统与环境相互作用 $H_I = S_N \otimes B$, 其中 $S_N = \sum_k \sigma_k^z$ 是系统的集体自旋算符, B 是环境算符. 当 $N=3$ 时, $S = \text{Span}\{|100\rangle, |010\rangle, |001\rangle\}$ 是一个无退相干子空间, 而由 $|0\rangle_L = |010\rangle$ 和 $|1\rangle_L = |001\rangle$ 张开的子空间可作为计算空间. 如果取哈密顿量的非零参数为 $J_{12}^x = -J_{13}^x = J(t) \cos(\phi/2)$, $J_{12}^y = J_{13}^y = -J(t) \sin(\phi/2)$, 并且 $\int_0^\tau J(t) dt = \pi/\sqrt{2}$, 那么演化算符在编码空间上的作用就是非绝热和乐门. 在这个方案中, 一个任意单比特门需要组合多个特定单比特门来实现, 为了简化操作, 文献[26]提出了无退相干子空间中非绝热和乐门的一步实现方案, 通过引入作用在单比特上的局部场使编码态与辅助态之间产生非共振耦合, 从而可以一步实现任意单比特门. 在实现双比特门方面, 文献[27]提出了基于两体相互作用的双比特门设计方案, 改进了原始方案的双比特门设计.

3.2 无噪声子体系中的非绝热和乐量子计算

上述无退相干子空间中的非绝热和乐量子计算针对的是集体退相位噪声, 一种更一般的情况是量子比特既受到集体退相位噪声的影响, 也受到集体退极化等噪声的影响. 针对这种更一般的情况, 文献[28]提出了基于无噪声子体系的非绝热和乐量子计算. 其核心思想是把 N 个比特张开的大空间按照比特的总自旋量子数 J 分成正交的子空间, 其中某个特定的 J 对应的子空间可能是简并的, 每一个简并的小空间就是一个子体系. 由于 3 个集体算符对每个简并小空间的影响是相同的, 因此储存在不同小空间中的信息受到的影响也相同, 它们之间的相对大小和相位并不会被改变, 这样就形成了一个维度与 J 的简并度相同的不受噪声影响的小空间. 由于这个小空间与简并的小空间是直积关系, 故而通常称为无噪声子体系. 通过计算发现, 当 $N=4$, $J=1$ 时具有三重简并度, 可以提供非绝热方案需

要的3个等效能级,因此可以利用4个量子比特来编码1个逻辑比特,不同等效能级之间的耦合可以通过比特之间的海森堡相互作用实现。

3.3 动力学解耦保护的非绝热和乐量子计算

无退相干子空间与无噪声子体系中的非绝热和乐量子计算主要针对集体退相干。为了使非绝热和乐量子计算既能克服集体退相干又能克服独立退相干,文献[29]提出了动力学解耦保护的非绝热和乐量子计算方案。考虑由 N 个量子比特组成的物理系统,系统和环境相互作用由哈密顿量 $H_I = \sum_{k,\alpha} \sigma_k^\alpha \otimes B_k^\alpha$ 描述,其中 B_k^α 为第 k 个量子比特中泡利算符 σ^α 所对应的环境算符。环境引起的退相干可通过动力学解耦来抑制,抑制该退相干的解耦序列为 $\{\otimes_{k=1}^N I_k, \otimes_{k=1}^N \sigma_k^x, \otimes_{k=1}^N \sigma_k^y, \otimes_{k=1}^N \sigma_k^z\}$ 。在实现动力学解耦保护的非绝热和乐量子计算过程中,解耦序列的介入可能会影响系统本身的演化。为了使解耦序列与量子系统本身的演化相容,选取与解耦序列对易的系统哈密顿量 $H_N = \sum_{k<l} [J_{kl}^x(\sigma_k^x \sigma_l^x + \sigma_k^y \sigma_l^y) + J_{kl}^z \sigma_k^z \sigma_l^z]$,这样的选取即使量子系统受动力学解耦保护,又可保证周期演化条件(i)与平行移动条件(ii)成立。用 $|0\rangle_L = |001\rangle$ 和 $|1\rangle_L = |010\rangle$ 编码量子比特,同时把 $|100\rangle$ 用作辅助态,如果将系统的参数选取为 $J_{12}^x = -J(t)\cos\phi\cos(\theta/2)/2$, $J_{13}^x = J(t)\cos\phi\sin(\theta/2)/2$, $J_{23}^z = J(t)\sin\phi$,并且要求系统的演化时间满足 $\int_0^T J(t)dt = \pi$,那么作用在计算空间上的演化算符就是可以受动力学解耦保护的非绝热和乐门。

3.4 基于表面码的非绝热和乐量子计算

表面码是一种非常重要的纠错码,它由一个二维网格构成,每个格点表示一个物理比特。通过对这些格点上的物理比特进行操作可以实现对表面码的逻辑操作,进而实现由表面码保护的量子计算。如果对格点上物理比特的操作为非绝热和乐门,那么就可以实现由表面码保护的非绝热和乐量子计算^[30,31]。考虑一个二维正方网格,每个格点表示一个物理比特。物理比特分为测量比特、数据比特和辅助比特。测量比特进一步分为 Z 类和 X 类,辅助比特进一步分为 A 类和 B 类。网格的行(列)分为含有 X 类测量比特的行(列)、含有 Z 类测量比特的行(列)以及纯辅助比特的行(列)。含有 X 类测量比特的行(列)与含有 Z 类测量比特的行(列)间隔一行

(列)纯辅助比特的行(列)。对于含有测量比特的行(列),每两个测量比特间隔3个物理比特,而对于纯辅助比特的行(列), A 类辅助比特和 B 类辅助比特交错排列。每个测量比特近邻的4个物理比特为 A 类辅助比特,次近邻的4个物理比特为数据比特,而斜对角的4个物理比特为 B 类辅助比特。在实现过程中,系统哈密顿量为 XY 型哈密顿量 $H_{jk}^{XY} = J_{jk}(\sigma_j^x \sigma_k^x + \sigma_j^y \sigma_k^y)/2$ 。通过该哈密顿量可实现对数据比特或测量比特的任意单比特门以及量子比特和数据比特间的受控相位门。实现对数据比特或测量比特的单比特非绝热和乐门需考虑该数据比特或测量比特以及与其近邻的一个 A 类辅助比特,并利用它们之间的 XY 型耦合。实现测量比特和数据比特间的双比特受控相位门也需要一个 A 类辅助比特,这个 A 类辅助比特位于测量比特和数据比特之间。通过受控非门以及一个 A 类辅助比特和一个 B 类辅助比特,还可以实现数据比特和测量比特间的 $SWAP$ 门。上述3种非绝热和乐门,即任意单比特门、受控相位门以及双比特 $SWAP$ 门,可实现对表面码的逻辑操作。

4 物理实现和实验演示

物理系统是量子计算的载体,实现非绝热和乐量子计算通常对物理系统的耦合有特别的要求,如何在具体物理系统中构造非绝热和乐量子计算所要求的耦合是实现非绝热和乐量子计算必须解决的问题。另一方面,不同的物理系统在实现量子计算时都展现出它们各自独特的优势,因此基于不同的物理系统构造可选择的非绝热和乐量子计算方案也是人们所关心的课题。随着非绝热和乐量子计算理论设计的发展,各种基于这些理论设计的物理实现方案被提出,同时人们也在实验上成功演示了非绝热和乐门。下面回顾非绝热和乐量子计算在物理实现和实验演示方面的进展。

4.1 基于离子阱的物理实现方案

离子阱是有希望实现量子计算的物理系统之一。在基于离子阱的量子计算中,信息可以编码在离子本身的能量本征态上,也可编码在离子的振动量子态上^[32]。离子阱本身的能级非常稳定,这十分有利于量子系统在相干时间内完成大量逻辑操作。对于离子量子位,单比特门操作可通过激光直接寻址单个离子来完成,双比特门操作可通过振动量子位间接耦合两个离子量子位来完成^[33,34]。对于振动量子位,单比特门操作

可通过离子量子位与振动量子位的耦合,把振动量子位上的信息转移到离子量子位上,从而通过操作离子量子位间接实现对振动量子位的操作,双比特门操作可通过激光直接耦合离子量子位与振动量子位来完成^[32]。非绝热和乐量子计算的原始方案是基于离子阱提出的,该方案所需要的双比特联合操作就是通过间接耦合两个离子量子位来完成的。后来,人们利用该耦合机制在离子阱中提出了无退相干子空间中的非绝热和乐量子计算^[27]。再后来,基于离子阱的非绝热和乐量子计算从通用量子门的实现扩展到了多比特门的实现^[35]。

4.2 基于超导线路的物理实现方案

超导量子线路是具有宏观量子态的固态量子系统,它通过约瑟夫森结引入非线性,从而为基于超导线路的量子计算提供了有效的二能级系统或多能级系统。按照表征量子位的自由度来区分,超导量子位分为电荷量子位^[36,37]、磁通量子位^[38,39]和相位量子位^[40]。量子比特的操控通过成熟的微波技术来完成,芯片的制备由成熟的半导体工艺发展而来,这使得基于超导线路的量子计算具有比较好的可扩展性和可操控性。最初超导量子比特的相干时间比较短,后来人们提出了改良的超导量子比特transmon,大大提高了超导量子比特的相干时间^[41]。第一个基于超导量子比特的非绝热和乐量子计算实验就是基于transmon实现的^[42]。该实验实现了单比特门但并没有实现双比特门,其原因是难以构造使量子系统满足周期演化条件和平行移动条件的比特之间的耦合。为了解决这个问题,人们提出了基于无退相干子空间编码^[43,44]和基于线路QED超强耦合区域^[45]的非绝热和乐量子计算方案。这些方案不仅可以实现单比特门也可以实现双比特门。继这些方案之后,人们还提出了一些其他的非绝热和乐量子计算方案^[46-49]。

4.3 基于里德堡原子的物理实现方案

里德堡原子是指主量子数很大的原子,它具有长寿命的里德堡态和很强的里德堡原子间相互作用^[50,51]。相比于一般的激发态,里德堡态的长寿命有利于量子操控在相干时间内完成。很强的里德堡原子间相互作用可以直接耦合两个原子,这样有利于实现双比特门或原子间的纠缠。里德堡原子如果被激发到里德堡态,那么里德堡态之间就会存在依赖于距离的相互作用。这个相互作用可以改变原子的能级结构,使得共振的

激光不能同时将两个及两个以上的里德堡原子从基态激发到里德堡态,这就是里德堡阻塞^[52,53]。由于里德堡阻塞,限制在阻塞半径内的里德堡原子系综只允许一个里德堡原子被激发到里德堡态^[53],从而形成一个介观尺度的里德堡超原子,这种介观尺度的里德堡超原子具有易于操控的优点。目前,里德堡阻塞机制已经被应用于非绝热和乐门的设计^[54,55],并且基于里德堡超原子的非绝热和乐量子计算也已经被提出^[56]。另外,人们还提出了基于里德堡原子的多比特非绝热和乐门^[57]和基于原子腔系统的多比特门^[58]与通用量子门^[59]。

4.4 基于金刚石色心体系的物理实现方案

金刚石色心体系是一种具有点缺陷结构的固态量子系统。在室温下,其自旋量子比特可以在纳秒尺度上被操控,而环境的退相干时间为毫秒量级,因此它在室温下具有较长的相干时间^[60-64]。对于基于金刚石色心体系的量子计算,带负电的金刚石色心中的电子自旋和核自旋可用来存储量子信息,对电子自旋量子比特的操控由微波脉冲来完成,对核自旋量子比特的操控由射频脉冲来完成。电子自旋和核自旋组合可形成双量子比特编码空间,该空间中的操控可直接由微波脉冲来完成。基于金刚石色心体系的非绝热和乐量子计算最初是在实验上演示的^[65,66],后来人们提出了一些其他实现非绝热和乐量子计算的方案^[67,68]。除了金刚石色心体系外,人们也提出了一些基于其他自旋系统的非绝热和乐量子计算方案^[69-72]。

4.5 实验进展

非绝热和乐量子计算在理论上得到长足发展的同时,也引起了实验物理学家的广泛兴趣。随着非绝热和乐量子计算理论设计方案的提出,人们在各种物理系统中完成了对这些理论设计方案的实验演示,这些物理系统包括核磁共振系统、超导线路和金刚石色心体系。非绝热和乐门的实验演示最初是在超导线路^[42]和核磁共振系统^[73]中完成的,其中在超导线路实验中只演示了单比特门,而在核磁共振系统实验中不仅演示了单比特门而且演示了双比特门。随后,人们在金刚石色心体系中也演示了非绝热和乐门^[65,66],在这里对单比特门和双比特门都进行了实验演示。上述4个实验是针对原始方案的实验演示。后来随着非绝热和乐量子计算一步实现方案的提出,分别在核磁共振系统^[74]、超导线路^[75]和金刚石色心体系^[76,77]中进行了基于该方

案的实验演示,这4个实验都只演示了单比特门.除了对原始方案和一步实现方案的实验演示外,也对单回路多脉冲方案进行了实验演示,演示该方案的实验平台仍然为核磁共振系统^[78]、超导线路^[79]和金刚石色心体系^[80,81],其中文献^[78,80]中对单比特门和双比特门都进行了实验演示,而文献^[79,81]中只演示了单比特门.除了上述实验,人们后续还在超导体系统中进行了另外两个基于原始方案的实验演示^[82,83].

5 结语

几何量子计算发展经过了从早期的绝热几何量子计算与绝热和乐量子计算,到非绝热几何量子计算,再到非绝热和乐量子计算.非绝热和乐量子计算继承了

前者的优点,量子门具有全几何性和可快速实现的优点,受到了人们的广泛关注.自从2012年被提出以来,非绝热和乐量子计算在基本设计理论和具体物理实现等各方面都取得了很大进展,并已有10余个实验进行了演示.非绝热和乐量子计算对控制误差的鲁棒性源于几何相仅依赖于演化路径而不依赖于演化速度的内秉属性,它能够自然地抵抗所有改变演化速度但不改变演化路径的控制误差.但是量子系统的误差来源是非常复杂的,对于那些不仅改变演化路径同时也改变路径积分的误差,非绝热和乐量子计算是敏感的.因此,如何与量子信息处理的其他抗噪声或纠错技术相结合,发展可抵抗多种误差的非绝热和乐量子计算是目前该领域最受关注的问题之一.

参考文献

- Shor P W. Polynomial-time algorithms for prime factorization and discrete logarithms on a quantum computer. *SIAM J Comput*, 1997, 26: 1484–1509
- Grover L K. Quantum mechanics helps in searching for a needle in a haystack. *Phys Rev Lett*, 1997, 79: 325–328
- Berry M V. Quantal phase factors accompanying adiabatic changes. *Proc R Soc Lond A*, 1984, 392: 45–57
- Wilczek F, Zee A. Appearance of gauge structure in simple dynamical systems. *Phys Rev Lett*, 1984, 52: 2111–2114
- Aharonov Y, Anandan J. Phase change during a cyclic quantum evolution. *Phys Rev Lett*, 1987, 58: 1593–1596
- Anandan J. Non-adiabatic non-abelian geometric phase. *Phys Lett A*, 1988, 133: 171–175
- Uhlmann A. Parallel transport and “quantum holonomy” along density operators. *Rep Math Phys*, 1986, 24: 229–240
- Sjöqvist E, Pati A K, Ekert A, et al. Geometric phases for mixed states in interferometry. *Phys Rev Lett*, 2000, 85: 2845–2849
- Tong D M, Sjöqvist E, Kwek L C, et al. Kinematic approach to the mixed state geometric phase in nonunitary evolution. *Phys Rev Lett*, 2004, 93: 080405
- Jones J A, Vedral V, Ekert A, et al. Geometric quantum computation using nuclear magnetic resonance. *Nature*, 2000, 403: 869–871
- Zanardi P, Rasetti M. Holonomic quantum computation. *Phys Lett A*, 1999, 264: 94–99
- Duan L M, Cirac J I, Zoller P. Geometric manipulation of trapped ions for quantum computation. *Science*, 2001, 292: 1695–1697
- Wang X B, Keiji M. Nonadiabatic conditional geometric phase shift with NMR. *Phys Rev Lett*, 2001, 87: 097901
- Zhu S L, Wang Z D. Implementation of universal quantum gates based on nonadiabatic geometric phases. *Phys Rev Lett*, 2002, 89: 097902
- Sjöqvist E, Tong D M, Mauritz Andersson L, et al. Non-adiabatic holonomic quantum computation. *New J Phys*, 2012, 14: 103035
- Xu G F, Zhang J, Tong D M, et al. Nonadiabatic holonomic quantum computation in decoherence-free subspaces. *Phys Rev Lett*, 2012, 109: 170501
- Tong D M. Quantitative condition is necessary in guaranteeing the validity of the adiabatic approximation. *Phys Rev Lett*, 2010, 104: 120401
- Xu G F, Liu C L, Zhao P Z, et al. Nonadiabatic holonomic gates realized by a single-shot implementation. *Phys Rev A*, 2015, 92: 052302
- Sjöqvist E. Nonadiabatic holonomic single-qubit gates in off-resonant Λ systems. *Phys Lett A*, 2016, 380: 65–67
- Herterich E, Sjöqvist E. Single-loop multiple-pulse nonadiabatic holonomic quantum gates. *Phys Rev A*, 2016, 94: 052310
- Xu G F, Tong D M, Sjöqvist E. Path-shortening realizations of nonadiabatic holonomic gates. *Phys Rev A*, 2018, 98: 052315
- Zhao P Z, Li K Z, Xu G F, et al. General approach for constructing Hamiltonians for nonadiabatic holonomic quantum computation. *Phys Rev A*, 2020, 101: 062316
- Xu G F, Zhao P Z, Xing T H, et al. Composite nonadiabatic holonomic quantum computation. *Phys Rev A*, 2017, 95: 032311
- Ramberg N, Sjöqvist E. Environment-assisted holonomic quantum maps. *Phys Rev Lett*, 2019, 122: 140501
- Zhang F, Zhang J, Gao P, et al. Searching nonadiabatic holonomic quantum gates via an optimization algorithm. *Phys Rev A*, 2019, 100: 012329
- Zhao P Z, Xu G F, Ding Q M, et al. Single-shot realization of nonadiabatic holonomic quantum gates in decoherence-free subspaces. *Phys Rev A*, 2017, 95: 062310
- Liang Z T, Du Y X, Huang W, et al. Nonadiabatic holonomic quantum computation in decoherence-free subspaces with trapped ions. *Phys Rev A*,

- 2014, 89: 062312
- 28 Zhang J, Kwek L C, Sjöqvist E, et al. Quantum computation in noiseless subsystems with fast non-Abelian holonomies. *Phys Rev A*, 2014, 89: 042302
- 29 Zhao P Z, Wu X, Tong D M. Dynamical-decoupling-protected nonadiabatic holonomic quantum computation. *Phys Rev A*, 2021, 103: 012205
- 30 Zhang J, Devitt S J, You J Q, et al. Holonomic surface codes for fault-tolerant quantum computation. *Phys Rev A*, 2018, 97: 022335
- 31 Wu C, Wang Y, Feng X L, et al. Holonomic quantum computation in surface codes. *Phys Rev Appl*, 2020, 13: 014055
- 32 Cirac J I, Zoller P. Quantum computations with cold trapped ions. *Phys Rev Lett*, 1995, 74: 4091–4094
- 33 Sørensen A, Mølmer K. Quantum computation with ions in thermal motion. *Phys Rev Lett*, 1999, 82: 1971–1974
- 34 Mølmer K, Sørensen A. Multiparticle entanglement of hot trapped ions. *Phys Rev Lett*, 1999, 82: 1835–1838
- 35 Zhao P Z, Xu G F, Tong D M. Nonadiabatic holonomic multiqubit controlled gates. *Phys Rev A*, 2019, 99: 052309
- 36 Bouchiat V, Vion D, Joyez P, et al. Quantum coherence with a single Cooper pair. *Phys Scr*, 1998, T76: 165–170
- 37 Nakamura Y, Pashkin Y A, Tsai J S. Coherent control of macroscopic quantum states in a single-Cooper-pair box. *Nature*, 1999, 398: 786–788
- 38 Friedman J R, Patel V, Chen W, et al. Quantum superposition of distinct macroscopic states. *Nature*, 2000, 406: 43–46
- 39 van der Wal C H, ter Haar A C J, Wilhelm F K, et al. Quantum superposition of macroscopic persistent-current states. *Science*, 2000, 290: 733
- 40 Martinis J M, Nam S, Aumentado J, et al. Rabi oscillations in a large Josephson-Junction qubit. *Phys Rev Lett*, 2002, 89: 117901
- 41 Koch J, Yu T M, Gambetta J, et al. Charge-insensitive qubit design derived from the Cooper pair box. *Phys Rev A*, 2007, 76: 042319
- 42 Abdumalikov A A, Fink J M, Juliusson K, et al. Experimental realization of non-Abelian non-adiabatic geometric gates. *Nature*, 2013, 496: 482–485
- 43 Xue Z Y, Zhou J, Wang Z D. Universal holonomic quantum gates in decoherence-free subspace on superconducting circuits. *Phys Rev A*, 2015, 92: 022320
- 44 Xue Z Y, Zhou J, Chu Y M, et al. Nonadiabatic holonomic quantum computation with all-resonant control. *Phys Rev A*, 2016, 94: 022331
- 45 Wang Y, Zhang J, Wu C, et al. Holonomic quantum computation in the ultrastrong-coupling regime of circuit QED. *Phys Rev A*, 2016, 94: 012328
- 46 Xue Z Y, Gu F L, Hong Z P, et al. Nonadiabatic holonomic quantum computation with dressed-state qubits. *Phys Rev Appl*, 2017, 7: 054022
- 47 Hong Z P, Liu B J, Cai J Q, et al. Implementing universal nonadiabatic holonomic quantum gates with transmons. *Phys Rev A*, 2018, 97: 022332
- 48 Chen T, Zhang J, Xue Z Y. Nonadiabatic holonomic quantum computation on coupled transmons with ancillaries. *Phys Rev A*, 2018, 98: 052314
- 49 Kang Y H, Chen Y H, Shi Z C, et al. One-step implementation of N -qubit nonadiabatic holonomic quantum gates with superconducting qubits via inverse Hamiltonian engineering. *Annalen Der Physik*, 2019, 531: 1800427
- 50 Saffman M, Walker T G. Analysis of a quantum logic device based on dipole-dipole interactions of optically trapped Rydberg atoms. *Phys Rev A*, 2005, 72: 022347
- 51 Saffman M, Walker T G, Mølmer K. Quantum information with Rydberg atoms. *Rev Mod Phys*, 2010, 82: 2313–2363
- 52 Jaksch D, Cirac J I, Zoller P, et al. Fast quantum gates for neutral atoms. *Phys Rev Lett*, 2000, 85: 2208–2211
- 53 Lukin M D, Fleischhauer M, Cote R, et al. Dipole blockade and quantum information processing in mesoscopic atomic ensembles. *Phys Rev Lett*, 2001, 87: 037901
- 54 Zhao P Z, Cui X D, Xu G F, et al. Rydberg-atom-based scheme of nonadiabatic geometric quantum computation. *Phys Rev A*, 2017, 96: 052316
- 55 Kang Y H, Chen Y H, Shi Z C, et al. Nonadiabatic holonomic quantum computation using Rydberg blockade. *Phys Rev A*, 2018, 97: 042336
- 56 Zhao P Z, Wu X, Xing T H, et al. Nonadiabatic holonomic quantum computation with Rydberg superatoms. *Phys Rev A*, 2018, 98: 032313
- 57 Xing T H, Wu X, Xu G F. Nonadiabatic holonomic three-qubit controlled gates realized by one-shot implementation. *Phys Rev A*, 2020, 101: 012306
- 58 Huang B H, Kang Y H, Shi Z C, et al. Shortcut scheme for one-step implementation of a three-qubit nonadiabatic holonomic gate. *Ann Phys*, 2018, 530: 1800179
- 59 Xing T H, Tong D M. Nonadiabatic holonomic quantum computation with atom-cavity system (in Chinese). *Chin Sci Bull*, 2020, 65: 2499–2506 [邢同昊, 仝殿民. 基于原子-腔系统的非绝热和乐量子计算. 科学通报, 2020, 65: 2499–2506]
- 60 Fuchs G D, Dobrovitski V V, Toyli D M, et al. Gigahertz dynamics of a strongly driven single quantum spin. *Science*, 2009, 326: 1520–1522
- 61 Bar-Gill N, Pham L M, Jarmola A, et al. Solid-state electronic spin coherence time approaching one second. *Nat Commun*, 2013, 4: 1743
- 62 Wang P F, Ju C Y, Shi F Z, et al. Optimizing ultrasensitive single electron magnetometer based on nitrogen-vacancy center in diamond. *Chin Sci Bull*, 2013, 58: 2920–2923
- 63 Peng S, Xu X, Xu K, et al. Observation of non-Markovianity at room temperature by prolonging entanglement in solids. *Sci Bull*, 2018, 63: 336–339
- 64 Sheng Y B, Liu J, Zhao S Y, et al. Multipartite entanglement concentration for nitrogen-vacancy center and microtoroidal resonator system. *Chin Sci Bull*, 2013, 58: 3507–3513
- 65 Zu C, Wang W B, He L, et al. Experimental realization of universal geometric quantum gates with solid-state spins. *Nature*, 2014, 514: 72–75

- 66 Arroyo-Camejo S, Lazariev A, Hell S W, et al. Room temperature high-fidelity holonomic single-qubit gate on a solid-state spin. *Nat Commun*, 2014, 5: 4870
- 67 Zhou J, Yu W C, Gao Y M, et al. Cavity QED implementation of non-adiabatic holonomies for universal quantum gates in decoherence-free subspaces with nitrogen-vacancy centers. *Opt Express*, 2015, 23: 14027
- 68 Zhou J, Liu B J, Hong Z P, et al. Fast holonomic quantum computation based on solid-state spins with all-optical control. *Sci China-Phys Mech Astron*, 2018, 61: 010312
- 69 Mousolou V A. Electric nonadiabatic geometric entangling gates on spin qubits. *Phys Rev A*, 2017, 96: 012307
- 70 Mousolou V A. Scalable star-shaped architecture for universal spin-based nonadiabatic holonomic quantum computation. *Phys Rev A*, 2018, 98: 062340
- 71 Gürkan Z N, Sjöqvist E. Realization of a holonomic quantum computer in a chain of three-level systems. *Phys Lett A*, 2015, 379: 3050
- 72 Liu J, Dong P, Zhou J, et al. Universal non-adiabatic holonomic quantum computation in decoherence-free subspaces with quantum dots inside a cavity. *Laser Phys Lett*, 2017, 14: 055202
- 73 Feng G, Xu G, Long G. Experimental realization of nonadiabatic holonomic quantum computation. *Phys Rev Lett*, 2013, 110: 190501
- 74 Li H, Liu Y, Long G L. Experimental realization of single-shot nonadiabatic holonomic gates in nuclear spins. *Sci China-Phys Mech Astron*, 2017, 60: 080311
- 75 Zhang Z, Zhao P Z, Wang T, et al. Single-shot realization of nonadiabatic holonomic gates with a superconducting Xmon qutrit. *New J Phys*, 2019, 21: 073024
- 76 Zhou B B, Jerger P C, Shkolnikov V O, et al. Holonomic quantum control by coherent optical excitation in diamond. *Phys Rev Lett*, 2017, 119: 140503
- 77 Sekiguchi Y, Niikura N, Kuroiwa R, et al. Optical holonomic single quantum gates with a geometric spin under a zero field. *Nat Photonics*, 2017, 11: 309–314
- 78 Zhu Z, Chen T, Yang X, et al. Single-loop and composite-loop realization of nonadiabatic holonomic quantum gates in a decoherence-free subspace. *Phys Rev Appl*, 2019, 12: 024024
- 79 Xu Y, Cai W, Ma Y, et al. Single-loop realization of arbitrary nonadiabatic holonomic single-qubit quantum gates in a superconducting circuit. *Phys Rev Lett*, 2018, 121: 110501
- 80 Nagata K, Kuramitani K, Sekiguchi Y, et al. Universal holonomic quantum gates over geometric spin qubits with polarised microwaves. *Nat Commun*, 2018, 9: 3227
- 81 Ishida N, Nakamura T, Tanaka T, et al. Universal holonomic single quantum gates over a geometric spin with phase-modulated polarized light. *Opt Lett*, 2018, 43: 2380
- 82 Danilin S, Vepsäläinen A, Paraoanu G S. Experimental state control by fast non-Abelian holonomic gates with a superconducting qutrit. *Phys Scr*, 2018, 93: 058101
- 83 Egger D J, Ganzhorn M, Salis G, et al. Entanglement generation in superconducting qubits using holonomic operations. *Phys Rev Appl*, 2019, 11: 014017

Summary for “非绝热和乐量子计算研究进展”

Advances in nonadiabatic holonomic quantum computation

Peizi Zhao, Guofu Xu^{*} & Dianmin Tong^{*}

Department of Physics, Shandong University, Jinan 250100, China

^{*} Corresponding authors, E-mail: sduxgf@163.com; tdm@sdu.edu.cn

Quantum computation has been shown to be superior to classical computation in solving some problems, and therefore can substantially change our life. However, the realization of quantum computation is still challenging, even if quantum technologies have been improved significantly. Two main obstacles to the realization of practical quantum computation are control errors and decoherence. Control errors are caused by inaccurate manipulations of quantum systems and decoherence is caused by the inevitable interaction between the system and its environment. Geometric phases are only dependent on evolution paths of quantum systems but independent of the evolution details and therefore quantum computation based on geometric phases, i.e., geometric quantum computation, is robust against control errors, benefiting the realization of practical quantum computation.

The early proposals of geometric quantum computation are based on adiabatic geometric phases. These proposals require quantum systems to undergo adiabatic evolution, which makes quantum systems evolve for a long time. To circumvent this, nonadiabatic geometric quantum computation based on nonadiabatic Abelian geometric phases was proposed soon after. In 2012, nonadiabatic holonomic quantum computation based on nonadiabatic non-Abelian geometric phases was proposed, which also circumvents long-time evolutions. Moreover, compared with nonadiabatic geometric quantum computation that uses the geometric phase as one parameter of a quantum gate, nonadiabatic holonomic quantum computation uses the holonomic matrix itself as a quantum gate. This makes nonadiabatic holonomic quantum computation possess whole-geometric property. Due to the merits of both geometric robustness and high-speed implementation without the limit of adiabatic evolution, nonadiabatic holonomic quantum computation has been attracting much attention.

Until now, much progress has been achieved in the field of nonadiabatic holonomic quantum computation. On one hand, various methods have been proposed to design more efficient nonadiabatic holonomic gates. Nonadiabatic holonomic gates were first realized by using resonant laser fields to drive a three-level system. After this, the single-shot proposal and the single-loop proposal were proposed, allowing us to realize one-qubit gates by a shorter path and thereby reducing the exposure time of nonadiabatic holonomic gates to the environment. To further shorten the exposure time, the path-shortening protocol was put forward, where nonadiabatic holonomic gates can be realized based on a class of extended evolution paths that are shorter than the former ones. Recently, a general approach of constructing Hamiltonians for nonadiabatic holonomic quantum computation was put forward, by using which one can easily find a Hamiltonian making the quantum system evolve along a desired path so that nonadiabatic holonomic gates can be realized with an economical evolution time. On the other hand, various methods have been proposed to combine nonadiabatic holonomic gates and various decoherence-resilient methods, making the resulting schemes robust against both control errors and decoherence. The first proposal in this aspect is combining nonadiabatic holonomic gates and decoherence-free subspaces. Gradually, proposals combining nonadiabatic holonomic gates with noiseless subsystems, dynamical decoupling and surface codes were put forward. Last but not least, various proposals suitable for specific physical systems have been proposed and particularly various experimental platforms have been used to demonstrate nonadiabatic holonomic gates. This also significantly improves the development of nonadiabatic holonomic quantum computation. In this paper, we review the above research advances on nonadiabatic holonomic quantum computation, aiming to help readers understand the main developments of nonadiabatic holonomic quantum computation.

geometric phases, non-Abelian geometric phases, quantum gates, nonadiabatic holonomic quantum computation

doi: [10.1360/TB-2021-0036](https://doi.org/10.1360/TB-2021-0036)