具有图限制通信结构对策的有效 Owen 值

献给越民义教授 100 华诞

单而芳^{1,2}, 史纪磊^{1,3}, 吕文蓉¹, 康丽英^{2*}

1. 上海大学管理学院, 上海 200444;

2. 上海大学数学系, 上海 200444;

3. 宁波财经学院基础学院, 宁波 315175

E-mail: efshan@shu.edu.cn, shijilei1987@163.com, wenronga@163.com, lykang@shu.edu.cn

收稿日期: 2020-01-10; 接受日期: 2020-04-23; 网络出版日期: 2020-09-08; * 通信作者

国家自然科学基金 (批准号: 11971298) 资助项目

摘要 Owen 图值是著名的 Owen 值在具有图通信结构合作对策上的推广, 它具有分支有效性, 但失去了有效性. 有效性要求在对策中产生的总财富恰好分配给参与的所有成员. 本文提出具有有效性的 Owen 图值, 并给出这个有效 Owen 图值的 3 种公理化刻画. 最后, 通过应用算例, 对该值与其他值做了比较分析.

关键词 合作对策 Owen 值 图 联盟结构 有效解

MSC (2010) 主题分类 91A43, 05C57

1 引言

效用可转移合作对策^[1] (cooperative game with transferable utility) (N, v) , 简称为 TU- 对策, 它由参与者集合 N 和定义在 N 的子集簇上的特征函数 v 所组成. 该模型假定参与者集合 N 的任何子集 S 都可以形成联盟 (coalition) 进行合作并获得效用 $v(S)$. 在这一假定下, Shapley^[2] 提出了著名的有效分配规则 (efficient allocation rule), 即 Shapley 值. 所谓有效性 (efficiency) 是指对所有参与者的支付之和恰好等于大联盟 N 的效用 $v(N)$.

不过, 在实际中, 由于受到各种因素的影响, 并不是每个联盟都是可行的, 换句话说, 合作可能会受到合作结构的影响. 考虑到合作结构对合作带来的影响, Owen^[3] 提出了具有优先联盟结构的 TU- 对策 (TU-games with coalition structures) 的分配规则, 即 Owen 值. Owen 值是 Shapley 值的一类推广, 并保持了 Shapley 值的有效性. 它首先将每个优先联盟 (priori union) 看作一个参与者, 并用 Shapley 值进行分配, 然后在每个优先联盟内部再利用 Shapley 值进行二次分配. 几乎与 Owen 同时, Myerson^[4] 提出了以图作为合作结构的合作对策模型, 被称为通信情形对策 (communication situation game), 或

英文引用格式: Shan E F, Shi J L, Lyu W R, et al. Efficient extension of the Owen value with graph-restricted communication (in Chinese). Sci Sin Math, 2020, 50: 1219–1232, doi: 10.1360/SSM-2020-0009

者简称为图对策 (graph game), 其中图中的点 (node) 表示参与者, 边 (link) 表示连接的参与者之间存在某种直接的双边协议 (bilateral agreements). Myerson 假定只有连通的联盟 S 进行合作才能获得效用 $v(S)$, 不连通的联盟只能通过由它的各个连通分支的效用的和来实现. 由此定义了所谓的图限制对策 (graph-restricted game), 并把图限制对策的 Shapley 值作为分配规则, 这就是著名的 Myerson 值. Myerson 值是 Shapley 值的另一类推广, Myerson^[4] 证明了这个值可由分支有效性 (component efficiency) 和公平性 (fairness) 唯一刻画. 分支有效性是指给每个分支中参与者的支付的和恰好等于这个分支的效用. 注意到, 当图为非连通图时, Myerson 值满足了分支有效性, 但破坏了 Shapley 值和 Owen 值所具有的有效性. 而在实际中, 保持有效性是必要的^[5]. 为此, Myerson 值的有效推广得到广泛关注. 关于这方面的研究进展参见文献 [6–11].

考虑到现实中合作可能会受到两种甚至多种合作结构的限制. 为此, Vázquez-Brage 等^[12] 讨论了具有联盟结构和图结构双重限制的 TU- 对策 (TU-games with coalition and graph structures), 并把图限制对策的 Owen 值定义为 Owen 图值. 该值可利用分支有效性、图平衡贡献性 (balanced contributions for the graph)、商公平性 (fairness in the quotient) 和联盟平衡贡献性 (balanced contributions for the unions) 给出两种形式的刻画. 进一步, Alonso-Meijide 等^[13] 利用分支有效性 (对平凡联盟)、公平性、联盟平衡贡献性和商对策性 (quotient game property) 给出了 Owen 图值的另一种刻画. 此外, 孙红霞和张强^[14] 提出了联盟结构限制下的限制 Owen 值.

类似于 Myerson 值, 由于 Owen 图值也破坏了分配规则的有效性, 使得它在某些实际应用问题中具有一定的局限性. 例如, 在某科研基金项目申报过程中, 为鼓励科研机构内部及科研机构之间的跨学科合作, 提倡由科研机构内或者科研机构之间两个及两个以上的研究者之间联合申报该项目可获得相对较高的基金资助. 假设该科研基金有足够的资金用于资助这些科研工作者, 并且所有的研究资金都要用于资助且无剩余. 若将上述的每个科研机构看成一个优先联盟, 各个研究者之间通过合作协议的联合形成相应的图合作结构, 则形成具有联盟结构和图结构的 TU- 对策模型. 假定科研基金总额为 $v(N)$, 其中 N 为参与申请基金项目的研究者集合, 那么, 如何将全部的研究资金分配给每位申请者是本文需要解决的问题. 虽然 Owen 图值可以作为上述对策模型的分配规则, 但实际中研究者申请的获得资助的总额可能低于科研基金总额 $v(N)$, 这样会存在研究资金分配有剩余的问题. 为了避免研究基金的剩余, 需要将剩余的基金再次分配下去, 这就需要找到一个满足有效性的分配规则. 因此, 对 Owen 图值有必要进行推广, 使其满足有效性. 本文旨在将 Owen 图值推广为满足有效性的解, 并给出相应的公理化刻画.

本文后续内容安排如下: 第 2 节给出本文所需的记号和定义; 第 3 节定义有效均分 Owen 图值, 并给出刻画; 第 4 节以科研基金分配为例, 对有效均分 Owen 图值和其他分配规则做了比较分析.

2 预备知识

2.1 TU- 对策

TU- 对策^[1], 即具有可转移效用的合作对策, 用二元组 (N, v) 表示, 其中 $N = \{1, 2, \dots, n\}$ 是参与者 (player) 集合, 特征函数 (characteristic function) $v: 2^N \rightarrow \mathbb{R}$ 是一个从联盟集到实数集的映射, 并规定 $v(\emptyset) = 0$. 对任意非空子集 $S \subseteq N$, $v(S)$ 是联盟 S 的成员进行合作所能产生的收益, 也称为联盟 S 的效用 (worth). 记 N 上所有 TU- 对策的集合为 $\mathbb{G}(N)$. 对任意的 $S \subseteq N$, (S, v_S) 是限制在点集 S 上的子对策, 且对任意 $T \subseteq S$, 定义 $v_S(T) = v(T)$. 对任意的 $(N, v) \in \mathbb{G}(N)$ 和 $S \subseteq N$, 若存在 $T \subseteq N$,

使得 $v(S) = v(S \cap T)$, 则称 T 是特征函数 v 的一个载体 (carrier). 为了书写方便, 本文分别把 $S \cup \{i\}$ 和 $S \setminus \{i\}$ 简记为 $S \cup i$ 和 $S \setminus i$, 用小写字母 s 或者 $|S|$ 表示集合 S 的基数.

在 TU- 对策中, 每个 n - 维向量 $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ 可以被称为一个支付向量 (payoff vector), 其中 x_i 是给第 i 个参与者的支付. TU- 对策的单值解 (single-valued solution) 或者也被称为值 (value), 是定义在 $\mathbb{G}(N)$ 上的一个映射 $f \in \mathbb{R}^n$, 即通常所指的分配规则 (allocation rule), $f(N, v)$ 是一个支付向量. 若值 f 满足 $\sum_{i=1}^n f_i(N, v) = v(N)$, 则称它是有效值, 其中最著名的有效值是 Shapley 值. 对任意的 $(N, v) \in \mathbb{G}(N)$ 和 $i \in N$, Shapley 值定义为

$$Sh_i(N, v) = \sum_{S: S \subseteq N \setminus i} \frac{s!(n-s-1)!}{n!} [v(S \cup i) - v(S)].$$

2.2 具有联盟结构和图结构的 TU- 对策

联盟结构可由 (N, P) 表示, 其中 N 是参与者集合, $P = \{P_1, P_2, \dots, P_m\}$ 表示 N 的一个划分, 即联盟结构. 记 $M = \{1, 2, \dots, m\}$. 称每个 $P_k \in P$ 为一个优先联盟. 特别地, 分别称 $P^n = \{\{1\}, \{2\}, \dots, \{n\}\}$ 和 $P^N = \{N\}$ 为平凡联盟结构和大联盟结构. 记 N 的所有联盟结构的集合为 $\mathbb{P}(N)$. 设 $P = \{P_1, \dots, P_m\}$, $i \in P_k \in P$, 定义 $P_{-i} = \{P_1, \dots, P_{k-1}, P_k \setminus \{i\}, P_{k+1}, \dots, P_m, \{i\}\}$. 对任意的 $(N, P) \in \mathbb{P}(N)$ 和 $S \subseteq N$, 必存在 $Q \subseteq M$, 使得对每个 $k \in Q$, $P_k \cap S \neq \emptyset$ 且 $S = \bigcup_{k \in Q} (P_k \cap S)$. 记 $P_k^S = P_k \cap S$, 并且记 $P_S = \{P_k^S \mid k \in Q\}$, 称 (S, P_S) 是限制在 S 上的联盟结构.

三元组 (N, v, P) 表示具有联盟结构的 TU- 对策, 其中 $(N, v) \in \mathbb{G}(N)$, $(N, P) \in \mathbb{P}(N)$. 将所有 (N, v, P) 的集合记为 $\mathbb{C}(N)$.

对具有联盟结构的 TU- 对策, Owen^[3] 给出了一个著名的有效解, 即 Owen 值. 对任意的 $(N, v, P) \in \mathbb{C}(N)$ 和 $i \in P_k \in P$, Owen 值定义为

$$Ow_i(N, v, P) = \sum_{R \subseteq M \setminus k} \sum_{S \subseteq P_k \setminus i} \frac{r!(m-r-1)!s!(p_k-s-1)!}{m!p_k!} \left[v\left(\bigcup_{k \in R} P_k \cup S \cup i\right) - v\left(\bigcup_{k \in R} P_k \cup S\right) \right].$$

对任意的 $(N, v, P) \in \mathbb{C}(N)$, $P = \{P_k \mid k \in M\}$, 商对策 (quotient game) (M, v^P) 是定义在 $\mathbb{G}(M)$ 上以每个优先联盟作为参与者的 TU- 对策, 即对任意的 $R \subseteq M$, 满足 $v^P(R) = v(\bigcup_{k \in R} P_k)$. 设分配规则 f 是 $\mathbb{C}(N)$ 上的分配规则. 对任意的 $(N, v, P), (N, w, P) \in \mathbb{C}(N)$, 均有

$$f(N, v + w, P) = f(N, v, P) + f(N, w, P),$$

则称 f 满足可加性. 对任意的 $(N, v, P) \in \mathbb{C}(N)$, 若 T 是特征函数 v 的一个载体, 则有 $\sum_{i \in T} f_i(N, v, P) = v(T)$, 此时称 f 满足载体性. 对任意的 $(N, v, P) \in \mathbb{C}(N)$, $i, j \in P_k \in P$ 和 $S \subseteq N \setminus \{i, j\}$, 若 $v(S \cup i) = v(S \cup j)$, 则满足 $f_i(N, v, P) = f_j(N, v, P)$, 那么称 f 满足优先联盟内对称性. 对任意的 $(N, v, P) \in \mathbb{C}(N)$, $P_k, P_s \in P$, $R \subseteq M \setminus \{k, s\}$, 若满足 $v^P(R \cup k) = v^P(R \cup s)$, 则有 $\sum_{i \in P_k} f_i(N, v, P) = \sum_{i \in P_s} f_i(N, v, P)$, 此时称 f 满足商对称性.

Owen^[3] 利用可加性 (additivity)、载体性 (carrier)、优先联盟内对称性 (symmetry in the unions) 和商对称性 (symmetry in the quotient) 对 Owen 值进行了刻画.

图 (graph) 可用 (N, L) 来表示, 其中 N 为图中的点集 (node set), 而 L 由 N 的一些无序二元子集组成, 也即 $L \subseteq L^N = \{\{i, j\} \mid i, j \in N, i \neq j\}$, 称为图的边集 (link set). 为方便起见, 将边 $\{i, j\}$ 简记为 ij . 对任意的 $\delta \subseteq L$, 将 (N, L) 去掉边集 δ 后形成的图记为 $(N, L_{-\delta})$. 如果 $ij \in L$, 则称点 i 与 j 是

直接相连的. 对任意的 $i, j \in N$, 若存在互异点列 $(i = i_1, i_2, \dots, i_q = j)$, 使得 $i_k i_{k+1} \in L, 1 \leq k \leq q-1$, 则称这个点列为 i 和 j 之间的一条路 (path). 若点 i 和 j 之间存在一条路, 称点 i 和 j 是连通的. 若 (N, L) 中任意两点间都是连通的, 称 (N, L) 是连通的. 对任意非空集合 $S \subseteq N$, S 的导出子图表示为 (S, L_S) , 其中 $L_S = \{ij \in L : i, j \in S\}$. 如果 (S, L_S) 是连通的, 称点子集 S 是连通的. (N, L) 中的每个极大连通子集称为它的一个分支 (component). 对任意 $i \in N$, 用 C_i 表示包含 i 的分支. 将 (N, L) 中所有分支的集合记为 N/L , 特别地, 将 (S, L_S) 中所有分支的集合记为 S/L .

通信情形对策 (communication situation), 也称为图对策 (graph game), 可用三元组 (N, v, L) 表示, 其中 (N, v) 为 TU- 对策, 而 (N, L) 表示一个图. 用 $\mathcal{G}^N$ 表示所有图对策的集合. 对任意的 $(N, v, L) \in \mathcal{G}^N$, Myerson^[4] 假定非连通联盟 S 的效用仅能通过 S/L 的所有分支的效用和来实现. 由此定义了图限制对策 (N, v^L) , 其中特征函数 v^L 定义为

$$v^L(S) = \sum_{T \in S/L} v(T), \quad S \subseteq N.$$

进一步, Myerson 定义图限制对策 (N, v^L) 的 Shapley 值作为一个分配规则, 也即 $Sh(N, v^L)$, 这个值后来被称为 Myerson 值, 记作 $\mu(N, v, L)$. 关于图对策的其他术语、符号和研究进展参见文献 [15].

具有联盟结构和图结构的 TU- 对策由四元组 (N, v, L, P) 表示, 其中 (N, v) 为 TU- 对策, (N, L) 为一个图, (N, P) 为联盟结构. 记所有 (N, v, L, P) 的集合为 $\mathbb{U}^N$. 当 (N, L) 为连通图时, 记所有具有连通图结构的 (N, v, L, P) 集合为 $\mathbb{U}_C^N$. 对任意的 $(N, v, L, P) \in \mathbb{U}^N, R \subseteq M$, 通信商对策 $(M, v^{LP}) \in \mathbb{G}(M)$ 定义为

$$v^{LP}(R) = \sum_{K \in \bigcup_{k \in R} P_k / L} v(K).$$

对任意的 $P_k, P_s \in P$, 定义 $L_{(P_k, P_s)} = \{ij \in L \mid i \in P_k, j \in P_s\}$, 简记 $L \setminus L_{(P_k, P_s)}$ 为 $L_{-(P_k, P_s)}$.

Vázquez-Brage 等^[12] 将 Owen 值推广到了具有联盟结构和图结构的 TU- 对策上, 这个值被称为 Owen 图值 (Owen graph value). 它是定义在具有联盟结构的图限制对策 (N, v^L, P) 上的 Owen 值, 也即 $Ow(N, v^L, P)$. 记为 $\psi(N, v, L, P) = Ow(N, v^L, P)$.

Vázquez-Brage 等^[12] 利用分支有效性、图平衡贡献性、商公平性和联盟平衡贡献性给出了该值两种形式的刻画.

设 f 为 $\mathbb{U}^N$ 上的分配规则. 本文将用到下列的公理性质.

分支有效性 对任意的 $(N, v, L, P) \in \mathbb{U}^N, C \in N/L$, 满足 $\sum_{i \in C} f_i(N, v, L, P) = v(C)$.

图平衡贡献性 对任意的 $(N, v, L, P) \in \mathbb{U}^N, i, j \in P_k \in P$, 满足

$$f_i(N, v, L, P) - f_i(N, v, L_{-j}, P) = f_j(N, v, L, P) - f_j(N, v, L_{-i}, P).$$

商公平性 对任意的 $(N, v, L, P) \in \mathbb{U}^N, P_k, P_s \in P$, 满足

$$\begin{aligned} & \sum_{i \in P_k} f_i(N, v, L, P) - \sum_{i \in P_k} f_i(N, v, L_{-(P_k, P_s)}, P) \\ &= \sum_{i \in P_s} f_i(N, v, L, P) - \sum_{i \in P_s} f_i(N, v, L_{-(P_k, P_s)}, P). \end{aligned}$$

联盟平衡贡献性 对任意的 $(N, v, L, P) \in \mathbb{U}^N, i, j \in P_k \in P$, 满足

$$f_i(N, v, L, P) - f_i(N, v, L, P_{-j}) = f_j(N, v, L, P) - f_j(N, v, L, P_{-i}).$$

3 有效均分 Owen 图值的定义及公理化刻画

3.1 有效均分 Owen 图值的定义

上面已经提到, Owen 图值是分支有效解, 则有

$$\sum_{i \in N} \psi_i(N, v, L, P) = \sum_{C \in N/L} \sum_{i \in C} \psi_i(N, v, L, P) = \sum_{C \in N/L} v(C) = v^L(N).$$

显然, $v^L(N) \leq v(N)$. 当 $v^L(N) < v(N)$ 时, 意味着 Owen 图值不满足有效性. 此时, 欲将 Owen 值推广为有效值, 其关键是如何分配剩余 $v(N) - v^L(N)$. 分配剩余的方式可以有很多, 本节给出 Owen 图值的一类有效推广, 也即下面的定义:

定义 3.1 对任意的 $(N, v, L, P) \in \mathbb{U}^N$ 和 $i \in N$, 有效均分 Owen 图值 $\text{EE}\psi$ 定义为

$$\text{EE}\psi_i(N, v, L, P) := \psi_i(N, v, L, P) + \frac{v(N) - v^L(N)}{n}. \quad (3.1)$$

有效均分 Owen 图值首先给每位参与者分配了 Owen 图值, 然后将剩余的效用 $v(N) - v^L(N)$ (可能为 0) 平均分配给每个参与者. 对任意的 $(N, v, L, P) \in \mathbb{U}^N$, 当 P 为平凡联盟结构或者大联盟结构, 也即 $P = P^n$ 或 $P = P^N$ 时, 由于此时 Owen 图值退化为 Myerson 值, 因此, 有效均分 Owen 图值即为 van den Brink 等^[5] 定义下的有效均分 Myerson 值.

3.2 有效均分 Owen 图值的公理化刻画

本小节将给出有效均分 Owen 图值的公理化刻画. 为此, 先给出刻画所需要的性质公理.

设分配规则 $f: \mathbb{U}^N \rightarrow \mathbb{R}^n$. 下列有效性是许多分配规则所满足的性质.

有效性 对任意 $(N, v, L, P) \in \mathbb{U}^N$, 满足 $\sum_{i \in N} f_i(N, v, L, P) = v(N)$, 则称 f 满足有效性.

下面将用于刻画 Owen 图值和有效 Myerson 值的某些性质做适当推广.

Vázquez-Brage 等^[12] 证明了 Owen 图值是满足商公平性的. 商公平性是将两个优先联盟之间的边全都断掉之后, 对两个优先联盟支付之和的影响是相同的. 事实上, 断掉两个优先联盟之间边的一部分对两个优先联盟支付之和的影响也是相同的. 为此, 我们提出商公平性的弱化形式, 称为弱商公平性.

弱商公平性 对任意的 $(N, v, L, P) \in \mathbb{U}^N$ 、任意的 $P_k, P_s \in P$ 和任意的 $\delta \subseteq L_{(P_k, P_s)}$, 满足

$$\sum_{h \in P_k} f_h(N, v, L, P) - \sum_{h \in P_k} f_h(N, v, L_{-\delta}, P) = \sum_{h \in P_s} f_h(N, v, L, P) - \sum_{h \in P_s} f_h(N, v, L_{-\delta}, P),$$

则称 f 满足弱商公平性.

弱商公平性是指, 对于任意的两个优先联盟 $P_k, P_s \in P$, 当断开两个优先联盟之间的部分边 (两个联盟之间的边并不一定全都断掉) 时, 对两个优先联盟 P_k 和 P_s 中所有成员支付之和的影响是相同的.

下列引理证明了 Owen 图值 $\psi(N, v, L, P)$ 满足弱商公平性.

引理 3.1 对任意的 $(N, v, L, P) \in \mathbb{U}^N$, Owen 图值 $\psi(N, v, L, P)$ 满足弱商公平性.

证明 对任意的 $P_k, P_s \in P$, 取 $\delta \subseteq L_{(P_k, P_s)}$. 考虑 TU- 对策 $w = v^L - v^{L-\delta}$. 对于任意的 $R \subseteq M \setminus \{k, s\}$, 容易验证 $w^P(R \cup k) = w^P(R \cup s) = 0$. 由 Owen 值满足商对称性可得

$$\sum_{i \in P_k} Ow_i(N, w, P) = \sum_{i \in P_s} Ow_i(N, w, P).$$

进一步, 结合 Owen 值的可加性, 有

$$\sum_{i \in P_k} Ow_i(N, v^L, P) - \sum_{i \in P_k} Ow_i(N, v^{L-\delta}, P) = \sum_{i \in P_s} Ow_i(N, v^L, P) - \sum_{i \in P_s} Ow_i(N, v^{L-\delta}, P).$$

由 $\psi(N, v, L, P) = Ow(N, v^L, P)$ 可知 $\psi(N, v, L, P)$ 满足弱商公平性. $\square$

为了刻画有效均分 Owen 图值, 还需要下列新的性质.

准边商公平性 对任意的 $(N, v, L, P) \in \mathbb{U}^N$, $ij \in L_{(P_k, P_s)}$, 满足

$$\begin{aligned} & \sum_{h \in P_k} \left[f_h(N, v, L, P) - f_h(N, v, L_{-ij}, P) + \frac{v^L(N) - v^{L_{-ij}}(N)}{n} \right] \\ &= \sum_{h \in P_s} \left[f_h(N, v, L, P) - f_h(N, v, L_{-ij}, P) + \frac{v^L(N) - v^{L_{-ij}}(N)}{n} \right], \end{aligned}$$

则称 f 满足准边商公平性.

准边商公平性是指, 对任意的两个优先联盟 $P_k, P_s \in P$, 当断开两个优先联盟之间的一条边时, 优先联盟 P_k 中所有成员支付之和的改变量加上该优先联盟中所有成员在大联盟 N 中图效用改变量的平均值之和等于优先联盟 P_s 中所有成员支付之和的改变量加上该优先联盟中所有成员在大联盟 N 中图效用改变量的平均值之和.

Owen 值黏性 对任意的 $(N, v, L, P) \in \mathbb{U}_C^N$, 均有 $f(N, v, L, P) = \psi(N, v, L, P)$, 则称 f 满足 Owen 值黏性.

Owen 值黏性是指, 对任意的 (N, v, L, P) , 当 (N, L) 为连通图时, 分配规则 f 等于 Owen 图值.

借助上面的性质给出有效均分 Owen 图值的第一个公理化刻画.

定理 3.1 对任意的 $(N, v, L, P) \in \mathbb{U}^N$, $EE\psi(N, v, L, P)$ 是满足有效性、Owen 值黏性、准边商公平性和联盟平衡贡献性的唯一解.

证明 存在性. 对于 $(N, v, L, P) \in \mathbb{U}^N$, 由于 Owen 图值满足分支有效性、弱商公平性 (由引理 3.1) 和联盟平衡贡献性, 根据 $EE\psi(N, v, L, P)$ 的定义, 易证有效均分 Owen 图值满足定理中的 4 个性质.

下证唯一性. 不妨设存在另一分配规则 f 满足上述 4 个性质, 我们证明 $f = EE\psi$. 当 $(N, v, L, P) \in \mathbb{U}_C^N$ 时, 根据 Owen 值黏性, 易知 $f = \psi = EE\psi$ 成立. 当 $(N, v, L, P) \in \mathbb{U}^N \setminus \mathbb{U}_C^N$ 时, 易知分支个数 $|N/L| \geq 2$.

首先证明对任意的 $k \in M$, 下列等式成立:

$$\sum_{h \in P_k} f_h(N, v, L, P) = \sum_{h \in P_k} EE\psi_h(N, v, L, P).$$

当 $P = P^N$ 时, 由 f 和 $EE\psi$ 满足有效性可知,

$$\sum_{h \in N} f_h(N, v, L, P) = v(N) = \sum_{h \in N} EE\psi_h(N, v, L, P).$$

当 $P \neq P^N$ 时, 利用反证法, 假设 $f \neq EE\psi$, 则一定存在一个 $(N, v, L, P) \in \mathbb{U}^N \setminus \mathbb{U}_C^N$, 使得 $f(N, v, L, P) \neq EE\psi(N, v, L, P)$. 不妨设 L 是一个极大图, 使得对某些 $i \in N$, $f_i(N, v, L, P) \neq EE\psi_i(N, v, L, P)$. 具体地, 存在 $i \in C \in N/L$, 使得 $f_i \neq EE\psi_i$.

因为 $|N/L| \geq 2$ 和 $|P| \geq 2$, 因此存在 $x, y \in N$, 使得 x 和 y 属于不同的分支, 并且在不同的优先联盟中. 对任意这样的点对 x 和 y , 不妨设 $x \in P_k \cap C$, 而 $y \in P_s \cap C'$, 其中 $C \neq C'$, $C, C' \in N/L$, $s \neq k$, $s, k \in M$.

由于 f 和 $\text{EE}\psi$ 满足准边商公平性, 因此可得

$$\begin{aligned} & \sum_{h \in P_k} \left[f_h(N, v, L \cup \{xy\}, P) - f_h(N, v, L, P) + \frac{v^{L \cup \{xy\}}(N) - v^L(N)}{n} \right] \\ &= \sum_{h \in P_s} \left[f_h(N, v, L \cup \{xy\}, P) - f_h(N, v, L, P) + \frac{v^{L \cup \{xy\}}(N) - v^L(N)}{n} \right] \end{aligned} \quad (3.2)$$

和

$$\begin{aligned} & \sum_{h \in P_k} \left[\text{EE}\psi_h(N, v, L \cup \{xy\}, P) - \text{EE}\psi_h(N, v, L, P) + \frac{v^{L \cup \{xy\}}(N) - v^L(N)}{n} \right] \\ &= \sum_{h \in P_s} \left[\text{EE}\psi_h(N, v, L \cup \{xy\}, P) - \text{EE}\psi_h(N, v, L, P) + \frac{v^{L \cup \{xy\}}(N) - v^L(N)}{n} \right]. \end{aligned} \quad (3.3)$$

由图 L 的极大性可知, $f_h(N, v, L \cup \{xy\}, P) = \text{EE}\psi_h(N, v, L \cup \{xy\}, P)$. 将 (3.2) 和 (3.3) 相减可得

$$\sum_{h \in P_k} f_h(N, v, L, P) - \sum_{h \in P_k} \text{EE}\psi_h(N, v, L, P) = \sum_{h \in P_s} f_h(N, v, L, P) - \sum_{h \in P_s} \text{EE}\psi_h(N, v, L, P).$$

这意味着, 对于任意的 $k, s \in M$, 均有

$$\sum_{h \in P_k} f_h(N, v, L, P) - \sum_{h \in P_k} \text{EE}\psi_h(N, v, L, P) = \sum_{h \in P_s} f_h(N, v, L, P) - \sum_{h \in P_s} \text{EE}\psi_h(N, v, L, P).$$

对上式, 固定 k , 对于所有的 $s \in M$ 进行加和, 并由有效性可得

$$\begin{aligned} & |M| \left[\sum_{h \in P_k} f_h(N, v, L, P) - \sum_{h \in P_k} \text{EE}\psi_h(N, v, L, P) \right] \\ &= \sum_{s \in M} \sum_{h \in P_s} f_h(N, v, L, P) - \sum_{s \in M} \sum_{h \in P_s} \text{EE}\psi_h(N, v, L, P) \\ &= \sum_{h \in N} f_h(N, v, L, P) - \sum_{h \in N} \text{EE}\psi_h(N, v, L, P) \\ &= 0. \end{aligned}$$

于是, 对任意的 $k \in M$, 有

$$\sum_{h \in P_k} f_h(N, v, L, P) = \sum_{h \in P_k} \text{EE}\psi_h(N, v, L, P). \quad (3.4)$$

其次, 证明对任意的 $i \in N$, $f_i(N, v, L, P) = \text{EE}\psi_i(N, v, L, P)$. 若存在 $P_k = \{i\} \in P$, 由 (3.4) 立即可得 $f_i(N, v, L, P) = \text{EE}\psi_i(N, v, L, P)$. 现在对优先联盟的数目 $|P| = p$ 使用数学归纳法. 显然, 当 $P = P^n$ 时, 由 (3.4) 立即可知断言成立. 不妨假设当 $m \leq p \leq n$ 时, $f_i(N, v, L, P) = \text{EE}\psi_i(N, v, L, P)$. 下证当 $p = m - 1$ 时, $f_i(N, v, L, P) = \text{EE}\psi_i(N, v, L, P)$. 对任意的 $P_k \in P$, $p_k \geq 2$, 任取 $i, j \in P_k$, 由联盟平衡贡献性和归纳假设可知,

$$f_i(N, v, L, P) - f_j(N, v, L, P) = f_i(N, v, L, P_{-j}) - f_j(N, v, L, P_{-i})$$

$$\begin{aligned} &= \text{EE}\psi_i(N, v, L, P_{-j}) - \text{EE}\psi_j(N, v, L, P_{-i}) \\ &= \text{EE}\psi_i(N, v, L, P) - \text{EE}\psi_j(N, v, L, P). \end{aligned}$$

因此, 对于任意的 $i \in P_k \in P$, 存在常数 d_{P_k} , 使得

$$f_i(N, v, L, P) - \text{EE}\psi_i(N, v, L, P) = d_{P_k}.$$

结合 (3.4) 可知, $d_{P_k} = 0$. 由 k 的任意性可知, 对任意的 $i \in N$, 有 $f_i(N, v, L, P) = \text{EE}\psi_i(N, v, L, P)$, 与归纳假设矛盾, 唯一性得证. $\square$

3.3 其他形式的公理化刻画

本小节将借助更多的性质提出有效均分 Owen 图值的其他形式公理化刻画. 为此, 下面将 Shan 等^[11] 提出的图对策下的剩余公平性、Hu 等^[9] 提出的分支内剩余公平性和 van den Brink 等^[5] 提出的剩余公平分配性分别拓展到具有联盟结构和图结构的 TU- 对策的情形中. 容易验证, 当联盟分割为平凡联盟结构 P^n 或者大联盟结构 P^N 时, 下述剩余公平性、分支内剩余公平性和剩余公平分配性即为图对策情形中的性质.

剩余公平性 对任意 $(N, v, L, P) \in \mathbb{U}^N$, $i, j \in N$, 满足

$$f_i(N, v, L, P) - f_i(C_i, v_{C_i}, L_{C_i}, P_{C_i}) = f_j(N, v, L, P) - f_j(C_j, v_{C_j}, L_{C_j}, P_{C_j}),$$

则称 f 满足剩余公平性.

事实上, 当 i 和 j 属于同一个分支时, 剩余公平性即为 Hu 等^[9] 的分支内剩余公平性.

分支内剩余公平性 对任意 $(N, v, L, P) \in \mathbb{U}^N$, $i, j \in C \in N/L$, 满足

$$f_i(N, v, L, P) - f_i(C, v_C, L_C, P_C) = f_j(N, v, L, P) - f_j(C, v_C, L_C, P_C),$$

则称 f 满足分支内剩余公平性.

剩余公平分配性 对任意 $(N, v, L, P) \in \mathbb{U}^N$, $C, C' \in N/L$, 满足

$$\frac{1}{|C|} \sum_{i \in C} (f_i(N, v, L, P) - f_i(C, v_C, L_C, P_C)) = \frac{1}{|C'|} \sum_{i \in C'} (f_i(N, v, L, P) - f_i(C', v_{C'}, L_{C'}, P_{C'})),$$

则称 f 满足剩余公平分配性.

为了在有效均分 Owen 图值的刻画中利用上述性质, 需要证明 Owen 图值满足下列的分支可分解性.

分支可分解性 对任意的 $(N, v, L, P) \in \mathbb{U}^N$ 和 $i \in C \in N/L$, 若满足

$$f_i(N, v, L, P) = f_i(C, v_C, L_C, P_C),$$

则称 f 满足分支可分解性.

分支可分解性是指, 联盟中每个成员所获得的收益等于限制在这个成员所在分支上获得的收益, 即每个成员所获得的收益只与该成员所在分支有关. 显然当 $P = P^n$ 或 $P = P^N$ 时, 即为图对策情形下的分支可分解性.

引理 3.2^[16] 对于任意的 $S \subseteq N$ 和固定的 $T \subseteq S$, 有

$$\sum_{K \subseteq N \setminus S} \frac{(t+k)!(n-t-k-1)!}{n!} = \sum_{k=0}^{n-s} \binom{n-s}{k} \frac{(t+k)!(n-t-k-1)!}{n!} = \frac{t!(s-t-1)!}{s!}.$$

引理 3.3 对任意的 $(N, v, L, P) \in \mathbb{U}^N$, $\psi(N, v, L, P)$ 满足分支可分解性, 即对于任意的 $i \in C \in N/L$, $\psi_i(N, v, L, P) = \psi_i(C, v_C, L_C, P_C)$.

证明 对任意 $i \in C \in N/L$, 存在 $Q = \{r_1, r_2, \dots, r_q\} \subseteq M$, 使得 $P_C = \{P_{r_1}^C, P_{r_2}^C, \dots, P_{r_q}^C\}$ 是限制在 C 上的联盟结构, 则 $C = \bigcup_{r_t \in Q} P_{r_t}^C$. 因此, 必存在 $r_k \in Q$, 使得 $i \in P_{r_k}^C \subseteq P_{r_k}$. 由 Owen 图值的定义可得

$$\begin{aligned} \psi_i(N, v, L, P) &= \sum_{R \subseteq M \setminus r_k} \sum_{T \subseteq P_{r_k} \setminus i} \frac{r!(m-r-1)!}{m!} \frac{t!(p_{r_k}-t-1)!}{p_{r_k}!} \\ &\quad \times \left[v^L \left(\bigcup_{k \in R} P_k \cup T \cup i \right) - v^L \left(\bigcup_{k \in R} P_k \cup T \right) \right] \\ &= \sum_{S \subseteq M \setminus Q} \sum_{R \subseteq Q \setminus r_k} \sum_{T \subseteq P_{r_k} \setminus i} \frac{(r+s)!(m-r-s-1)!}{m!} \frac{t!(p_{r_k}-t-1)!}{p_{r_k}!} \\ &\quad \times \left[v^L \left(\bigcup_{k \in R \cup S} P_k \cup T \cup i \right) - v^L \left(\bigcup_{k \in R \cup S} P_k \cup T \right) \right], \end{aligned} \quad (3.5)$$

由 $i \in C = \bigcup_{r_t \in Q} P_{r_t}^C \subseteq \bigcup_{r_t \in Q} P_{r_t}$, 对任意的 $R \subseteq Q \setminus r_k$ 和 $S \subseteq M \setminus Q$, 有 $\bigcup_{r_t \in R} P_{r_t} \subseteq \bigcup_{k \in Q} P_k$, $\bigcup_{t \in S} P_t \subseteq \bigcup_{t \in M \setminus Q} P_t \subseteq N \setminus C$, 进一步可得

$$\begin{aligned} v^L \left(\bigcup_{k \in R \cup S} P_k \cup T \cup i \right) &= v^L \left[\left(\bigcup_{k \in R \cup S} P_k \cup T \cup i \right) \cap (C \cup (N \setminus C)) \right] \\ &= v^L \left[\left(\left(\bigcup_{k \in R \cup S} P_k \cup T \cup i \right) \cap C \right) \cup \left(\left(\bigcup_{k \in R \cup S} P_k \cup T \cup i \right) \cap (N \setminus C) \right) \right] \\ &= v^L \left[\left(\left(\bigcup_{k \in R} P_k \cup T \right) \cap C \right) \cup i \right] + v^L \left[\left(\bigcup_{k \in R \cup S} P_k \cup T \right) \cap (N \setminus C) \right], \\ v^L \left(\bigcup_{k \in R \cup S} P_k \cup T \right) &= v^L \left[\left(\bigcup_{k \in R \cup S} P_k \cup T \right) \cap (C \cup (N \setminus C)) \right] \\ &= v^L \left[\left(\left(\bigcup_{k \in R \cup S} P_k \cup T \right) \cap C \right) \cup \left(\left(\bigcup_{k \in R \cup S} P_k \cup T \right) \cap (N \setminus C) \right) \right] \\ &= v^L \left[\left(\left(\bigcup_{k \in R} P_k \cup T \right) \cap C \right) \right] + v^L \left[\left(\bigcup_{k \in R \cup S} P_k \cup T \right) \cap (N \setminus C) \right]. \end{aligned} \quad (3.6)$$

结合 (3.5)、(3.6) 和引理 3.2, 进一步化简可得

$$\begin{aligned} \psi_i(N, v, L, P) &= \sum_{R \subseteq Q \setminus r_k} \sum_{T \subseteq P_{r_k} \setminus i} \sum_{S \subseteq M \setminus Q} \frac{(r+s)!(m-r-s-1)!}{m!} \frac{t!(p_{r_k}-t-1)!}{p_{r_k}!} \\ &\quad \times \left[v^L \left[\left(\left(\bigcup_{k \in R} P_k \cup T \right) \cap C \right) \cup i \right] - v^L \left[\left(\bigcup_{k \in R} P_k \cup T \right) \cap C \right] \right] \\ &= \sum_{R \subseteq Q \setminus r_k} \sum_{T \subseteq P_{r_k} \setminus i} \frac{r!(q-r-1)!}{q!} \frac{t!(p_{r_k}-t-1)!}{p_{r_k}!} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \times \left[v^L \left[\left(\left(\bigcup_{k \in R} P_k \cup T \right) \cap C \right) \cup i \right] - v^L \left[\left(\left(\bigcup_{k \in R} P_k \cup T \right) \cap C \right) \right] \right] \\
 &= \sum_{R \subseteq Q \setminus r_k} \sum_{T \subseteq P_{r_k} \setminus i} \frac{r!(q-r-1)!}{q!} \frac{t!(p_{r_k}-t-1)!}{p_{r_k}!} \\
 & \times \left[v^L \left(\left(\bigcup_{k \in R} P_k \cap C \right) \cup (T \cap C) \cup i \right) - v^L \left(\left(\bigcup_{k \in R} P_k \cap C \right) \cup (T \cap C) \right) \right] \\
 &= \sum_{R \subseteq Q \setminus r_k} \sum_{K \subseteq P_{r_k} \setminus P_{r_k}^C} \sum_{T \subseteq P_{r_k}^C \setminus i} \frac{r!(q-r-1)!}{q!} \frac{(t+k)!(p_{r_k}-t-k-1)!}{p_{r_k}!} \\
 & \times \left[v^L \left(\bigcup_{r_t \in R} P_{r_t}^C \cup ((T \cup K) \cap C) \cup i \right) - v^L \left(\bigcup_{r_t \in R} P_{r_t}^C \cup ((T \cup K) \cap C) \right) \right] \\
 &= \sum_{R \subseteq Q \setminus r_k} \sum_{T \subseteq P_{r_k}^C \setminus i} \frac{r!(q-r-1)!}{q!} \sum_{K \subseteq P_{r_k} \setminus P_{r_k}^C} \frac{(t+k)!(p_{r_k}-t-k-1)!}{p_{r_k}!} \\
 & \times \left[v^L \left(\bigcup_{r_t \in R} P_{r_t}^C \cup T \cup i \right) - v^L \left(\bigcup_{r_t \in R} P_{r_t}^C \cup T \right) \right] \\
 &= \sum_{R \subseteq Q \setminus r_k} \sum_{T \subseteq P_{r_k}^C \setminus i} \frac{r!(q-r-1)!}{q!} \frac{t!(p_{r_k}^c-t-1)!}{p_{r_k}^c!} \\
 & \times \left[v^L \left(\bigcup_{r_t \in R} P_{r_t}^C \cup T \cup i \right) - v^L \left(\bigcup_{r_t \in R} P_{r_t}^C \cup T \right) \right] \\
 &= \psi_i(C, v_C, L_C, P_C).
 \end{aligned}$$

综上可得, 对任意的 $(N, v, L, P) \in \mathbb{U}^N$, $\psi(N, v, L, P)$ 满足分支可分解性. $\square$

由引理 3.3 可立即给出有效均分 Owen 图值的另一种刻画.

定理 3.2 对任意的 $(N, v, L, P) \in \mathbb{U}^N$, $\text{EE}\psi(N, v, L, P)$ 是满足有效性、Owen 值黏性和剩余公平性的唯一解.

证明 结合 $\text{EE}\psi(N, v, L, P)$ 的定义, 易证 $\text{EE}\psi$ 满足上述 3 个性质. 不妨设存在分配规则 $f(N, v, L, P)$ 满足上述 3 个性质, 下面证明 $f = \text{EE}\psi$. 根据剩余公平性可知, 对于任意的 $i, j \in N$, 有

$$f_i(N, v, L, P) - f_i(C_i, v_{C_i}, L_{C_i}, P_{C_i}) = f_j(N, v, L, P) - f_j(C_j, v_{C_j}, L_{C_j}, P_{C_j}).$$

固定 i , 对所有的 $j \in N$ 进行加和, 根据有效性可得

$$\begin{aligned}
 |N|(f_i(N, v, L, P) - f_i(C_i, v_{C_i}, L_{C_i}, P_{C_i})) &= \sum_{j \in N} (f_j(N, v, L, P) - f_j(C_j, v_{C_j}, L_{C_j}, P_{C_j})) \\
 &= v(N) - v^L(N).
 \end{aligned}$$

进一步, 化简可得

$$f_i(N, v, L, P) = f_i(C_i, v_{C_i}, L_{C_i}, P_{C_i}) + \frac{v(N) - v^L(N)}{n}. \quad (3.7)$$

由 Owen 值黏性和引理 3.3 可得

$$f_i(C_i, v_{C_i}, L_{C_i}, P_{C_i}) = \psi_i(C_i, v_{C_i}, L_{C_i}, P_{C_i}) = \psi_i(N, v, L, P). \quad (3.8)$$

结合 (3.7) 和 (3.8), 对于任意的 $i \in N$, 有

$$f_i(N, v, L, P) = \psi_i(N, v, L, P) + \frac{v(N) - v^L(N)}{n}.$$

定理得证. $\square$

引理 3.4 设 f 为 $\mathbb{U}^N$ 上的分配规则, 则 f 满足剩余公平性当且仅当 f 满足剩余公平分配性和分支内剩余公平性.

证明 首先证明 f 满足剩余公平性, 即蕴涵着 f 满足剩余公平分配性和分支内剩余公平性. 对任意的 $(N, v, L, P) \in \mathbb{U}^N$, 显然, 当 $i, j \in C \in N/L$ 时, 剩余公平性蕴涵分支内剩余公平性. 当 i 和 j 在不同分支时, 即存在分支 $C, C' \in N/L$ 使得 $i \in C, j \in C'$, 由剩余公平性可知, 必存在常数 d 使得

$$f_i(N, v, L, P) - f_i(C, v_C, L_C, P_C) = f_j(N, v, L, P) - f_j(C', v_{C'}, L_{C'}, P_{C'}) = d,$$

进而可知,

$$\begin{aligned} \frac{1}{|C|} \sum_{i \in C} (f_i(N, v, L, P) - f_i(C, v_C, L_C, P_C)) &= \frac{1}{|C|} \sum_{i \in C} d = d = \frac{1}{|C'|} \sum_{i \in C'} d \\ &= \frac{1}{|C'|} \sum_{i \in C'} (f_i(N, v, L, P) - f_i(C', v_{C'}, L_{C'}, P_{C'})). \end{aligned}$$

因而当 i 和 j 在不同分支时, 剩余公平性蕴涵剩余公平分配性.

下证 f 满足剩余公平分配性和分支内剩余公平性蕴涵 f 满足剩余公平性, 由分支内剩余公平性可知, 分别存在常数 d_C 和 $d_{C'}$ 使得对任意的 $i \in C \in N/L$ 和 $k \in C' \in N/L$, 有

$$f_i(N, v, L, P) - f_i(C, v_C, L_C, P_C) = d_C, \quad f_k(N, v, L, P) - f_k(C', v_{C'}, L_{C'}, P_{C'}) = d_{C'},$$

由剩余公平分配, 可得

$$\begin{aligned} d_C &= \frac{1}{|C|} \sum_{i \in C} (f_i(N, v, L, P) - f_i(C, v_C, L_C, P_C)) \\ &= \frac{1}{|C'|} \sum_{i \in C'} (f_i(N, v, L, P) - f_i(C', v_{C'}, L_{C'}, P_{C'})) \\ &= d_{C'}. \end{aligned}$$

因此, 剩余公平分配性和分支内剩余公平性蕴涵剩余公平性, 结论得证. $\square$

事实上, 定理 3.2 和引理 3.4 给出了有效均分 Owen 图值的另一个刻画.

定理 3.3 对任意的 $(N, v, L, P) \in \mathbb{U}^N$, $\text{EE}\psi(N, v, L, P)$ 是满足有效性、Owen 值黏性、剩余公平分配性和分支内剩余公平性的唯一解.

3.4 公理的逻辑独立性

本小节说明刻画公理的逻辑独立性. 对于定理 3.1 及任意的 $(N, v, L, P) \in \mathbb{U}^N$ 和任意的 $i \in P_k \in P$,

(1) 值 $\phi_i^1(N, v, L, P) = \psi_i(N, v, L, P) + \frac{v(N) - v^L(N)}{pp_k}$ 满足有效性、Owen 值黏性和联盟平衡贡献性, 但不满足准边商公平性.

(2) 值 $\phi_i^2(N, v, L, P) = \frac{v^L(N)}{pp_k} + \frac{v(N) - v^L(N)}{n}$ 满足有效性、联盟平衡贡献性和准边商公平性, 但是不满足 Owen 值黏性.

(3) 值 $\phi_i^3(N, v, L, P) = \psi_i(N, v, L, P) + \frac{(1 + \frac{1}{p_k})(v(N) - v^L(N))}{n}$ 满足 Owen 值黏性、联盟平衡贡献性和准边商公平性, 但是不满足有效性.

(4) 值

$$\phi_i^4(N, v, L, P) = \begin{cases} \psi_i(N, v, L, P) + \frac{p_k(v(N) - v^L(N))}{3n|P_k \cap \mathcal{N}(N, v)|}, & i \in \mathcal{N}(N, v), \\ \psi_i(N, v, L, P) + \frac{2p_k(v(N) - v^L(N))}{3n|P_k \setminus \mathcal{N}(N, v)|}, & i \notin \mathcal{N}(N, v) \end{cases}$$

满足有效性、准边商公平性和 Owen 值黏性, 但不满足联盟平衡贡献性, 其中 $\mathcal{N}(N, v) = \{i \in N \mid v(S \cup i) = v(S), S \subseteq N \setminus i\}$ 表示空元的集合.

在定理 3.2 中, 对于任意的 $(N, v, L, P) \in \mathbb{U}^N$,

(1) 对任意的 $i \in N$,

$$\phi_i^5(N, v, L, P) = \psi_i(N, v, L, P) + \frac{v(N) - v^L(N)}{2n}$$

满足 Owen 值黏性和剩余公平性, 但不满足有效性.

(2) 对任意的 $i \in C \in N/L$,

$$\phi_i^6(N, v, L, P) = \frac{v(C)}{c} + \frac{v(N) - v^L(N)}{n}$$

满足有效性和剩余公平性, 但不满足 Owen 值黏性.

(3) 对任意的 $i \in C \in N/L$,

$$\phi_i^7(N, v, L, P) = \psi_i(N, v, L, P) + \frac{v(N) - v^L(N)}{|N/L|c}$$

满足有效性和 Owen 值黏性, 但不满足剩余公平性.

4 应用案例分析

例 4.1 现有 20 万元的科研项目下放到 3 所科研机构 A 、 B 和 C 进行申请, 为鼓励科研机构内部及科研机构之间的跨学科合作, 由科研机构内或者科研机构之间两个或者两个以上的研究者之间联合申报该项目可获得相对较高的资助. 要求该 20 万元的研究资金都要用于资助这些科研工作者且无剩余. 不妨设机构 A 中成员 1 和 2 进行联合申报, 机构 B 中成员 3 及机构 C 中的成员 4 和 5 进行联合申报. 可知参与者集合为 $N = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, 图结构为 $L = \{\{1, 2\}, \{3, 4\}, \{4, 5\}\}$, 联盟结构为 $C = \{A, B, C\} = \{\{1, 2\}, \{3\}, \{4, 5\}\}$, 则连通分支为 $N/L = \{\{1, 2\}, \{3, 4, 5\}\}$, 具体参见图 1. 此外特征函数定义为 $v(\{i\}) = 1, i \in N; v(S) = s^2$, 其中 $S \subseteq N$ 且 $2 \leq s \leq 4, v(N) = 20$.

其中, 表 1 将 (N, v) 、 (N, v, L) 和 (N, v, L, C) 分别简写为 (v) 、 (v, L) 和 (v, L, C) . 另外, Sh 、 μ 、 AT 和 ψ 分别表示 Shapley 值、Myerson 值、平均树解和 Owen 图值, 而 $EE\mu^{[5]}$ 、 $EEAT^{[7]}$ 和 $EE\psi$ 表示对应于图对策值 μ 、 AT 和 ψ 的有效解.

从所得结果看, Shapley 值虽将 20 万元资金充分进行分配, 但未考虑成员间的合作结构; 而 Myerson 值、平均树解和 Owen 图值虽考虑了成员间的合作结构, 但仅分配出 13 万元, 并未充分利用全部

图 1 联盟结构和图结构

表 1 不同分配规则下的分配结果

成员	$Sh(v)$	$\mu(v, L)$	$AT(v, L)$	$\psi(v, L, C)$	$EE\mu(v, L)$	$EEAT(v, L)$	$EE\psi(v, L, C)$
1	4.0000	2.0000	2.0000	2.0000	3.4000	3.4000	3.4000
2	4.0000	2.0000	2.0000	2.0000	3.4000	3.4000	3.4000
3	4.0000	2.6667	2.3333	3.0000	4.0667	3.7333	4.4000
4	4.0000	3.6667	4.3333	3.5000	5.0667	5.7333	4.9000
5	4.0000	2.6667	2.3333	2.5000	4.0667	3.7333	3.9000

资金; Myerson 值和平均树解的有效解虽解决了上述分配不充分的问题, 也考虑成员间的图合作结构, 突出了成员 4 在合作中的关键性, 但并未考虑成员间的优先联盟结构, 使得在图合作结构中处于对称地位但位于不同优先联盟内的成员 3 和 5 分配到了相同的资金. 实际上, 在鼓励跨机构、跨学科合作背景下, 与成员 4 处于不同优先联盟的成员 3 加入合作带来的申请优势比成员 5 更大. 因此, 成员 3 应获得更多分配. 有效均分 Owen 图值则克服了上述局限, 将资金进行充分分配的同时, 考虑了成员间存在的多重合作结构, 给出了更为合理的分配方式, 更有利于提高科研机构间合作的积极性.

致谢 衷心感谢评审专家的仔细阅读和提出的宝贵建议.

参考文献

1 Branzei R, Dimitrov D, Tijs S. Models in Cooperative Game Theory. Berlin: Springer, 2008

2 Shapley L S. A value for n -person games. In: Tucker A W, Kuhn H W, eds. Contributions to the Theory of Games. Princeton: Princeton University Press, 1953, 307–317

3 Owen G. Values of games with a priori unions. In: Henn R, Moeschlin O, eds. Mathematical Economics and Game Theory. New York: Springer, 1977, 76–88

4 Myerson R B. Graphs and cooperation in games. Math Oper Res, 1977, 2: 225–229

5 van den Brink R, Khmelnitskaya A B, van der Laan G. An efficient and fair solution for communication graph games. Econom Lett, 2012, 117: 786–789

6 Béal S, Casajus A, Huettner F. Efficient extensions of the Myerson value. Soc Choice Welf, 2015, 45: 819–827

7 单而芳, 谢娜娜, 张广. 基于平均树值的无圈图博弈有效解. 运筹与管理, 2017, 26: 24–30

8 Béal S, Casajus A, Huettner F. Efficient extensions of communication values. Ann Oper Res, 2018, 264: 41–56

9 Hu X, Li D, Xu G. Fair distribution of surplus and efficient extensions of the Myerson value. Econom Lett, 2018, 165: 1–5

10 单而芳, 曾晗, 韩佳玉. 无圈超图对策上的有效平均树解. 系统工程理论与实践, 2020, doi: 10.12011/1000-6788-2019-1013-10

11 Shan E, Han J, Shi J. The efficient proportional Myerson values. Oper Res Lett, 2019, 47: 574–578

12 Vázquez-Brage M, García-Jurado I, Carreras F. The Owen value applied to games with graph-restricted communication. Games Econom Behav, 1996, 12: 42–53

13 Alonso-Meijide J M, Álvarez-Mozos M, Fiestras-Janeiro M G. Values of games with graph restricted communication and a priori unions. Math Social Sci, 2009, 58: 202–213

- 14 孙红霞, 张强. 具有联盟结构的限制合作博弈的限制 Owen 值. 系统工程理论与实践, 2013, 33: 981–987
- 15 Slikker M, van den Nouweland A. Social and Economic Networks in Cooperative Game Theory. New York: Springer, 2001
- 16 van den Nouweland A. Games and Graphs in Economic Situations. PhD Thesis. Tilburg: Tilburg University, 1993

Efficient extension of the Owen value with graph-restricted communication

Erfang Shan, Jilei Shi, Wenrong Lyu & Liying Kang

Abstract The Owen graph value is a generalization of the well-known Owen value to cooperative games with graph-restricted communication. The value satisfies the property of component efficiency, but loses the property of efficiency. The efficiency requirement imposes that the total wealth generated in a cooperative game is divided among its players. In this paper we introduce an efficient extension of the Owen graph value and provide three characterizations for the efficient Owen graph value. Finally, we compare the value with other efficient values by an application example.

Keywords cooperative game, Owen value, graph, coalition structure, efficient solution

MSC(2010) 91A43, 05C57

doi: 10.1360/SSM-2020-0009