基于谱元区域分解法中频域弹性波问题的求解技术

时林林^{1,2}, 庄明伟^{1*}, 周远国³, 刘娜¹, 柳清伙^{4†}

1. 厦门大学电磁声学研究院, 厦门 361005;

2. 工业和信息化部电子第五研究所, 广州 510610;

3. 西安科技大学通信与信息工程学院, 西安 710054;

4. Department of Electrical and Computer Engineering, Duke University, Durham 27708, USA

* 通讯作者, E-mail: mw.zhuang@xmu.edu.cn

† 通讯作者, E-mail: qhliu@duke.edu

收稿日期: 2020-03-10; 收修改稿日期: 2020-10-08; 接受日期: 2020-11-03; 网络版发表日期: 2020-12-21

国家自然科学基金项目(批准号: 41390453、62001408)、国家重点研发计划项目(编号: 2018YFC0603503)和国家自然科学基金委-广东省政府联合基金项目(编号: U1501501)资助

摘要 文章提出一种基于谱元法的区域分解算法(DDM-SEM), 并将其用于频域弹性波问题的计算. 该方法结合了谱元法的高精度以及区域分解法的高并行特性, 适合于大尺度弹性波问题的高精度和高效率计算. 在DDM-SEM算法中, 原始的大尺度问题被分解为若干个子区域, 每个子区域采用谱元法独立求解, 子区域之间的交界面通过频域黎曼传输条件连接. 本文提出的区域分解方法在不同的子区域不仅可采用非匹配网格, 而且还可以选取不同的插值阶数, 实现计算效率最大化. 通过对每个子区域的内部自由度和边界自由度进行分离, 结合高效和天然并行性的分块LDU直接求解器能快速求解系统矩阵. 数值结果验证了该方法的精度和效率, 同时也表明DDM-SEM算法在计算大规模、多尺度的弹性波模型中展现出数值方法的优越性. 同时, 本文提出的方法对于频域下多源地震波反问题的计算具有潜在的应用价值.

关键词 弹性波, 区域分解, 谱元法, 频域, 数值仿真

1 引言

地震成像和反演需要对复杂地层弹性模型进行快速和准确地正演模拟(An等, 2017; Gao等, 2016). 虽然时域数值方法被广泛用于这类问题的建模(Komatitsch和Vilotte, 1998; Komatitsch和Tromp, 2002a), 但在全波地震反演中, 通常涉及到多源问题. 时域方法对每个震

源都需进行一次计算, 因此计算非常耗时. 然而, 在频域数值技术中, 由于系统矩阵与震源无关, 只需执行一次系统矩阵的计算, 通过简单的矩阵向量乘法即可实现多源问题地求解. 因此, 对于地震反演问题, 频域方法具有更好的应用前景. 此外, 对于窄频带问题、色散介质等问题, 使用频域方法也很容易的实现(Pratt, 1990, 1999).

中文引用格式: 时林林, 庄明伟, 周远国, 刘娜, 柳清伙. 2021. 基于谱元区域分解法中频域弹性波问题的求解技术. 中国科学: 地球科学, 51(3): 364–379, doi: 10.1360/N072020-0064

英文引用格式: Shi L, Zhuang M, Zhou Y, Liu N, Liu Q. 2021. Domain decomposition based on the spectral element method for frequency-domain computational elastodynamics. Science China Earth Sciences, 64(3): 388–403, <https://doi.org/10.1007/s11430-020-9696-4>

谱元法(Spectral Element Method, SEM)是一种高精度求解偏微分方程的数值方法, 1984年首次由Patera在计算流体力学中提出(Patera, 1984). 在SEM中, 基函数由高斯-洛巴托-勒让德(Gauss-Lobatto-Legendre, GLL)多项式构建, 其误差随基函数阶数的增加呈指数下降(Liu, 1998; Lee和Liu, 2005; Lee等, 2006; Zhou等, 2016). 与传统的有限元方法(Finite Element Method, FEM)比较(Koshiba等, 1984; Moser等, 1999), 因SEM具有快速收敛的特性, 可通过大量减少自由度来提高计算效率. 在过去二十年中, 因在波动问题的计算中表现出高精度和高效性, 时域谱元法吸引了很多研究者的注意(Seriani和Priolo, 1994; Lee等, 2009; De Basabe和Sen, 2007; Liu等, 2015; Shi等, 2016). 对于地震波问题, 时域谱元法已被成功应用于区域级和全球规模的仿真, 并被证实具有显著的效果和潜在应用价值(Komatitsch和Vilotte, 1998; Komatitsch和Tromp, 2002a, 2002b). Tromp等人对时域谱元法进行了详细介绍(Tromp等, 2008).

在频域中, 对大尺度问题的计算, 系统矩阵的求解往往需要消耗巨大的计算资源. 在之前的研究工作中, 作者提出了基于谱元法的弹性波和声波的频域仿真方法(Shi等, 2016). 该方法展示了频域谱元法相比于有限元方法的高效性以及卓越性. 传统的谱元法采用单区域离散, 当仿真模型尺寸远远大于波长时, 导致离散出的系统矩阵阶数非常巨大, 同时条件数也将变得更大. 因此, 在有限的计算机内存和CPU资源下直接求解整个系统矩阵是非常困难的, 甚至不可能实现. 此外, 大型矩阵的条件数较差, 即便采用迭代求解方法也难以收到很好的效果.

为了克服频域计算瓶颈, 间断伽辽金方法(Discontinuous Galerkin, DG)吸引了越来越多学者的研究, 该方法具有易并行和易扩展性的优势. 在实际的地质科学问题中, 大尺度或介质参数高对比度地质模型普遍存在, 若能将计算区域分割成若干个子域可提高建模的灵活性和效率. 因此, 建立一种有效且准确的区域分解算法来求解该难题是非常有必要的. 在DG中, 数值通量或内部惩罚因子是实现区域分解算法的关键(De Basabe等, 2008; Alvarez等, 2012; Ye等, 2016). 通常有三种类型的数值通量: (1) 中心通量作为一种非耗散格式, 只取界面两侧通量的平均值(Ye等, 2016), 但数值精度低; (2) Lax-Friedrich 通量通过引入惩罚项来

实现稳定的DG方法(Chan和Warburton, 2016), 其解的准确性与通量的选取有关; (3) 黎曼求解器是最为严谨的通量形式, 能有效的消除伪模, 从而获得精确的结果(Alvarez等, 2012; Kopriva等, 2017). 因此, 准确数值通量的选取能维持连续伽辽金方法的收敛速度, 即数值解具有比阶数高一阶的特点.

本文针对频域二阶弹性波仿真问题, 提出基于谱元法的区域分解技术(Domain Decomposition Method, DDM-SEM). 该技术结合了谱元法的高精度以及区域分解法的高并行性(Faccioli等, 1996; Zeng等, 2004; Lin等, 2009; Luo等, 2013; Zhao等, 2008; Lu等, 2008). 在DDM-SEM 算法中, 一种非均匀材料的频域黎曼传输条件被作为精确的数值通量(Luo等, 2013; Zhan等, 2017). 每一个子区域的分界面有独立的自由度系统, 其目的是实现黎曼求解器在谱元法中的离散. 类似罗玛等人于2013年发表的关于电磁计算的文章一样(Luo等, 2013), 黎曼传输条件在频域弹性波计算中也非常适用.

本文提出的DDM-SEM方法将原始计算区域分割为若干个不重叠且具有独立网格的子区域, 这样离散后的大尺度系统矩阵也被分割为若干个小系统矩阵. 通过分离子区域内部自由度和边界自由度, 将所有子区域边界的自由度转移至整体系统矩阵的右下角. 本文发展的区域分解方法具备高效和天然并行特性, 可在LDU求解器中实现系统矩阵的计算(Tobon等, 2015; Sun等, 2015). 虽然在LUD算法中, 边界自由度会产生一个稠密矩阵, 但因其规模相对较小, 可采用直接求解器进行求解. 同时, 每个子区域的内部未知量还是表现为高度稀疏性, 因而求解所需的内存较少, 并且每个子区域是独立的, 还可利用并行求解.

2 原理及公式

2.1 DDM-SEM系统的弱形式

本节将推导频域弹性波问题的DDM-SEM弱形式. 首先将给出弹性介质中的偏微分方程, 位移场 $\mathbf{u}$ 与应力场 $\boldsymbol{\tau}$ 的关系为

$$\begin{cases} -\rho\omega^2\mathbf{u} - \nabla \cdot \boldsymbol{\tau} = \mathbf{f}, \\ \boldsymbol{\tau} = \mathbf{C} : \boldsymbol{\varepsilon}, \quad \boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T), \end{cases} \quad (1)$$

其中 ρ 为质量密度, $\mathbf{C}$ 是四阶弹性张量 c_{ijkl} ($i, j, k, l=1, 2, 3$), 对于各向异性介质, 有21个独立的参数, $\mathbf{u}$ 、 $\boldsymbol{\varepsilon}$ 和 $\boldsymbol{\tau}$ 分

别是位移向量、应变张量和应力张量, 变量 ω 和 $\mathbf{f}$ 分别是角频率和荷载向量. 在区域分解技术中, 整体计算区域 Ω 被分割为一系列不重叠的子区域 Ω_i ($i=1, 2, \dots, N_d$). 对于第 i 个子区域, 利用测试函数 $\phi_m^{(i)}(m=1, 2, \dots, N_i)$ 来测试弹性动量方程(1), 然后对方程两边在体积上进行积分, 得到:

$$\langle \nabla \phi_m^{(i)} \cdot \boldsymbol{\tau}^{(i)} - \rho \omega^2 \phi_m^{(i)} \mathbf{u}^{(i)} \rangle_{\Omega_i} - \langle \phi_m^{(i)} (\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\tau})^* \rangle_{S_i} = \langle \phi_m \mathbf{f} \rangle_{\Omega_i}, \quad (2)$$

上式中 $\langle \cdot \rangle_{\Omega_i}$ 和 $\langle \cdot \rangle_{S_i}$ 分别表示体积 Ω_i 和其表面 S_i 上的积分. 在DDM-SEM方法中, 需要注意面积分项 $(\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\tau})^*$ 是通量函数, 所有子区域都是利用数值通量进行相互连接. 近期詹启伟等人准确地推导了时域弹性波问题的非均匀黎曼解. 本文将该黎曼解的频域形式作为DDM-SEM中的传输条件, 方程(3)为黎曼解形式的边界传输条件. 该黎曼条件同样也是基于罗马等人于2013年在电磁波问题中推导的. 通过将交界面坐标系旋转至以 z 轴为法向的局部坐标, 黎曼解可写成如下形式:

$$\begin{cases} \tilde{\boldsymbol{\tau}}_m^* = \tilde{\boldsymbol{\tau}}_m^i + \gamma_{m1}(\tilde{\boldsymbol{\tau}}_m^j - \tilde{\boldsymbol{\tau}}_m^i) + \gamma_{m2}(\tilde{\mathbf{u}}_m^j - \tilde{\mathbf{u}}_m^i), & (m=1, 2, 3), \\ 0 = \gamma_{k1}(\tilde{\boldsymbol{\tau}}_m^j - \tilde{\boldsymbol{\tau}}_m^i) + \gamma_{k2}(\tilde{\mathbf{u}}_m^j - \tilde{\mathbf{u}}_m^i), & (k=4, 5, 6), \\ \tilde{\boldsymbol{\tau}} = \mathbf{R} \boldsymbol{\tau} \mathbf{R}^T, \\ \tilde{\mathbf{u}} = \mathbf{R} \mathbf{u}, \end{cases} \quad (3)$$

其中 $(\cdot)$ 表示局部坐标法中的法向分量(本文以 z 轴为参考), $\tilde{\boldsymbol{\tau}}_1$, $\tilde{\boldsymbol{\tau}}_2$ 和 $\tilde{\boldsymbol{\tau}}_3$ 分别对应 $\tilde{\boldsymbol{\tau}}_{xz}$, $\tilde{\boldsymbol{\tau}}_{yz}$, $\tilde{\boldsymbol{\tau}}_{zz}$, $\mathbf{R}$ 是欧拉角下的旋转矩阵. 黎曼解的第一个方程表示子区域 i 和相邻子区域 j 间的牵引力. 第二个方程是辅助方程, 本文假定了相邻子区域 i 和 j 在分界面上位移连续. 常系数 γ_j 按以下表达式给出:

$$\gamma_{11} = \gamma_{21} = \frac{Z_s^i}{Z_s^i + Z_s^j}, \quad \gamma_{31} = \frac{Z_p^i}{Z_p^i + Z_p^j}, \quad (4)$$

$$\gamma_{12} = \gamma_{22} = \frac{i\omega Z_s^i Z_s^j}{Z_s^i + Z_s^j}, \quad \gamma_{32} = \frac{i\omega Z_p^i Z_p^j}{Z_p^i + Z_p^j}, \quad (5)$$

$$\gamma_{41} = \gamma_{51} = \frac{1}{Z_s^i + Z_s^j}, \quad \gamma_{61} = \frac{1}{Z_p^i + Z_p^j}, \quad (6)$$

$$\gamma_{42} = \gamma_{52} = \frac{i\omega Z_s^i}{Z_s^i + Z_s^j}, \quad \gamma_{62} = \frac{i\omega Z_p^i}{Z_p^i + Z_p^j}. \quad (7)$$

$Z_p = \rho v_p$ 和 $Z_s = \rho v_s$ 分别表示P波和S波的阻抗, v_p 和 v_s 是P波和S波的传播速度. 为了简化方程, 本文只考虑 x 、 y 和 z 方向的区域分解. 因此, 在区域分解中子区域的分界面根据法向方向分为6种类型, 对应的黎曼解可表示为

$$\Gamma_{11}^{(J)} \tau_1^{(J)(i)} + \Gamma_{12}^{(J)} u_1^{(i)} + \Gamma_{13}^{(J)} \tau_1^{(J)(j)} + \Gamma_{14}^{(J)} u_1^{(j)} = \tau_{n,x}^*, \quad (8a)$$

$$\Gamma_{21}^{(J)} \tau_2^{(J)(i)} + \Gamma_{22}^{(J)} u_2^{(i)} + \Gamma_{23}^{(J)} \tau_2^{(J)(j)} + \Gamma_{24}^{(J)} u_2^{(j)} = \tau_{n,y}^*, \quad (8b)$$

$$\Gamma_{31}^{(J)} \tau_3^{(J)(i)} + \Gamma_{32}^{(J)} u_3^{(i)} + \Gamma_{33}^{(J)} \tau_3^{(J)(j)} + \Gamma_{34}^{(J)} u_3^{(j)} = \tau_{n,z}^*, \quad (8c)$$

$$\Gamma_{41}^{(J)} \tau_1^{(J)(i)} + \Gamma_{42}^{(J)} u_1^{(i)} + \Gamma_{43}^{(J)} \tau_1^{(J)(j)} + \Gamma_{44}^{(J)} u_1^{(j)} = 0, \quad (8d)$$

$$\Gamma_{51}^{(J)} \tau_2^{(J)(i)} + \Gamma_{52}^{(J)} u_2^{(i)} + \Gamma_{53}^{(J)} \tau_2^{(J)(j)} + \Gamma_{54}^{(J)} u_2^{(j)} = 0, \quad (8e)$$

$$\Gamma_{61}^{(J)} \tau_3^{(J)(i)} + \Gamma_{62}^{(J)} u_3^{(i)} + \Gamma_{63}^{(J)} \tau_3^{(J)(j)} + \Gamma_{64}^{(J)} u_3^{(j)} = 0, \quad (8f)$$

其中, $J=1, 2, \dots, 6$ 是分界面类型序号; $\tau_{n,x}^*$, $\tau_{n,y}^*$ 和 $\tau_{n,z}^*$ 是法向应力的3个分量; $\tau_1^{(J)(i)}$, $\tau_2^{(J)(i)}$ 和 $\tau_3^{(J)(i)}$ 为子区域分界面上新增加的边界变量. 系数 $\Gamma^{(J)}$ 的表达式如下:

$$\Gamma^{(1,2)} = \begin{pmatrix} n(1-\gamma_{11}) & -\gamma_{12} & \gamma_{11} & \gamma_{12} \\ n(1-\gamma_{11}) & -\gamma_{12} & \gamma_{11} & \gamma_{12} \\ n(1-\gamma_{21}) & -\gamma_{22} & \gamma_{21} & \gamma_{22} \\ -n\gamma_{31} & -\gamma_{32} & \gamma_{31} & \gamma_{32} \\ -n\gamma_{31} & -\gamma_{32} & \gamma_{31} & \gamma_{32} \\ -n\gamma_{41} & -\gamma_{42} & \gamma_{41} & \gamma_{42} \end{pmatrix},$$

$$\Gamma^{(3,4)} = \begin{pmatrix} n(1-\gamma_{21}) & -\gamma_{22} & \gamma_{21} & \gamma_{22} \\ n(1-\gamma_{11}) & -\gamma_{12} & \gamma_{11} & \gamma_{12} \\ n(1-\gamma_{11}) & -\gamma_{12} & \gamma_{11} & \gamma_{12} \\ -n\gamma_{41} & -\gamma_{42} & \gamma_{41} & \gamma_{42} \\ -n\gamma_{31} & -\gamma_{32} & \gamma_{31} & \gamma_{32} \\ -n\gamma_{31} & -\gamma_{32} & \gamma_{31} & \gamma_{32} \end{pmatrix},$$

$$\Gamma^{(5,6)} = \begin{pmatrix} n(1-\gamma_{11}) & -\gamma_{12} & -\gamma_{11} & \gamma_{12} \\ n(1-\gamma_{21}) & -\gamma_{22} & -\gamma_{21} & \gamma_{22} \\ n(1-\gamma_{11}) & -\gamma_{12} & -\gamma_{11} & \gamma_{12} \\ -n\gamma_{31} & -\gamma_{32} & -\gamma_{31} & \gamma_{32} \\ -n\gamma_{41} & -\gamma_{42} & -\gamma_{41} & \gamma_{42} \\ -n\gamma_{31} & -\gamma_{32} & -\gamma_{31} & \gamma_{32} \end{pmatrix}.$$

当 $J=1, 3, 5$ 时上式中系数 n 为1, 其他情形 $n=-1$. 对于方程(2)的表面积分项, 可将边界表面 S_i 分割为

$S_1^{(i)}, S_2^{(i)}, S_3^{(i)}, S_4^{(i)}, S_5^{(i)}, S_6^{(i)}$, 使得 $S_i = \sum_{k=1}^6 S_k^{(i)}$, 带入得:

$$\begin{aligned} I^{(i)} &= \langle \phi_m^{(i)} (\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\tau})^* \rangle_{S_i} = \hat{x} I_x^{(i)} + \hat{y} I_y^{(i)} + \hat{z} I_z^{(i)} \\ &= \hat{x} \sum_{k=1}^6 \langle \phi_m^{(i)} \tau_{n,x}^* \rangle_{S_k^{(i)}} + \hat{y} \sum_{k=1}^6 \langle \phi_m^{(i)} \tau_{n,y}^* \rangle_{S_k^{(i)}} \\ &\quad + \hat{z} \sum_{k=1}^6 \langle \phi_m^{(i)} \tau_{n,z}^* \rangle_{S_k^{(i)}}. \end{aligned} \quad (9)$$

将方程(9)和全局黎曼解方程(8a)~(8c)带入方程(2), 得到如下弱形式:

$$\begin{aligned} &\langle \nabla \phi_m^{(i)} \cdot [D_{p1}^{(i)} \nabla u_1^{(i)} + D_{p2}^{(i)} \nabla u_2^{(i)} + D_{p3}^{(i)} \nabla u_3^{(i)}] \rangle_{\Omega_i} \\ &- \rho \omega^2 \langle \phi_m^{(i)} u_p^{(i)} \rangle_{\Omega_i} - I_p^{(i)} = f_p^{(i)}, \quad (p = 1, 2, 3), \end{aligned} \quad (10)$$

上式中 $\mathbf{D}_{st}$ ($s, t=1, 2, 3$) 为 3×3 矩阵, 矩阵元素由 4 阶弹性张量 $\mathbf{C}$ 确定, 具有如下形式:

$$\mathbf{D}_{st} = \begin{pmatrix} c_{1st1} & c_{1st2} & c_{1st3} \\ c_{2st1} & c_{2st2} & c_{2st3} \\ c_{3st1} & c_{3st2} & c_{3st3} \end{pmatrix}, \quad (s, t = 1, 2, 3). \quad (11)$$

表面积分项 $I^{(i)}$ 涉及到 i 子区域边界上的黎曼解. 例如 $I_x^{(i)}$ 可以表达为

$$\begin{cases} \int_{S_k^{(i)}} \psi_m^{(i)} \Gamma_{41}^{(k)} \tau_1^{(k)(i)} ds + \int_{S_k^{(i)}} \psi_m^{(i)} \Gamma_{42}^{(k)} u_1^{(i)} ds + \int_{S_k^{(i)}} \psi_m^{(i)} \Gamma_{43}^{(k)} \tau_1^{(k)(j)} ds + \int_{S_k^{(i)}} \psi_m^{(i)} \Gamma_{44}^{(k)} u_1^{(j)} ds = 0, \\ \int_{S_k^{(i)}} \psi_m^{(i)} \Gamma_{51}^{(k)} \tau_2^{(k)(i)} ds + \int_{S_k^{(i)}} \psi_m^{(i)} \Gamma_{52}^{(k)} u_2^{(i)} ds + \int_{S_k^{(i)}} \psi_m^{(i)} \Gamma_{53}^{(k)} \tau_2^{(k)(j)} ds + \int_{S_k^{(i)}} \psi_m^{(i)} \Gamma_{54}^{(k)} u_2^{(j)} ds = 0, \\ \int_{S_k^{(i)}} \psi_m^{(i)} \Gamma_{61}^{(k)} \tau_3^{(k)(i)} ds + \int_{S_k^{(i)}} \psi_m^{(i)} \Gamma_{62}^{(k)} u_3^{(i)} ds + \int_{S_k^{(i)}} \psi_m^{(i)} \Gamma_{63}^{(k)} \tau_3^{(k)(j)} ds + \int_{S_k^{(i)}} \psi_m^{(i)} \Gamma_{64}^{(k)} u_3^{(j)} ds = 0. \end{cases} \quad (13)$$

因此就能得到了整个 DDM-SEM 系统的弱形式, 包括弱形式方程(10)以及 18 个辅助方程. 需要注意的是: 为了平衡矩阵的迹(亦即统一化量纲), 本文将 $\tau_s^{(i)(j)}$ 用 $r_0 \tau_s^{(i)(j)}$ 进行替换(例如这里设置尺度因子 $r_0=10^9$), 另外 18 个辅助的弱形式方程(13)需要分别乘上该因子 $f_0=\max(\rho)L$. 这里 $\tau_s^{(i)(j)}$ 是归一化后的法向应力, L 是问题模型的尺度大小. 量纲归一化起到改善系统矩阵的条件数的作用. 通过量纲归一化, 在作者前期数值计算的一个例子中, 矩阵条件数降低了 9 个数量级. 接下来, 将对 DDM-SEM 的弱形式进行离散.

$$\begin{aligned} I_x^{(i)} &= \sum_{k=1}^6 \left(\int_{S_k^{(i)}} \phi_m^{(i)} \Gamma_{11}^{(k)} \tau_1^{(k)(i)} ds + \int_{S_k^{(i)}} \phi_m^{(i)} \Gamma_{12}^{(k)} u_1^{(i)} ds \right. \\ &\quad \left. + \int_{S_k^{(j)}} \phi_m^{(i)} \Gamma_{13}^{(k)} \tau_1^{(k)(j)} ds + \int_{S_k^{(j)}} \phi_m^{(i)} \Gamma_{14}^{(k)} u_1^{(j)} ds \right). \end{aligned} \quad (12)$$

其他面积分项 $I_y^{(i)}$ 和 $I_z^{(i)}$ 具有类似形式, 本文不再表述. 面积分项在 DDM-SEM 方法中起到非常重要的作用, 它建立了区域分解技术中不同子区域间物理场的联系. 在弱形式中, 通常假定第 i 子区域为当前子区域, 与之相邻的区域假设为 j 子区域, 其各自的法向在两个相邻子区域的分界面上互为反向. 像上述讨论一样, 本文使用 $\tau_s^{(k)(i)}$ ($s=1, 2, 3; k=1, 2, 4, 5, 6$) 表示 6 种不同类型的法向应力分量, 并且需要单独定义这些分量. 对于子区域的每个分界面, 需建立独立于全局自由度系统的自由度编号. 对于弱形式方程(10), 在体积 Ω_i 上, 有 3 个位移场的自由度, 在分界面边界上, 有 18 个法向应力场的自由度 $\tau_s^{(k)(i)}$, 共有 21 个场变量. 由于未知量个数大于方程个数, 只用这 3 个弱形式方程求解整个系统是不够的. 为了得到方阵系统的谱元离散方程组, 还需对黎曼传输条件方程(8d)~(8f)进行测试, 即对当前子区域 i 的 6 个分界面上进行测试. 由此得到如下另外 18 个辅助的弱形式方程:

2.2 基函数和弱形式离散

本节将推导 DDM-SEM 系统的弱形式离散. 由于在 DDM-SEM 系统中每个区域的网格尺寸都是独立的, 因此每个子区域都有自己的网格参数. 这样在不同子区域的分界面上网格可以是匹配, 也可以是不匹配. 然而, 在系统离散之前, 还需要先将内部和边界点进行分离, 最终的系统就可以通过直接法求解器进行高效计算. 那么, 将位移场量 u_l ($l=1, 2, 3$) 的分量使用 GLL 基函数进行展开, 得:

$$u_l^{(i)} = \sum_{k=1}^{N_l^{(i)}} u_{lk,l}^{(i)} \phi_{l,k}^{(i)} + \sum_{k=1}^{N_l^{(s)}} u_{lk,s}^{(i)} \phi_{s,k}^{(i)}, \quad (l = 1, 2, 3), \quad (14)$$

其中 $\phi_{l,k}^{(i)}$ 为内部GLL节点基函数, $\phi_{s,k}^{(i)}$ 为边界节点基函数, $N_l^{(i)}$ 和 $N_l^{(s)}$ 分别为区域 i 中内部和边界节点基函数的总数, $u_{lk,l}^{(i)}$ 和 $u_{lk,s}^{(i)}$ 表示内部和边界的位移场. 以上变量中角标 l 和 s 表示区域的内部和边界. 接下来将对子区域分界面上的自由度进行展开, 与位移场类似有

$$\tau_s^{(t)(i)} = \sum_{k=1}^{L_i^{(t)}} \tau_{s,k}^{(t)(i)} \psi_k^{(t)(i)}, \quad (15)$$

这里 $s=(1, 2, 3)$, $t=(1, 2, 3, 4, 5, 6)$, $\psi_k^{(t)(i)}$ 为节点GLL基函数, $L_i^{(t)}$ 是 i 子区域在第 t 个分界面上的基函数总数. 将方程(14)和(15)带入弱形式(10)以及辅助方程(13), 得到DDM-SEM的离散系统, 具有形式如下:

$$\begin{pmatrix} A^{(i)} & B^{(i)} \\ C^{(i)} & D^{(i)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_l^{(i)} \\ u_s^{(i)} \end{pmatrix} + \sum_{j \neq i} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & E^{(i,j)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_l^{(j)} \\ u_s^{(j)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_l^{(i)} \\ F_s^{(i)} \end{pmatrix}, \quad (16)$$

上式中, N_d 为总的子区域数量, $u_l^{(i)} = (u_{1,l}^{(i)}, u_{2,l}^{(i)}, u_{3,l}^{(i)})^T$ 表示第 i 子区域的内部位移场量, 为一个 $3N_l^{(i)} \times 1$ 规模的向量, $u_s^{(i)} = (u_{1,s}^{(i)}, u_{2,s}^{(i)}, u_{3,s}^{(i)}, \tau_1^{(1)(i)}, \tau_2^{(1)(i)}, \dots, \tau_2^{(6)(i)}, \tau_3^{(6)(i)})$ 表示边界未知量, 它的尺寸为 $(3N_s^{(i)} + 3(L_i^{(1)} + \dots + L_i^{(6)})) \times 1$, $u_l^{(j)}$ 和 $u_s^{(j)}$ 是第 j 子区域对应的位移场的内部和边界未知量. $F_l^{(i)}$ 和 $F_s^{(i)}$ 表示子区域 i 上的内部和边界上激励源的贡献. 矩阵 $A^{(i)}$, $B^{(i)}$, $C^{(i)}$ 和 $D^{(i)}$ 的元素为 i 子区域上弱形式的体积分和面积分项, 而矩阵 $E^{(i,j)}$ (又称为链接矩阵)为 i 子区域和 j 子区域间分界面的面积分项. 以上矩阵都在谱元法的框架下计算得到. 注意线性方程(16)中的链接矩阵仅有 $E^{(i,j)}$ 矩阵为非零, 这也是DDM-

SEM的一个重要特性. 如此以来, 能实现DDM的快速直接求解, 这部分内容将在2.3部分详细论述. 下面将给出离散后系统中的一些矩阵的表达式. $A^{(i)}$, $B^{(i)}$ 和 $C^{(i)}$ 的形式如下:

$$A^{(i)} = \begin{pmatrix} M_{1,ll}^{(i)} + K_{11,ll}^{(i)} & K_{12,ll}^{(i)} & K_{13,ll}^{(i)} \\ K_{21,ll}^{(i)} & M_{2,ll}^{(i)} + K_{22,ll}^{(i)} & K_{23,ll}^{(i)} \\ K_{31,ll}^{(i)} & K_{32,ll}^{(i)} & M_{3,ll}^{(i)} + K_{33,ll}^{(i)} \end{pmatrix}, \quad (17a)$$

$$B^{(i)} = \begin{pmatrix} M_{1,ls}^{(i)} + K_{11,ls}^{(i)} & K_{12,ls}^{(i)} & K_{13,ls}^{(i)} & 0 \\ K_{21,ls}^{(i)} & M_{2,ls}^{(i)} + K_{22,ls}^{(i)} & K_{23,ls}^{(i)} & 0 \\ K_{31,ls}^{(i)} & K_{32,ls}^{(i)} & M_{3,ls}^{(i)} + K_{33,ls}^{(i)} & 0 \end{pmatrix}, \quad (17b)$$

$$C^{(i)} = \begin{pmatrix} M_{1,sl}^{(i)} + K_{11,sl}^{(i)} & K_{12,sl}^{(i)} & K_{13,sl}^{(i)} \\ K_{21,sl}^{(i)} & M_{2,sl}^{(i)} + K_{22,sl}^{(i)} & K_{23,sl}^{(i)} \\ K_{31,sl}^{(i)} & K_{32,sl}^{(i)} & M_{3,sl}^{(i)} + K_{33,sl}^{(i)} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (17c)$$

需要注意, 上面的 $B^{(i)}$ 和 $C^{(i)}$ 是 4×4 的块矩阵, 而 $D^{(i)}$ 和 $E^{(i,j)}$ 具有更复杂的形式:

$$D^{(i)} = \begin{pmatrix} P^{(i,i)} & r_0 E_1^{(i,i)} & r_0 E_2^{(i,i)} & r_0 E_3^{(i,i)} \\ f_0 T_1^{(i,i)} & r_0 f_0 N_1^{(i,i)} & 0 & 0 \\ f_0 T_2^{(i,i)} & 0 & r_0 f_0 N_2^{(i,i)} & 0 \\ f_0 T_3^{(i,i)} & 0 & 0 & r_0 f_0 N_3^{(i,i)} \end{pmatrix}, \quad (18a)$$

$$E^{(i,j)} = \begin{pmatrix} P^{(i,j)} & r_0 E_1^{(i,j)} & r_0 E_2^{(i,j)} & r_0 E_3^{(i,j)} \\ f_0 T_1^{(i,j)} & r_0 f_0 N_1^{(i,j)} & 0 & 0 \\ f_0 T_2^{(i,j)} & 0 & r_0 f_0 N_2^{(i,j)} & 0 \\ f_0 T_3^{(i,j)} & 0 & 0 & r_0 f_0 N_3^{(i,j)} \end{pmatrix}. \quad (18b)$$

上式一些子矩阵块的表达式如下:

$$P^{(i,i)} = \begin{pmatrix} M_{1,ss}^{(i)} + K_{11,ss}^{(i)} - \sum_{m=1}^6 P_{1m,ss}^{(i,i)} & K_{12,ss}^{(i)} & K_{13,ss}^{(i)} \\ K_{21,ss}^{(i)} & M_{2,ss}^{(i)} + K_{22,ss}^{(i)} - \sum_{m=1}^6 P_{2m,ss}^{(i,i)} & K_{23,ss}^{(i)} \\ K_{31,ss}^{(i)} & K_{32,ss}^{(i)} & M_{3,ss}^{(i)} + K_{33,ss}^{(i)} - \sum_{m=1}^6 P_{3m,ss}^{(i,i)} \end{pmatrix}, \quad (19a)$$

$$P^{(i,j)} = \begin{pmatrix} \sum_{m=1}^6 P_{1m,ss}^{(i,j)} & 0 & 0 \\ 0 & \sum_{m=1}^6 P_{2m,ss}^{(i,j)} & 0 \\ 0 & 0 & \sum_{m=1}^6 P_{3m,ss}^{(i,j)} \end{pmatrix}, (i \neq j). \quad (19b)$$

E系统的矩阵如下:

$$\chi_m^{(p,q)} = -(E_{m1,SS_1}^{(p,q)}, E_{m2,SS_2}^{(p,q)}, E_{m3,SS_3}^{(p,q)}, E_{m4,SS_4}^{(p,q)}, E_{m5,SS_5}^{(p,q)}, E_{m6,SS_6}^{(p,q)})^T, \quad (m = 1, 2, 3), \quad (20a)$$

$$E_1^{(i,i)} = (\chi_1^{(i,i)} \ 0 \ 0)^T, \ E_2^{(i,i)} = (0 \ \chi_2^{(i,i)} \ 0)^T, \ E_3^{(i,i)} = (0 \ 0 \ \chi_3^{(i,i)})^T, \quad (20b)$$

$$E_1^{(i,j)} = (\chi_1^{(i,j)} \ 0 \ 0)^T, \ E_2^{(i,j)} = (0 \ \chi_2^{(i,j)} \ 0)^T, \ E_3^{(i,j)} = (0 \ 0 \ \chi_3^{(i,j)})^T, \ (i \neq j). \quad (20c)$$

T系列的矩阵如下:

$$\sigma_m^{(p,q)} = -(T_{m1,SS_1}^{(p,q)}, T_{m2,SS_2}^{(p,q)}, T_{m3,SS_3}^{(p,q)}, T_{m4,SS_4}^{(p,q)}, T_{m5,SS_5}^{(p,q)}, T_{m6,SS_6}^{(p,q)})^T, \quad (21a)$$

$$T_1^{(i,i)} = (\sigma_1^{(i,i)} \ 0 \ 0)^T, \ T_2^{(i,i)} = (0 \ \sigma_2^{(i,i)} \ 0)^T, \ T_3^{(i,i)} = (0 \ 0 \ \sigma_3^{(i,i)})^T, \quad (21b)$$

$$T_1^{(i,j)} = (\sigma_1^{(i,j)} \ 0 \ 0)^T, \ T_2^{(i,j)} = (0 \ \sigma_2^{(i,j)} \ 0)^T, \ T_3^{(i,j)} = (0 \ 0 \ \sigma_3^{(i,j)})^T, \ (i \neq j). \quad (21c)$$

N系列的矩阵如下:

$$N_m^{(i,i)} = \text{diag}(N_{m1}^{(i,i)}, N_{m2}^{(i,i)}, N_{m3}^{(i,i)}, N_{m4}^{(i,i)}, N_{m5}^{(i,i)}, N_{m6}^{(i,i)}), \quad (m = 1, 2, 3), \quad (22a)$$

$$N_m^{(i,j)} = \begin{pmatrix} 0 & N_{m1}^{(i,j)} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ N_{m2}^{(i,j)} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & N_{m3}^{(i,j)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & N_{m4}^{(i,j)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_{m5}^{(i,j)} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & N_{m6}^{(i,j)} & 0 \end{pmatrix}, (i \neq j), \quad (22b)$$

其中 $N_m^{(i,i)}$ 为块对角矩阵, 矩阵大小为 $(L_i^{(1)} + \dots + L_i^{(6)}) \times (L_i^{(1)} + \dots + L_i^{(6)})$.

上述矩阵中的系数为

$$\begin{aligned} (M_{r,II})_{kl} &= -\rho\omega^2 \int_{\Omega_i} \phi_{I,k}^{(i)} \phi_{I,l}^{(i)}, \ (M_{r,IS})_{kl} = -\rho\omega^2 \int_{\Omega_i} \phi_{I,k}^{(i)} \phi_{S,l}^{(i)}, \ (M_{r,SI})_{kl} = -\rho\omega^2 \int_{\Omega_i} \phi_{S,k}^{(i)} \phi_{I,l}^{(i)}, \\ (M_{r,SS})_{kl} &= -\rho\omega^2 \int_{\Omega_i} \phi_{S,k}^{(i)} \phi_{S,l}^{(i)}, \ (K_{rq,II})_{kl} = \int_{\Omega_i} \nabla \phi_{I,k}^{(i)} \cdot (C_{rq}^{(i)} \nabla \phi_{I,l}^{(i)}) \text{d}v, \ (K_{rq,IS})_{kl} = \int_{\Omega_i} \nabla \phi_{I,k}^{(i)} \cdot (C_{rq}^{(i)} \nabla \phi_{S,l}^{(i)}) \text{d}v, \\ (K_{rq,SI})_{kl} &= \int_{\Omega_i} \nabla \phi_{S,k}^{(i)} \cdot (C_{rq}^{(i)} \nabla \phi_{I,l}^{(i)}) \text{d}v, \ (K_{rq,SS})_{kl} = \int_{\Omega_i} \nabla \phi_{S,k}^{(i)} \cdot (C_{rq}^{(i)} \nabla \phi_{S,l}^{(i)}) \text{d}v, \ (E_{rq,SS_q})_{kl} = \int_{S_q} \phi_{S,k}^{(i)} \cdot \Gamma_{r,1}^{(q)} \psi_l^{(i)(q)} \text{d}s, \\ (P_{rq,SI})_{kl} &= \int_{S_q} \phi_{S,k}^{(i)} \cdot \Gamma_{r,2}^{(q)} \phi_{S,l}^{(i)} \text{d}s, \ (N_{rq}^{(i,i)})_{kl} = \int_{S_q} \psi_k^{(i)(q)} \cdot \Gamma_{(r+3),1}^{(q)} \psi_l^{(i)(q)} \text{d}s, \ (T_{rq,SS_q}^{(i,i)})_{kl} = \int_{S_q} \psi_k^{(i)(q)} \cdot \Gamma_{(r+3),2}^{(q)} \phi_{S,l}^{(i)} \text{d}s, \\ (P_{rq,SS})_{kl} &= \int_{S_q} \phi_{S,k}^{(i)} \cdot \Gamma_{r,4}^{(q)} \phi_{S,l}^{(i)} \text{d}s, \ (T_{rq,SS_q}^{(i,j)})_{kl} = \int_{S_q} \psi_k^{(i)(q)} \cdot \Gamma_{(r+3),4}^{(q)} \phi_{S,l}^{(j)} \text{d}s, \ (E_{r1,SS_2})_{kl} = \int_{S_1} \phi_{S,k}^{(i)} \cdot \Gamma_{r,3}^{(1)} \psi_l^{(2)(j)} \text{d}s, \\ (E_{r2,SS_1})_{kl} &= \int_{S_2} \phi_{S,k}^{(i)} \cdot \Gamma_{r,3}^{(2)} \psi_l^{(1)(j)} \text{d}s, \ (E_{r3,SS_4})_{kl} = \int_{S_3} \phi_{S,k}^{(i)} \cdot \Gamma_{r,3}^{(3)} \psi_l^{(4)(j)} \text{d}s, \ (E_{r4,SS_3})_{kl} = \int_{S_4} \phi_{S,k}^{(i)} \cdot \Gamma_{r,3}^{(4)} \psi_l^{(3)(j)} \text{d}s, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (E_{r5,SS_6}^{(i,j)})_{kl} &= \int_{S_5} \phi_{S,k}^{(i)} \cdot \Gamma_{r,3}^{(5)} \psi_l^{(6)(j)} ds, \quad (E_{r6,SS_5}^{(i,j)})_{kl} = \int_{S_6} \phi_{S,k}^{(i)} \cdot \Gamma_{r,3}^{(6)} \psi_l^{(5)(j)} ds, \quad (N_{r1}^{(i,j)})_{kl} = \int_{S_1} \psi_k^{(1)(i)} \cdot \Gamma_{(r+3),3}^{(1)} \psi_l^{(2)(j)} ds, \\
 (N_{r2}^{(i,j)})_{kl} &= \int_{S_2} \psi_k^{(2)(i)} \cdot \Gamma_{(r+3),3}^{(2)} \psi_l^{(1)(j)} ds, \quad (N_{r3}^{(i,j)})_{kl} = \int_{S_3} \psi_k^{(3)(i)} \cdot \Gamma_{(r+3),3}^{(3)} \psi_l^{(4)(j)} ds, \quad (N_{r4}^{(i,j)})_{kl} = \int_{S_4} \psi_k^{(4)(i)} \cdot \Gamma_{(r+3),3}^{(4)} \psi_l^{(3)(j)} ds, \\
 (N_{r5}^{(i,j)})_{kl} &= \int_{S_5} \psi_k^{(5)(i)} \cdot \Gamma_{(r+3),3}^{(5)} \psi_l^{(6)(j)} ds, \quad (N_{r6}^{(i,j)})_{kl} = \int_{S_6} \psi_k^{(6)(i)} \cdot \Gamma_{(r+3),3}^{(6)} \psi_l^{(5)(j)} ds.
 \end{aligned} \quad (23)$$

上式矩阵都需要在六面体单元上进行计算, 通过将物理空间中的六面体单元映射到参考单元 $[-1, 1]^3$, GLL基函数被用来在参考单元上展开未知场量. 因为GLL基函数被用作光滑函数插值, 所以谱元法的误差具有指数收敛的特性(Van de Vosse 和Vosse, 1996).

本文所提出的区域分解方法建立在间断伽辽金原理的基础上, 它可以处理一般形式的网格, 即包含非匹配网格. 一般而言, 两个相邻子区域的公共区域可以构成任意多边形. 为了简单起见, 假定该非匹配的分界面为一个平面. 如图1所示, 重叠区域六边形 P 被分割为若干小三角形 P_i , 也就是说 P 个顶点将被分割为 P 个小三角形. 对于每个非重叠的子三角形, 可以使用高斯积分来计算三角形的面积分. 最后将分界面上的通量带来的各个小三角形上的面积分进行求和(Dunavant, 1985). 值得注意的是, 经过上述处理, 可以实现不同子区域上使用不同的谱元阶数, 从而实现效率的最大化.

2.3 分块LDU直接求解器

上文线性系统的求解可以使用直接求解器或迭代求解器. 相对于迭代方法, 直接求解器在计算精度上具有比较明显的优势, 同时在频域多源求解问题上的高效性也表现得更加显著. 在本文的研究中, 将发展一种基于分块LDU分解法的高并行区域分解DDM-SEM系统的直接求解器. 通过分离边界和内部自由度, 再将所有的子系统合并为一个大的系统, 得到方程(16)的格式(这里假定4个子区域的情形)

$$\begin{pmatrix} A^{(1)} & 0 & 0 & 0 & B^{(1)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A^{(2)} & 0 & 0 & 0 & B^{(2)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A^{(3)} & 0 & 0 & 0 & B^{(3)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & A^{(4)} & 0 & 0 & 0 & B^{(4)} \\ C^{(1)} & 0 & 0 & 0 & D^{(1)} & E^{(1,2)} & E^{(1,3)} & E^{(1,4)} \\ 0 & C^{(2)} & 0 & 0 & E^{(2,1)} & D^{(2)} & E^{(2,3)} & E^{(2,4)} \\ 0 & 0 & C^{(3)} & 0 & E^{(3,1)} & E^{(3,2)} & D^{(3)} & E^{(3,4)} \\ 0 & 0 & 0 & C^{(4)} & E^{(4,1)} & E^{(4,2)} & E^{(4,3)} & D^{(4)} \end{pmatrix} u = f. \quad (24)$$

图1 一般形式网格的处理

通过分离内部和边界自由度, 边界自由度的贡献被转移至整个系统矩阵的右下角, 将得到一个相对稠密的矩阵, 因此直接计算相对耗时. 但同时边界自由度在全局自由度中的比重较小, 该稠密矩阵的规模也相对较小. 通常, 边界积分涉及外边界条件(例如自由边界条件、固定约束边界、PML边界等)的部分为0, 因此本文中边界积分就仅为子区域间的面积分. 这样只需要考虑分界面上的自由度的处理. 图2中, 本文展示了4个DDM-SEM区域系统矩阵的稀疏性. 本文所提出DDM-SEM方法是建立于LDU分解之上的直接求解法, 将原始系统转换为3步的LDU矩阵求解, 从而降低了计算复杂度. 经过LDU分解, 方程(24)可以写成如下形式:

$$\mathbf{LDU}u = f, \quad (25)$$

其中 $u = [u_I^{(1)}, u_I^{(2)}, u_I^{(3)}, u_I^{(4)}, u_S^{(1)}, u_S^{(2)}, u_S^{(3)}, u_S^{(4)}]^T$,

$f = [F_I^{(1)}, F_I^{(2)}, F_I^{(3)}, F_I^{(4)}, F_S^{(1)}, F_S^{(2)}, F_S^{(3)}, F_S^{(4)}]^T$ 以及 $\mathbf{L}$, $\mathbf{D}$ 和 $\mathbf{U}$ 三个矩阵分别有如下形式:

$$\mathbf{L} = \begin{pmatrix} I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I & 0 & 0 & 0 & 0 \\ c^{(1)} & 0 & 0 & 0 & I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c^{(2)} & 0 & 0 & 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c^{(3)} & 0 & 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c^{(4)} & 0 & 0 & 0 & I \end{pmatrix}, \quad (26a)$$

图 2 四个子区域的DDM-SEM 系统矩阵的稀疏性

(a) 不分离内部和边界未知量; (b) 分离内部和边界未知量; (c) 分离内部和边界未知量, 且将分界面未知量移到矩阵右下角. nz 为矩阵中非零元素的个数

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} I & 0 & 0 & 0 & b^{(1)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 & 0 & 0 & b^{(2)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 & 0 & 0 & b^{(3)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I & 0 & 0 & 0 & b^{(4)} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I \end{pmatrix}, \quad (26b)$$

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} a^{(1)} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a^{(2)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a^{(3)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a^{(4)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & E^* \end{pmatrix}, \quad (26c)$$

$$E^* = \begin{pmatrix} d^{(1)} & e^{(1,2)} & e^{(1,3)} & e^{(1,4)} \\ e^{(2,1)} & d^{(2)} & e^{(2,3)} & e^{(2,4)} \\ e^{(3,1)} & e^{(3,2)} & d^{(3)} & e^{(3,4)} \\ e^{(4,1)} & e^{(4,2)} & e^{(4,3)} & d^{(4)} \end{pmatrix}, \quad (26d)$$

矩阵中的系数 $a^{(i)}$, $b^{(i)}$, $c^{(i)}$, $d^{(i)}$ 和 $e^{(i,j)}$ ($i=1, 2, \dots, N_d$) 可以按如下公式计算:

$$\begin{cases} a^{(i)} = A^{(i)}, \\ b^{(i)} = [A^{(i)}]^{-1} B^{(i)}, \\ c^{(i)} = c^{(i)} [A^{(i)}]^{-1}, \\ d^{(i)} = D^{(i)} - c^{(i)} [A^{(i)}]^{-1} B^{(i)}, \\ e^{(i,j)} = E^{(i,j)}. \end{cases} \quad (27)$$

以上矩阵都为LDU里的子矩阵. 除矩阵 E 外, 各个子区域矩阵都是独立的, 不需要其他子区域的信息.

因此, LDU分解过程具有子区域级别的天然并行的特性, 从而可节省CPU计算时间. 为了求解方程(25), 有如下三个基本步骤:

(1) 求解方程 $\mathbf{L}z=f$

因为 $\mathbf{L}$ 是一个块下三角矩阵, 有如下方程:

$$\begin{pmatrix} I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I & 0 & 0 & 0 & 0 \\ c^{(1)} & 0 & 0 & 0 & I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c^{(2)} & 0 & 0 & 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c^{(3)} & 0 & 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c^{(4)} & 0 & 0 & 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_I^{(1)} \\ z_I^{(2)} \\ z_I^{(3)} \\ z_I^{(4)} \\ z_S^{(1)} \\ z_S^{(2)} \\ z_S^{(3)} \\ z_S^{(4)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_I^{(1)} \\ F_I^{(2)} \\ F_I^{(3)} \\ F_I^{(4)} \\ F_S^{(1)} \\ F_S^{(2)} \\ F_S^{(3)} \\ F_S^{(4)} \end{pmatrix}. \quad (28)$$

即 z 矩阵的解为

$$\begin{cases} z_I^{(i)} = F_I^{(i)} \\ z_S^{(i)} = F_S^{(i)} - c^{(i)} F_I^{(i)} \end{cases} \quad (i=1, 2, \dots, N_d; N_d=4), \quad (29)$$

其中, $z_I^{(i)}$ 和 $z_S^{(i)}$ 分别对应子区域 i 中内部和边界节点自由度. 对于每个子区域, 这些求解都是独立和可并行的.

(2) 求解方程 $\mathbf{D}y=z$

矩阵 $\mathbf{D}$ 是一个块对角矩阵, 这个系统矩阵可以分

解为两个子系统, 即:

$$\begin{pmatrix} a^{(1)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a^{(2)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a^{(3)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a^{(4)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_I^{(1)} \\ y_I^{(2)} \\ y_I^{(3)} \\ y_I^{(4)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_I^{(1)} \\ z_I^{(2)} \\ z_I^{(3)} \\ z_I^{(4)} \end{pmatrix}, \quad (30)$$

$$\begin{pmatrix} d^{(1)} & e^{(1,2)} & e^{(1,3)} & e^{(1,4)} \\ e^{(2,1)} & d^{(2)} & e^{(2,2)} & e^{(2,3)} \\ e^{(3,1)} & e^{(3,2)} & d^{(3)} & e^{(3,4)} \\ e^{(4,1)} & e^{(4,2)} & e^{(4,3)} & d^{(4)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_S^{(1)} \\ y_S^{(2)} \\ y_S^{(3)} \\ y_S^{(4)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_S^{(1)} \\ z_S^{(2)} \\ z_S^{(3)} \\ z_S^{(4)} \end{pmatrix}. \quad (31)$$

从方程(30)得到每个子区域的内部自由度的解为由于每个子区域的自由度是独立的, 因而可以实现子区域级的并行计算. 此外, 方程(31)仅涉及到边界自由度的计算, 因此矩阵维数相对较小, 这里采用直接求解器计算. 值得注意的是, 当只在一个方向上进行区域分解时, 矩阵 E^* 为一个块三对角问题, 采用Block-Thomas算法能加速求解方程(31) (Chen等, 2011).

(3) 求解方程 $Uu=y$

在最后一步中, U 也是一个块上三角矩阵, 系统的形式为

$$\begin{pmatrix} I & 0 & 0 & 0 & b^{(1)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 & 0 & 0 & b^{(2)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 & 0 & 0 & b^{(3)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I & 0 & 0 & 0 & b^{(4)} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_I^{(1)} \\ u_I^{(2)} \\ u_I^{(3)} \\ u_I^{(4)} \\ u_S^{(1)} \\ u_S^{(2)} \\ u_S^{(3)} \\ u_S^{(4)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_I^{(1)} \\ y_I^{(2)} \\ y_I^{(3)} \\ y_I^{(4)} \\ y_S^{(1)} \\ y_S^{(2)} \\ y_S^{(3)} \\ y_S^{(4)} \end{pmatrix}. \quad (32)$$

与 L 矩阵类型相似, u 矩阵可得:

$$\begin{cases} u_S^{(i)} = y_S^{(i)} \\ u_I^{(i)} = y_I^{(i)} - b^{(i)} u_S^{(i)} \end{cases} \quad (i = 1, 2, \dots, N_d; N_d = 4). \quad (33)$$

该过程也可以引入并行计算.

通过上述的讨论, 本文所出的DDM-SEM系统在LDU求解器下具有高度并行性. 在求解过程中, 需要对每个子区域中的矩阵 $A^{(i)}$ 和分界面的矩阵 E^* 进行求逆计算. $A^{(i)}$ 为稀疏型矩阵, 而 E^* 是稠密矩阵, 但 E^* 具有较小的尺寸(仅涉及到子区域分界面上的自由度贡献),

它仍旧是计算资源消耗的核心所在, 尤其是对计算机内存的需求. 因此, 为了改进所提出的DDM-SEM的计算效率, 对原始区域的合划分也是着重考虑的因素.

3 数值算例

对于一个大尺度模型, 直接对矩阵求逆往往比较困难. 利用区域分解技术, 可以将整个大尺度系统分解为若干小尺度问题来进行求解. 本文发展的DDM-SEM方法是用于高精度和高效率求解频域弹性波问题的区域分解技术. 本节首先通过一个简单的例子来展示DDM-SEM方法的快速收敛性以及求解弹性问题的高精度性; 接着, 第二个例子将比较不同区域划分情况下DDM-SEM的计算效率; 第三个例子将展示DDM-SEM技术在非匹配网格模型中的计算精度和效率; 最后DDM-SEM来仿真一个复杂的地质模型. 以上所有的算例都在2个Intel Xeon X5690处理器、512GB内存、主频3.47GHz的服务器中计算.

3.1 收敛性验证

本文先通过一个200m×200m×200m的均匀各向同性固体模型来验证DDM-SEM算法的高精度性以及快速收敛性. 在DDM方法中, 物理模型离散为8×8×8个六面体单元, 且沿着 $x=0$ (Y - Z 平面)、 $y=0$ (X - Z 平面)和 $z=0$ (X - Y 平面)方向分解为8个子区域, 其中固体的介质参数为 $v_p=2540 \text{ m s}^{-1}$, $v_s=1466.4 \text{ m s}^{-1}$ 和 $\rho=3350 \text{ kg m}^{-3}$, z 方向的点力源位于空间(0, 0, -5m)处且频率为20Hz, 模型的边界条件为自由边界. 利用方程(34)来计算DDM-SEM数值解的收敛阶, 其中 u^N 和 u_{ref} 分别为 N 阶插值函数下的DDM-SEM的数值解和参考解.

$$\text{收敛阶} = \ln \frac{\|u^N - u_{ref}\|_2}{\|u^{N+1} - u_{ref}\|_2}. \quad (34)$$

由于DDM-SEM技术需要利用交界面上的应力场, 但应力场只是黎曼传输条件中的辅助变量. 因此, 本文不对应力场进行数值分析. 对该模型选取 N 阶插值函数, 接收器阵列沿着 z 方向, 且起始和终点坐标分别为(50m, 60m, -100m)和(50m, 60m, 100m). 利用7阶插值函数且在单个区域下的SEM数值解作为参考解, 其中自由度为555579. 图3为不同的插值阶数 N 与DDM-SEM数值的收敛情况. 通过比较不同阶数的位移场,

图3 不同阶($N=2, 3, 4$)基函数下DDM-SEM解在观察点上的收敛性曲线图

$N=7$ 是参考解, 为单区域7阶基函数下SEM的解

可得到DDM-SEM数值解的正确性, 且在4阶138720自由度下的精度高达99%。由于DDM-SEM继承了SEM的指数收敛性, 即数值误差随阶数增加而指数下降, 该数值解在对数坐标系下的收敛阶为2.5, 如图4所示。因此 DDM-SEM 也能表现出较快的收敛速度。区域分解技术是将一个完整的系统划分为多个独立的子区域, 所以 DDM-SEM 技术能高精度和高效率地仿真大尺度弹性波问题。

接着, 利用以上模型来测试不同频率下DDM-SEM系统矩阵的条件数。图5为0.0002~20Hz范围内矩阵 A 和 E^* 条件数变化曲线。从图中可以观察到, 矩阵 A 的条件数与频率无关(矩阵 A 的条件数为所有子区域下的平均值), 基本维持在 10^4 。矩阵 E^* 在一定频率范围内的条件数维持为 8.7×10^7 , 比矩阵 A 的条件数大3个数量级。然而, 当随着频率进一步减小, E^* 条件数将迅速增长。综上所述, DDM-SEM在很大频率范围内具有较稳定的矩阵系统。

3.2 DDM并行效率分析

为了分析DDM-SEM方法的计算性能和效率, 本文将采用一个均匀的黏弹性固体模型来进行验证, 并采用解析解来作为参考解。物理模型为 $960\text{m} \times 960\text{m} \times 960\text{m}$ 的立方体, z 方向的点力源在 $(50\text{m}, 50\text{m}, 50\text{m})$, 激励源的频率为20Hz。在1Hz参考频率下的P波、S波和密度参数分别为 2540m s^{-1} , 1466.4m s^{-1} 和 3350kg m^{-3} , 以及P波和S波的品质因数分别为30和20。整个计算区域被离散为 $24 \times 24 \times 24$ 六面体单元, 每

图4 DDM-SEM在均匀模型下的收敛误差图

计算相对误差选取位置从 $(50\text{m}, 60\text{m}, -100\text{m})$ 到 $(50\text{m}, 60\text{m}, 100\text{m})$

个方向最外两个单元为完美匹配层(Chew和Liu, 1996; Liu和Tao, 1997; Zhuang等, 2020), 整个模型在4阶插值基函数下的空间采样率(PPW)为7.5。图6为沿着三个正交平面切分8个子区域的仿真结果, 图中DDM-SEM得到的位移场和解析解基本一致, 相对误差仅为0.27%。由此可见, DDM-SEM也能用于黏弹性介质模型的精确仿真。

由于DDM-SEM技术是基于分块 LDU求解器, 所有子矩阵内部自由度地计算都是独立的, 与其他子区域无关, 因此每个子区域可以在不同处理器中计算,

图5 矩阵 A 和 E^* 在DDM-SEM系统中随频率变化条件数曲线

即实现并行计算. 然而, 子区域地划分形式多样, 但负载均衡的网格划分能极大提高计算效率. 本算例将对网格进行水平或正交方式划分, 保证每个子区域有相同的计算量.

表1统计了该模型在不同子区域划分下DDM-SEM的计算效率. 第一, 对类型1~4, 计算区域沿着 x 方

向被划分为1、2、3和4个子区域, 其中1个子区域情况将退化为传统的SEM方法. 由于交界面存在应力场, 因此边界自由度也将随着交界面数量增加而增加, 但子区域内部的自由度减少的更多, 即在1、2、3和4个子区域中的自由度约为2.7、1.35、0.89和0.66M, 采用直接法来计算每个子区域将会消耗更少的计算资源. 更重要的是, 由于每个子区域内部自由度的计算相互独立, 将其分配到集群的计算节点中, 减少矩阵求解时间, 实现并行计算; 第二, 比较类型4和类型5, 使用4个计算节点的加速比为2.5, 而类型5和类型1在单节点时的计算效率基本一致, 但类型5需要的内存资源显著减少; 第三, 类型4将计算区域沿 x 方向划分4个子区域, 类型6采用正交平面划分8个子区域, 比较可知: 由于正交划分有更少的内部自由度, 将表现为更高的计算效率; 第四, 类型7为沿 x 方向划分8个子区域模型, 由于边界矩阵 E^* 变得稠密, 使得计算效率显著降低.

3.3 非匹配网格模型

DDM-SEM技术除了可并行计算外, 还具备非匹

图6 黏弹性模型在4阶基函数下DDM-SEM解和参考解的波形曲线比较
观测线从(150m, 200m, -400m)到(150m, 200m, 400m)

配网格处理的灵活性. 对于大尺度复杂模型, 非匹配网格可以减小模型的自由度以及提高计算效率. 本小节将仿真一个材料高对比度Mygdonia盆地模型 (http://www.sismowine.org/model/E2VP_Can2.pdf), 其中模型大小为640m×400m×500m. 表2给出了模型的详细参数, 分别有: 每层模型的厚度, 材料的密度, P波和S波参数以及对于的品质因素. 一个z方向点力源设置在(320m, 200m, 0), 激励源的频率为13Hz, 黏弹性材料的参考频率为1Hz. 由于前三层的传播速度小于底层的速度, 那么在非匹配网格下, 采用密网格来离散低速区域和粗网格离散高速区域则更为合理, 如图7a所示. 然而, 如果采用匹配网格, 需要对高速层的网格进行加密, 以确保高速层和低速层交界面网格的匹配, 这不仅增大六面体网格的生产难度, 而且也会显著增加系统的自由度, 如图7b所示.

图8展示了DDM-SEM采用4阶基函数和粗网格在

混合阶基函数(从上到下的阶数分别为5、5、4、4)下位移场的比较, 参考解为传统SEM的数值解. 从图中可以看出DDM-SEM在4阶和混合阶下的数值解和参考解基本一致, 其 L_2 误差分别为0.7%和1.8%. 表3列出了DDM-SEM和传统SEM效率的比较, DDM-SEM的自由度仅为传统方法的一半, 计算效率也高于传统方法. 因此, DDM-SEM技术结合非匹配网格能更有效用于精确仿真高对比度的弹性波问题.

3.4 储层地质模型

为了展示DDM-SEM算法在仿真复杂大尺度模型中的灵活性, 本文选取了中国西北某地区一个具有起伏地表的多层地质模型. 如图9所示, 模型的大小为6km×2km×2.8km, 表4为模型的介质参数. 一个10Hz的垂直点力源放置在地表, 且坐标为(2.5km, 1.0km, 0.2km). 本文应用区域分解技术提高仿真效率且无损

表 1 DDM-SEM在不同区域划分下的计算效率

类型	切面方向			集群节点	子区域	自由度		内存(GB)	时间(s)
	x (m)	y (m)	z (m)			内部	边界		
1	x	x	x	1	1	2738019		183	5635
2	0	x	x	2	2	2709792	112908	167	4115
3	-160, 0, 160	x	x	3	3	2681565	225816	143	2946
4	-200, 0, 200	x	x	4	4	2653338	338724	123	2106
5	-200, 0, 200	x	x	1	4	2653338	338724	123	5291
6	0	0	0	4	8	2654208	366459	130	1812
7	-360, 120, 360	x	x	4	8	2540430	790356	290	6810

图 7 Mygdonian盆地模型离散为六面体单元
(a) 非匹配网格, (b) 匹配网格

表 2 Mygdonian盆地模型的材料参数

H (m)	ρ (kg m^{-3})	V_p (m s^{-1})	V_s (m s^{-1})	Q_p	Q_s
0	2100	1500	200	20	10
17.3	2100	1800	350	30	25
72.5	2200	2500	650	50	35
115.6	2600	4500	2600	100	80

表 3 SEM和DDM-SEM仿真Mygdonian盆地模型的计算效率

	自由度	内存(GB)	时间(s)	采样率			
				$L1$	$L2$	$L3$	$L4$
SEM	5029431	296	3447	6.9	12	7.5	10.0
DDM-SEM 4阶	2360838	157	1330	6.1	7.2	8.0	10.0
DDM-SEM 混合阶	1909224	130	1025	5.2	6.7	8.0	10.0

图 8 比较Mygdonian盆地模型在SEM和DDM-SEM下的位移场
(a) u_x 分量的实部, (b) u_x 分量的虚部, (c) u_z 分量的实部, (d) u_z 分量的虚部

失精度. 将地质模型沿着 $X=2\text{km}$, $X=4\text{km}$ 和 $Z=1.2\text{km}$ 平面切分出6个子区域, 在3阶基函数下的自由度为15160800, 其子区域如图10所示.

为了验证该模型中DDM-SEM解的收敛性, 本文将比较两种不同单元尺寸下的位移场, 其对应的自由度分别为15160800和2146935. 三个垂直方向的接收

图 9 中国西北某地区起伏地表且多层地质模型的切面图

图 10 地质模型离散为六面体网格
该模型在DDM-SEM中被划分为6个子区域

器阵列用于接收位移场, 起始点的坐标分别为(0.5km, 1.6km, 0.28km), (2km, 0.9km, 0.28km)和(3.5km, 0.6km, 0.28km). 图11为两种网格尺寸下的位移场仿真结果, 其波形基本一致, 验证了区域分解技术在该模型中的正确性. 由于该模型的自由度较大, 求解过程分别需要消耗1.3和1.8T的内存资源. 如此大的计算资源被分配到集群中多个计算节点, 将提高计算效率和减少计算复杂度. 然而, 利用传统的谱元法在单节点下计算该模型几乎不可能. 因此, 区域分解技术在计算大

尺度模型起到重要的作用.

4 结论

在频域问题中, 由于计算资源的限制, 直接求解大型稀疏矩阵非常耗时, 甚至不可能求解. 本文提出的谱

图 11 比较15160800和21469350自由度下的z分量位移场
(a)和(b)为第一组观测点, (c)和(d)为第二组观测点, (e)和(f)为第三组观测点

表 4 图9模型的材料参数

No.	ρ	V_p	V_s	Q_p	Q_s	No.	ρ	V_p	V_s	Q_p	Q_s
1	1830	1500	880	14	5	12	2610	4700	2650	421	119
2	2040	2000	1100	64	14	13	2500	4200	2340	329	91
3	2150	2500	1300	105	25	14	2610	4700	2650	421	119
4	2360	3500	1900	220	57	15	2480	4100	2280	312	86
5	2270	3100	1670	169	43	16	2360	3500	1910	220	58
6	2400	3700	2040	249	67	17	2460	4000	2220	296	81
7	2200	4700	2650	421	119	18	2520	4300	2400	347	96
8	2330	3400	1850	207	54	19	2540	4400	2460	365	101
9	2520	4300	2400	347	96	20	2340	3300	1790	194	50
10	2630	4800	2710	441	125	21	2520	4300	2400	347	96
11	2520	4300	2400	347	96						

元法的区域分解技术结合了谱元法的高精度以及区域分解的高并行度, 能精确且高效地仿真大尺度弹性波问题. 在DDM-SEM中, 一个完整的线性系统被分解为多个子区域求解, 每个子区域的矩阵是稀疏的、计算内存少且在LDU系统下具有并行性. 通过采用黎曼传输条件作为高精度的数值通量, 实现子区域间边界场的正确性. 与传统单区域谱元法比较, DDM-SEM中每个子区域可选取非匹配网格和不同阶数的基函数, 展示出计算高效性. 数值算例不仅验证了DDM-SEM的高精度, 即具有谱收敛特性, 同时也展示了该方法在计算大尺度弹性问题的优越性. 在实际问题的应用中, 采用非匹配网格能极大提高计算效率和节约计算资源.

参考文献

Alvarez J, Angulo L, Rubio Bretones A, Garcia S G. 2012. A spurious-free discontinuous Galerkin time-domain method for the accurate modeling of microwave filters. *IEEE Trans Microwave Theor Techn*, 60: 2359–2369

An S, Hu T, Peng G. 2017. Three-dimensional cumulant-based coherent integration method to enhance first-break seismic signals. *IEEE Trans Geosci Remote Sens*, 55: 2089–2096

Chan J, Warburton T. 2016. A short note on the penalty flux parameter for first order discontinuous Galerkin formulations. *arXiv Preprint*. Arxiv: 1611.00102

Chen J, Tobon L E, Chai M, Mix J A, Liu Q H. 2011. Efficient implicit-explicit time stepping scheme with domain decomposition for

multiscale modeling of layered structures. *IEEE Trans Compon Packag Manufact Technol*, 1: 1438–1446

Chew W C, Liu Q H. 1996. Perfectly matched layers for elastodynamics: A new absorbing boundary condition. *J Comp Acous*, 4: 341–359

Dunavant D A. 1985. High degree efficient symmetrical Gaussian quadrature rules for the triangle. *Int J Numer Meth Engng*, 21: 1129–1148

Faccioli E, Maggio F, Quarteroni A, Taghan A. 1996. Spectral-domain decomposition methods for the solution of acoustic and elastic wave equations. *Geophysics*, 61: 1160–1174

Gao Z, Pan Z, Gao J. 2016. Multimutation differential evolution algorithm and its application to seismic inversion. *IEEE Trans Geosci Remote Sens*, 54: 3626–3636

De Basabe J D, Sen M K. 2007. Grid dispersion and stability criteria of some common finite-element methods for acoustic and elastic wave equations. *Geophysics*, 72: T81–T95

De Basabe J D, Sen M K, Wheeler M F. 2008. The interior penalty discontinuous Galerkin method for elastic wave propagation: Grid dispersion. *Geophys J Int*, 175: 83–93

Komatitsch D, Vilotte J P. 1998. The spectral element method: An efficient tool to simulate the seismic response of 2D and 3D geological structures. *Bull Seismol Soc Am*, 88: 368–392

Komatitsch D, Tromp J. 2002a. Spectral-element simulations of global seismic wave propagation-I. Validation. *Geophys J Int*, 149: 390–412

Komatitsch D, Tromp J. 2002b. Spectral-element simulations of global seismic wave propagation-II. Three-dimensional models, oceans, rotation and self-gravitation. *Geophys J Int*, 150: 303–318

Kopriva D A, Nordström J, Gassner G J. 2017. Error boundedness of

- discontinuous Galerkin spectral element approximations of hyperbolic problems. *J Sci Comput*, 72: 314–330
- Koshiba M, Karakida S, Suzuki M. 1984. Finite-element analysis of Lamb wave scattering in an elastic plate waveguide. *IEEE Trans Son Ultrason*, 31: 18–24
- Lee Joon-Ho, Liu Q H. 2005. An efficient 3-D spectral-element method for Schro/spl uml/dinger equation in nanodevice simulation. *IEEE Trans Comput-Aided Des Integr Circuits Syst*, 24: 1848–1858
- Lee Joon-Ho, Xiao T, Liu Q H. 2006. A 3-D spectral-element method using mixed-order curl conforming vector basis functions for electromagnetic fields. *IEEE Trans Microwave Theor Techn*, 54: 437–444
- Lee Joon-Ho, Chen J, Liu Q H. 2009. A 3-D discontinuous spectral element time-domain method for Maxwell's equations. *IEEE Trans Antennas Propag*, 57: 2666–2674
- Lin Yun, Lee Joon-Ho, Liu J, Mei Chai, Mix J A, Qing Huo Liu J A. 2009. A hybrid SIM-SEM method for 3-D electromagnetic scattering problems. *IEEE Trans Antennas Propag*, 57: 3655–3663
- Liu Q H, Tao J. 1997. The perfectly matched layer for acoustic waves in absorptive media. *J Acoust Soc Am*, 102: 2072–2082
- Liu Q H. 1998. The pseudospectral time-domain (PSTD) algorithm for acoustic waves in absorptive media. *IEEE Trans Ultrason Ferroelect Freq Contr*, 45: 1044–1055
- Liu N, Tobón L, Tang Y, Liu Q H. 2015. Mixed spectral element method for 2D Maxwell's eigenvalue problem. *Commun Comput Phys*, 17: 458–486
- Lu Z Q, An X, Hong W. 2008. A fast domain decomposition method for solving three-dimensional large-scale electromagnetic problems. *IEEE Trans Antennas Propag*, 56: 2200–2210
- Luo M, Lin Y, Liu Q H. 2013. Spectral methods and domain decomposition for nanophotonic applications. *Proc IEEE*, 101: 473–483
- Moser F, Jacobs L J, Qu J. 1999. Modeling elastic wave propagation in waveguides with the finite element method. *NDT E Int*, 32: 225–234
- Patera A T. 1984. A spectral element method for fluid dynamics: Laminar flow in a channel expansion. *J Comput Phys*, 54: 468–488
- Pratt R G. 1990. Frequency-domain elastic wave modeling by finite differences: A tool for crosshole seismic imaging. *Geophysics*, 55: 626–632
- Pratt R G. 1999. Seismic waveform inversion in the frequency domain, Part 1: Theory and verification in a physical scale model. *Geophysics*, 64: 888–901
- Seriani G, Priolo E. 1994. Spectral element method for acoustic wave simulation in heterogeneous media. *Finite Elem Anal Des*, 16: 337–348
- Shi L, Zhou Y, Wang J M, Zhuang M, Liu N, Liu Q H. 2016. Spectral element method for elastic and acoustic waves in frequency domain. *J Comput Phys*, 327: 19–38
- Shi L, Liu N, Zhou J, Zhou Y, Wang J, Huo Liu Q. 2016. Spectral element method for band-structure calculations of 3D phononic crystals. *J Phys D-Appl Phys*, 49: 455102
- Sun Q, Tobon L E, Ren Q, Hu Y, Liu Q H. 2015. Efficient noniterative implicit time-stepping scheme based on E and B fields for sequential DG-FETD systems. *IEEE Trans Compon Packag Manufact Technol*, 5: 1839–1849
- Tobon L E, Ren Q, Sun Q, Chen J, Liu Q H. 2015. New efficient implicit time integration method for DGTD applied to sequential multidomain and multiscale problems. *PIER*, 151: 1–8
- Tromp J, Komattisch D, Liu Q. 2008. Spectral-element and adjoint methods in seismology. *Commun Comput Phys*, 3: 1–32
- Van de Vosse F N, Minev P D. 1996. Spectral elements methods: Theory and applications. Eindhoven University of Technology Research Reports. EUT Report 96-W-001
- Ye R, de Hoop M V, Petrovitch C L, Pyrak-Nolte L J, Wilcox L C. 2016. A discontinuous Galerkin method with a modified penalty flux for the propagation and scattering of acousto-elastic waves. *Geophys J Int*, 205: 1267–1289
- Zeng Y Q, Liu Q H, Zhao G. 2004. Multidomain pseudospectral time-domain (PSTD) method for acoustic waves in lossy media. *J Comp Acous*, 12: 277–299
- Zeng C, Xia J, Miller R D, Tsoflis G P. 2011. Application of the multiaxial perfectly matched layer (M-PML) to near-surface seismic modeling with Rayleigh waves. *Geophysics*, 76: T43–T52
- Zhao K, Rawat V, Lee J F. 2008. A domain decomposition method for electromagnetic radiation and scattering analysis of multi-target problems. *IEEE Trans Antennas Propag*, 56: 2211–2221
- Zhan Q, Ren Q, Sun Q, Chen H, Liu Q H. 2017. Isotropic Riemann solver for a nonconformal discontinuous Galerkin pseudospectral time-domain algorithm. *IEEE Trans Geosci Remote Sens*, 55: 1254–1261
- Zhou Y, Shi L, Liu N, Zhu C, Liu H, Liu Q H. 2016. Spectral element method and domain decomposition for low-frequency subsurface EM simulation. *IEEE Geosci Remote Sens Lett*, 13: 550–554
- Zhuang M, Zhan Q, Zhou J, Guo Z, Liu N, Liu Q H. 2020. A simple implementation of PML for second-order elastic wave equations. *Comput Phys Commun*, 246: 106867

(责任编辑: 印兴耀)