科 学 通 报
第 38 卷 第 11 期　CHINESE SCIENCE BULLETIN　1993 年 6 月

关于 $b\mathscr{D}\mathscr{L}$ 函数的一个问题

王 祖 樾
(杭州电子工业学院数学教研室，杭州 310037)

关键词　达布函数、导出数、势

达布 (Darboux) 函数是指具有"介值性"的函数. Bruckner 系统论述达布函数的专著[1]问世后，80 年代以来，国际数学界对该类函数的研究一直保持着兴趣. 我们获得的一个新结果是，有界、达布、不可测函数类的势为 2^c，c 是连续统势 (《数学进展》即将刊出). 自然要问，有界、达布、可测函数类(简称 $b\mathscr{D}\mathscr{L}$) 的势是什么? 本文将回答，它仍为 2^c. 类似于 Ceder 和 Pearson 在文献 [2] 结尾的一个提问形式，可问是否存在 $f\in b\mathscr{D}\mathscr{L}$，使 $R=(-\infty, +\infty)$ 成为 f 在每一点处的左、右导出数集? 我们的回答是肯定的，且这类函数，其势仍为 2^c. 这是上一问题的深入.

为了回答问题，需借助于属于 Hilbert 的填满单位正方体的 Peano 曲线的作法. 简述如下: 将单位闭区间 $I=[0,1]$ 8 等分得 8 个闭子区间，将它们自左至右编号. 同时将单位正方体 $J=I\times I\times I$ 每边等分得 8 个闭子正方体，按一定邻接顺序编号，使同号闭子区间与闭子正方体建立对应. 称它们为 1 级闭子区间和 1 级闭子正方体. 然后对 1 级闭子区间和闭子正方体再 8 等分，将它们编号，称为 2 级闭子区间和闭子正方体，并不破坏包含关系. 如此继续以至无穷. 取 $x\in I$，再取各级闭子区间形成闭子区间套 $I_1\supset I_2\supset\cdots\supset I_k\supset\cdots$ 递缩至 $x=\bigcap\limits_{k=1}^{\infty}I_k$，与第 k 级闭子区间 I_k 相对应的第 k 级闭子正方体设为 J_k，令 $w=\bigcap\limits_{k=1}^{\infty}J_k$ 与 x 对应. 可以证明 x 不依赖于闭子区间套的选择，所得映射 $w=f(x)$ 即为 Peano 曲线. 这是一个连续的满射(见文献[3]).

容易证明上述 Peano 曲线的映射 $w=f(x)$ 具有下述性质:

(1) 在 $w=f(x)$ 映射下，I 中无理点与 J 中的无理点(三度坐标皆为无理数)是一一对应的.

(2) 设 J_k^0 是 J_k 的内部，即除去界面的第 k 级闭子正方体内部，那么 $f^{-1}(J_k^0)\subset I_k$.

(3) 设 m 和 M 分别表示 1 维和 3 维的 Lebesgue 测度，可测集 $E\subset J$，那么 $ME=mf^{-1}(E)$.

将[0,1]中的数分类: $x, y\in[0,1)$ 属同类当且仅当 $|x-y|$ 为有理数，并将 $x=1$ 归入有理数类. 得到的类记为 E_α，E_α 可数稠于 [0, 1]，α 的指标集 A 具有连续统势 c. 于是 $[0, 1]=\bigcup\limits_{\alpha\in A}E_\alpha$，$E_\alpha$ 两两不交.

1992-04-21 收稿，1993-02-23 收修改稿.

在单位正方体 J 中作处处稠密的竖直线段所成的点集

$$F_{\alpha\beta}=\{(x,y,z)\mid x\in E_{\alpha},y\in E_{\beta},0\leqslant z\leqslant 1\},(\alpha,\beta\in A),$$

$F_{\alpha\beta}$ 具有势 c 且为零测度(3 维)集. 为了便于叙述,将 $F_{\alpha\beta}$ 中的非无理点剔除, 剔除后所得的集仍记为 $F_{\alpha\beta}$.

再作[0,1]中的点集

$$G_{\alpha\beta}=f^{-1}(F_{\alpha\beta}),\ (\alpha,\beta\in A).$$

由性质(1)知,点集 $G_{\alpha\beta}$ 的势为 c. 我们证明 $G_{\alpha\beta}$ 在[0,1]中 c 稠. 任取 $(a,b)\subset[0,1]$, 再取某个闭子区间 $I_k\subset(a,b)$, 它所对应的闭子正方体记为 J_k, 于是 $f^{-1}(J_k^0)\subset I_k\subset(a,b)$.因 $F_{\alpha,\beta}$ 在 J 中稠,故 $F_{\alpha\beta}\cap J_k^0$ 的势为 c. 由于在无理点处相互一一对应,故 $f^{-1}(F_{\alpha\beta}\cap J_k^0)$ 具有势 c. 由

$$G_{\alpha\beta}\cap f^{-1}(J_k^0)=f^{-1}(F_{\alpha\beta})\cap f^{-1}(J_k^0)=f^{-1}(F_{\alpha\beta}\cap J_k^0)\subset(a,b),$$

知 $G_{\alpha\beta}$ 在[0,1]中 c 稠. 又由性质(3)知, $G_{\alpha\beta}$ 仍为零测度集.

定理 存在函数 $g\in b\mathscr{D}\mathscr{L}$, 使得 $R=(-\infty,+\infty)$ 是 $g(x)$ 在每一点 $x\in[0,1]$ 的左、右导出数集(端点则为右或左导出数集),且具有此性质的函数所成的类,其势为 2^c, c 为连续统势.

证 固定某指标 α, 作点集

$$F=F_{\alpha}=\bigcup_{\beta\in A}F_{\alpha\beta}=\{(x,y,z)\mid x\in E_{\alpha},0\leqslant y\leqslant 1,0\leqslant z\leqslant 1\}\backslash J \text{ 的非无理点集}.$$

由于 $MF=0$, 故 $G=f^{-1}(F)$ 也为零测度集.

因指标集 A 具有势 c, 故 G 含有 c 个类 $G_{\alpha\beta}(\beta\in A)$. 记 $H_{\beta}=G_{\alpha\beta}$. 作 $\{H_{\beta}\mid\beta\in A\}$ 与 $(-1,1)$之间的一一满射 $\varphi:\{H_{\beta}\mid\beta\in A\}\to(-1,1)$, 则 $\varphi(H_{\beta})\in(-1,1)$, $\varphi(H_{\alpha})\neq\varphi(H_{\beta})$ $(\alpha\neq\beta)$, $\varphi^{-1}(\eta)\in\{H_{\beta}\mid\beta\in A\}$ $(\eta\in(-1,1))$.

现构作我们所需的函数 $g:[0,1]\to(-1,1)$ 如下: 对于 $x\in[0,1]$, 若有 $x\in H_{\beta}$ (对某指标 $\beta\in A$), 则令 $g(x)$ 的值为 $\varphi(H_{\beta})$; 否则令 $g(x)=0$, 即

$$g(x)=g_{\varphi}(x)=\begin{cases}\varphi(H_{\beta}), & x\in H_{\beta},\ \beta\in A;\\ 0, & \text{其余处}.\end{cases}$$

由于 G 为零测度集,故 $g(x)$ 为几乎处处为零的函数,是可测函数. $g(x)$ 取值于$(-1,1)$, 为有界函数.

$g(x)$ 是达布函数. 事实上,任取 $(a,b)\subset[0,1]$ 和 $\eta\in(-1,1)$. 设 $\varphi^{-1}(\eta)=H_{\beta}$, 则 $\varphi(H_{\beta})=\eta$. 但 H_{β} c 稠于[0,1],故存在 $\xi\in H_{\beta}\cap(a,b)$, 使 $g(\xi)=\varphi(H_{\beta})=\eta$.

最后验证 $R=(-\infty,+\infty)$ 为 $g(x)$ 在每点处的左、右导出数集. 不妨只验证 $x_0\in[0,1)$ 的右导出数情形. 取 $r\in R$, 我们证明 r 为 $g(x)$ 在 x_0 处的右导出数.

由于 $-1<g(x_0)<1$,取正整数 n 充分大, 使 $-1<g(x_0)+\frac{r}{n}<1$.令 $H_{\beta n}=\varphi^{-1}\left(g(x_0)+\frac{r}{n}\right)$, 则 g 在 $H_{\beta n}$ 上的取值为 $\varphi(H_{\beta n})=g(x_0)+\frac{r}{n}$.

因 $H_{\beta n}$ c 稠,故可在点 $x_0+\frac{1}{n}$ 的左近旁取充分接近于 $x_0+\frac{1}{n}$ 的点 $x_n\in H_{\beta n}$,使

$$x_0<x_n<x_0+\frac{1}{n},\ \text{且}\ x_0+\frac{1}{n}-x_n=o\left(\frac{1}{n}\right).$$

于是 $g(x_n)=\varphi(H_{\beta n})=g(x_0)+\frac{r}{n}$，故有

$$\frac{g(x_n)-g(x_0)}{x_n-x_0}\to r(n\to\infty),$$

即 r 为 $g(x)$ 在 x_0 处的一个右导出数.

由于 $\{H_\beta|\beta\in A\}$ 与$(-1,1)$的势为 c，知其间的一一映射之 φ 有 2^c 个，从而 g_φ 有 2^c 个. 证毕.

由实函数全体之势为 2^c. 可得

推论　有界、达布、可测函数类的势为 2^c.

本文是"处处振荡的达布函数"一文[4]的进一步发展.

参　考　文　献

[1] Bruckner, A. M., *Differentiation of Real Functions*, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1978.
[2] Ceder, J., Pearson, T. L., *Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungaricae*, 1981, **37**(4):339—348.
[3] B. R. 盖尔鲍姆，J. M. H. 奥姆斯特德，分析中的反例(中译本)，上海科学技术出版社，1980.
[4] 王祖樾，科学通报，1979，**24**(24)：1105—1107.