

◇ 研究报告 ◇

基于声粒子分布积分的无网格声场计算方法*

曾向阳[†] 王海涛 杜博凯

(西北工业大学航海学院 西安 710072)

摘要 小尺度封闭空间内部声场的数值计算是声学设计、噪声控制等领域的关键技术。由于波动声学及几何声学方法计算频率上的限制,中频段声场计算问题一直是个难点。本文以声学无网格法为基础,提出了一种基于声粒子分布积分的无网格声场数值计算方法。文中利用声线跟踪理论计算声场中的声粒子分布,并以某个时间点上的声粒子作为蒙特卡罗法中的积分点,将其应用于无网格法中,从而获得声场中的节点声压。利用该方法对一个矩形封闭空间的中低频声场进行了计算,并与模态叠加法、商用声场计算软件、经典无网格法的结果进行了对比,证明基于声粒子分布积分的无网格声场数值计算方法在中低频段相较于传统基于网格的方法具有更高的精度。

关键词 小尺度封闭空间,无网格法,声粒子跟踪,蒙特卡罗积分,中频段

中图分类号: TU112

文献标识码: A

文章编号: 1000-310X(2016)01-0084-06

DOI: 10.11684/j.issn.1000-310X.2016.01.012

A meshless method based on the particle-distribution integration for simulations of sound fields in small enclosures

ZENG Xiangyang WANG Haitao DU Bokai

(School of Marine Science and Technology, Northwestern Polytechnical University, Xi'an 710072, China)

Abstract The numerical calculation of the sound fields in small enclosures is an key technique in the areas of acoustical design, noise control, etc. The calculation in the middle-frequency band is a difficult problem because of the frequency limit of the wave-acoustic methods and geometric-acoustic methods. In order to solve this problem, a hybrid method with combinations of the typical meshless method and the particle-distribution integration is proposed in this paper. The particles in the sound field are traced according to the ray-tracing method. Then, the particles at certain time are recorded and considered as the integration points in the Monte Carlo method which is applied in the hybrid method. Finally, the frequency response functions in the middle and low frequency bands of a rectangular enclosure are calculated using the method derived in this paper. The results are compared with those of the modal superposition method, the commercial software, and the classical meshless method. The comparisons show that the method derived in this paper has better accuracy in the middle and low frequency bands than the traditional methods.

Key words Small enclosure, Meshless method, Particle tracing, Monte Carlo method, Middle frequency band

2015-04-28 收稿; 2015-10-21 定稿

*国家自然科学基金项目 (11374241)

作者简介: 曾向阳 (1974-), 男, 湖北宜昌人, 博士, 教授, 研究方向: 声场数值计算及声信号处理。

[†] 通讯作者 E-mail: zenggy@nwpu.edu.cn

1 引言

小尺度封闭空间的声场计算问题对于飞机、汽车、船体等封闭舱室的声学设计、噪声预测、NVH分析具有十分重要的意义。在这类空间中, 100–1000 Hz 的中频段常常会对噪声控制、人的主观听觉舒适性产生较大的影响。现有关于封闭空间的声场计算方法主要包括波动声学方法和几何声学方法两类。其中波动声学方法包括有限元法、边界元法等^[1], 主要适用于低频段的声场计算, 由于方法本质上的限制, 无法对声模态密度较高的中高频段声场给出良好的模拟。几何声学方法则主要包括声线跟踪法、虚声源法等, 适合于高频声场计算^[2]。从计算频段来看, 单独应用两种方法, 适用范围均不涵盖中频段声场。

目前, 针对中频段声场的建模计算多区分频段利用不同方法计算, 然后将计算结果结合^[3], 这种方法本质上并没有对中频段的计算有所改进; Yeh 等采用了划分区域的思路^[4], 即将待计算声场划分为不同的区域, 然后对这些区域进行先验性预测, 根据预测结果分别利用几何声学方法及波动声学方法进行计算, 这种方法包含了划分区域、预测等多种不确定因素, 其计算精度难以保持鲁棒性; 何智成等针对汽车中频NVH分析构建了光滑有限元模型^[5], 但从结果来看, 该模型只适合于非常低空间声模态密度的情况。因此, 十分有必要发展新的中频段声场数值计算方法。

近年来, 在数值计算领域出现了一种新型数值计算方法——无网格法^[6]。课题组前期的研究表明, 这种方法在模型离散、形函数构造方式等方面均与传统方法有较大的不同, 其应用于声场计算的有效性已得到证明^[7]。本文以无网格法为基础, 提出了一种基于声粒子分布积分的无网格声场数值计算方法(Meshless method based on particle distribution integration, MMPDI)。论文首先给出了该方法的详细推导过程, 然后对一个矩形封闭空间的频率响应进行了计算, 通过与模态叠加法、商用声场计算软件和经典无网格法的对比, 证明了该方法的有效性。

2 基于声粒子分布积分的无网格声场数值计算方法

针对几何声学分析方法以及波动声学分析方法各自的特点, 本文将几何声学方法中的声粒子分

布通过蒙特卡罗积分的方式引入到无网格法之中, 以下给出详细算法推导过程。

2.1 无网格声场计算模型

封闭声场的有源波动方程一般可表示为

$$\nabla^2 p - \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = -\rho_0 \frac{\partial q}{\partial t}, \quad (1)$$

式(1)中 c_0 为声速, ρ_0 为静态空气密度, p 为声压, q 为声源函数。当声源作简谐振动时, 可得到频域内描述声场特性的 Helmholtz 方程:

$$\nabla^2 p_\omega(r) + k^2 p_\omega(r) + j\rho_0 \omega q_\omega(r) = 0. \quad (2)$$

Neumann 边界条件 $\partial p / \partial n = 0$ 与 Robin 边界条件 $\partial p / \partial n = -jk p / \zeta$ 为封闭空间声场分析中两种常见的边界条件, ζ 称为比声阻抗, 满足 $\zeta = Z / \rho_0 c_0$, Z 为界面声阻抗。

为了求解式(2), 此处采用加权残量法^[8]对其进行计算域上的离散。设 $\bar{p}$ 为问题的一个近似解, 将其代入式(2)及其边界条件, 将产生误差 R 和 $\bar{R}$:

$$\begin{cases} R = \nabla^2 \bar{p} + k^2 \bar{p} + j\rho_0 \omega q_\omega, \\ \bar{R} = \frac{\partial \bar{p}}{\partial n} + \frac{jk}{\zeta} \bar{p}. \end{cases} \quad (3)$$

根据 Galerkin 法确定权函数^[9], 有

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \bar{p} \cdot (\nabla^2 \bar{p} + k^2 \bar{p} + j\rho_0 \omega q_\omega) dv \\ & - \int_{\Gamma} \bar{p} \cdot \left(\frac{\partial \bar{p}}{\partial n} + \frac{jk}{\zeta} \bar{p} \right) ds = 0. \end{aligned} \quad (4)$$

由格林第一公式

$$\int_{\Omega} (\varphi \nabla^2 \Phi + \nabla \varphi \cdot \nabla \Phi) dv = \int_{\Gamma} \varphi \frac{\partial \Phi}{\partial n} ds, \quad (5)$$

式(4)可以简化为

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} (\nabla \bar{p} \cdot \nabla \bar{p} - k^2 \bar{p} \cdot \bar{p} - j\rho_0 \omega \bar{p} q_\omega) dv \\ & + \int_{\Gamma} \frac{jk}{\zeta} \bar{p} \cdot \bar{p} ds = 0. \end{aligned} \quad (6)$$

若此封闭空间已经用 n 个节点进行了离散, 那么声场中任意一点的声压可用各节点声压及其形函数的乘积来表示, 即

$$\bar{p} = \mathbf{N} \mathbf{p} = [N_1, N_2, \dots, N_n] \begin{Bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ p_n \end{Bmatrix}, \quad (7)$$

式(7)中 N_i 为节点 i 处的形函数, p_i 为节点 i 处的声压。

将式(7)代入式(6),并经过整理可得

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} [\mathbf{p}^T (\nabla \mathbf{N})^T (\nabla \mathbf{N}) \mathbf{p} \\ & - k^2 \mathbf{p}^T \mathbf{N}^T \mathbf{N} \mathbf{p} - j\rho_0 \omega \mathbf{p}^T \mathbf{N}^T \mathbf{q}_\omega] dv \\ & + \int_{\Gamma} \frac{jk}{\zeta} (\mathbf{p}^T \mathbf{N}^T \mathbf{N} \mathbf{p}) ds = 0, \end{aligned} \quad (8)$$

式(8)中 $\nabla \mathbf{N}$ 为形函数的导数矩阵:

$$\begin{aligned} \nabla \mathbf{N} &= \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x} & \frac{\partial N_1}{\partial y} & \frac{\partial N_1}{\partial z} \\ \frac{\partial N_2}{\partial x} & \frac{\partial N_2}{\partial y} & \frac{\partial N_2}{\partial z} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial N_n}{\partial x} & \frac{\partial N_n}{\partial y} & \frac{\partial N_n}{\partial z} \end{bmatrix} \\ &= \begin{Bmatrix} N_1 & N_2 & \cdots & N_n \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \end{Bmatrix}. \end{aligned} \quad (9)$$

整理式(8),可得到

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} [(\nabla \mathbf{N})^T (\nabla \mathbf{N})] dv \cdot \mathbf{p} \\ & - \int_{\Omega} (k^2 \mathbf{N}^T \mathbf{N}) dv \cdot \mathbf{p} \\ & - \int_{\Omega} (j\rho_0 \omega \mathbf{N}^T \mathbf{q}_\omega) dv \\ & + \int_{\Gamma} \frac{jk}{\zeta} (\mathbf{N}^T \mathbf{N}) ds \cdot \mathbf{p} = 0. \end{aligned} \quad (10)$$

令

$$\begin{cases} \int_{\Omega} (\nabla \mathbf{N})^T (\nabla \mathbf{N}) dv = \mathbf{K}, \\ \frac{1}{c_0^2} \int_{\Omega} \mathbf{N}^T \mathbf{N} dv = \mathbf{M}, \\ \frac{1}{c_0 \zeta} \int_{\Gamma} \mathbf{N}^T \mathbf{N} ds = \mathbf{C}, \\ \int_{\Omega} j\rho_0 \omega \mathbf{N}^T \mathbf{q}_\omega dv = \mathbf{F}, \end{cases} \quad (11)$$

最终有

$$(\mathbf{K} + j\omega \mathbf{C} - \omega^2 \mathbf{M}) \mathbf{p} = \mathbf{F}, \quad (12)$$

式(12)为计算各节点声压的系统方程, $\mathbf{K}$ 、 $\mathbf{C}$ 、 $\mathbf{M}$ 、 $\mathbf{F}$ 分别为刚度矩阵、阻尼矩阵、质量矩阵、载荷矩阵, $\mathbf{p}$ 为待求的节点声压向量。在根据此式求得所有节点的声压值之后,即可由式(7)求得声场中任意位置处的声压。

从式(11)可以看出,各项系统矩阵主要由形函数的积分构成,因此构造插值准确、高效的无网格形函数^[10]非常重要。本文采用无网格法中经常用到的移动最小二乘法来构造形函数^[11]。

2.2 基于蒙特卡罗积分思路的声粒子分布积分

从上述无网格系统方程的建立来看,无网格法在得到节点声压的过程中会涉及到大量的形函数的积分运算。在现有的无网格法中,积分运算多采用背景网格积分法^[11],即将计算域利用规则的网格进行划分,并在网格内部均匀设置积分点,从而将连续形式的积分运算转化为离散形式的求和运算。这种积分方式使得无网格法无法成为一种真正无需网格支持的方法,而且对于一些形状不规则的空间,背景网格的划分、积分权系数的设置、积分域与形函数支持域不匹配等问题都会使最终结果产生较大误差。本文将蒙特卡罗法引入到无网格法的声场计算之中,并且与几何声学形式的声粒子分布相结合拓宽了无网格法的计算频段。

蒙特卡罗积分法求解积分的一般形式为

$$\begin{aligned} I &= \int f(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \int \frac{f(\mathbf{x})}{\psi(\mathbf{x})} \psi(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \\ &= \int F(\mathbf{x}) \psi(\mathbf{x}) d\mathbf{x}, \end{aligned} \quad (13)$$

式(13)中 $f(\mathbf{x})$ 为一个需积分的函数, $\mathbf{x}$ 为自变量, $\psi(\mathbf{x})$ 为 $\mathbf{x}$ 的概率密度分布,当根据此概率密度函数进行 m 次随机抽样后,式(13)可估计为

$$I \approx \hat{I} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m F(\mathbf{x}_i). \quad (14)$$

通过式(14)即可求得 $f(\mathbf{x})$ 的积分值 I 。

根据蒙特卡罗积分方法的这种思路,当计算式(11)中所涉及的各项积分时,首先要按照某种概率密度分布确定一些积分点的值,对于封闭空间声场计算的问题,这些积分点的值就是其空间位置。在数学模型上来说,为找到某种适合于积分点空间位置的概率密度分布,可以利用声粒子跟踪的方式实现。即首先确定一定数量的声粒子,在 $t=0$ 的时刻,这些声粒子都处于声源的位置;然后对这些声粒子展开传播过程中的跟踪;最后在某个时刻上,这些声粒子都有具体的空间位置,将这些空间位置上的声粒子即可作为式(11)中的积分点。

在经典声线跟踪法中,假定每根声线开始时都携带相同的能量,其大小取决于声源辐射的总能量和声线根数。在声线传播过程中,求出声线与所有壁面的交点,选择在其传播方向上最近的交点作为声粒子与壁面的碰撞点,声线在该点一部分作镜面反射,其方向由反射定律决定;一部分作扩散反射,其方向可利用概率论知识来选取(由计算机发出随

机数来决定)。该声线沿新方向继续前进。每次碰撞后它的能量减少为原来的 $1 - a$ 倍 (a 为壁面的吸声系数), 直到其能量低于事先设定的阈值时计算机停止对该声线的跟踪, 继而跟踪下一声线, 如此重复进行, 直至所有粒子均被跟踪完毕。鉴于声线跟踪法是一种较为成熟的几何声学方法, 本文对其详细实现过程不再赘述。

在本文中, 声粒子跟踪的实现流程与声线跟踪法思路、方法一致, 只是将声源发出的声线用声粒子代替。在 $t = 0$ 时刻, 声源所发出的声粒子的初始传播方向的俯仰角、方位角可由式 (15) 确定^[12]:

$$\begin{cases} \Delta\theta_{ij} = \frac{\pi}{N_\theta}, & \theta_{ij} = (i - 0.5)\Delta\theta_{ij}, \\ i = 1, 2, \dots, N_\theta, \\ \Delta\varphi_{ij} = \frac{2\pi}{N_\varphi}, & \varphi_{ij} = (j - 0.5)\Delta\varphi_{ij}, \\ i = 1, 2, \dots, N_\varphi, \\ N_\varphi = N_\theta \sin \theta_{ij}, \end{cases} \quad (15)$$

式 (15) 中 N_θ 为事先规定的、声粒子在每个俯仰角方向上的数量, $\Delta\theta_{ij}$ 为俯仰角方向上的角度间隔, θ_{ij} 为声粒子的俯仰角, N_φ 为声粒子在每个水平角方向上的数量, 其值由 N_θ 及 θ_{ij} 共同确定, $\Delta\varphi_{ij}$ 为水平角方向上的角度间隔, φ_{ij} 为声粒子的水平角。根据式 (15), 只需规定一个 N_θ 的值, 即可最终得到全部声粒子的初始传播方向。

需要注意的是, 当声粒子发出之后, 其跟踪过程与传统方法中对于声线的跟踪存在两点不同:

(1) 由于仅需声粒子的分布形式, 因此跟踪过程中无需设置接收点, 也无需判断与接收球体的相互关系;

(2) 声粒子在某个设置的时间点停止跟踪, 而不是根据能量的降低或到达接收点停止。

根据上述方法可确定某个时间点上的声粒子位置。将这些声粒子作为蒙特卡罗积分中的积分点, 从而使式 (12) 得解, 获得节点上的声压。

3 算例

为验证本文所推导算法的正确性, 以一个矩形封闭空间为算例, 将基于声粒子分布积分无网格法的计算结果与模态叠加法结果、SYSNOISE 计算结果 (以边界元法为核心算法)、经典无网格法进行了对比。

矩形封闭空间长 1.0 m, 宽 1.1 m, 高 1.2 m。声源点坐标为 (0.2, 0.2, 0.2), 接收点坐标为 (0.8, 0.6,

0.9), 如图 1 所示。假设封闭空间的壁面为刚性, 因此在声粒子的跟踪过程中可认为声粒子与边界碰撞后能量没有发生衰减。

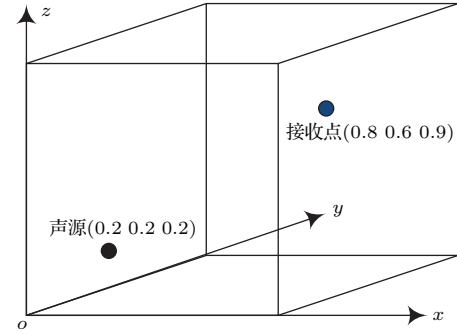


图1 矩形封闭空间示意图

Fig.1 Schematic of the rectangular enclosure

由于在本文推导的算法中, 需确定某个时间点上的声粒子分布, 而不同时间点上的声粒子分布通常是不同的, 因此需要首先确定合适的时间点。图2所示为4个不同时间点时声粒子在矩形封闭空间中的分布情况。由图2可知, 当声粒子的跟踪时间较短时, 声粒子无法在封闭空间中形成较稳定的分布, 而跟踪时间越长, 声粒子所经过距离也就越长, 空间中声粒子的分布也就越稳定。例如, 当声粒子跟踪时间在 5 ms 之内时, 声粒子在封闭空间中的分布很不均匀稳定, 而当声粒子跟踪时间点为 1 s 时, 每个声粒子所经过的距离为 344 m, 此距离已经远远大于封闭空间的尺寸, 因此可认为声粒子已经形成了较为均匀、稳定的分布。本例中将声粒子的跟踪截止时间点设置为 1 s。

为分析本文算法在较宽频段内的频响计算精度, 分别利用 MMPDI 计算了 100~300 Hz (声模态密度较低, 视为低频段), 300~600 Hz (声模态密度较高, 视为中频段) 两种情况下的频率响应, 如图 3~4 所示, 并与模态叠加法 (对于简单模型, 模态叠加法可视为标准解以进行对比)、商用声场数值计算软件 SYSNOISE、经典无网格法的计算结果进行了对比。SYSNOISE 模型的单个网格长度为 0.1 m, 节点数为 726; MMPDI 中相邻节点间距为 0.2 m, 节点数为 216, 声粒子数为 3064; 经典无网格法以适用于小尺度封闭空间声场计算的伽辽金型无网格法为基础^[7], 采用背景网格法完成积分运算, 其节点数为 216, 声积分点数为 3064。

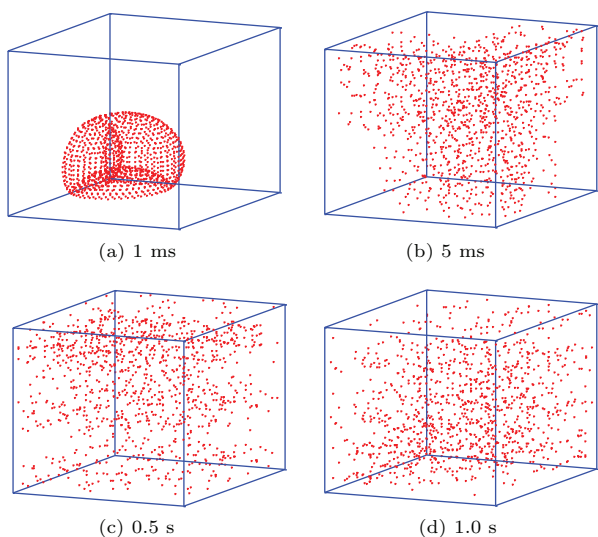


图2 不同时间点上的声粒子分布

Fig. 2 Distribution of the particles at different time

从图3所示的低频段计算结果及对比来看,几种方法所得到频率响应的曲线十分接近,声模态峰的幅值及其频率位置都几乎一致,这说明当声模态密度较低时,MMPDI与传统网格方法及经典无网格法一样都可以得到良好的计算精度。但是从280 Hz开始,各方法的结果出现较为明显的差别,其中SYSNOISE及经典的无网格法的曲线波谷位置发生明显偏移,而MMPDI的计算结果仍与模态叠加法有良好的一致性。

从图4所示的中频段计算结果及对比来看,随着频率的升高,空间中的声模态密度也会随之升高,此时SYSNOISE的计算结果已经出现了明显的错误,大部分声模态峰已经消失,所得曲线已无法对频率响应的分析提供有效信息。经典无网格法的计算结果也出现了频率偏移的情况,而且随着频率的增高,频率偏移更加明显,这说明经典的无网格法在声模态密度较高时,计算精度会有一定程度的降低。与其他方法相比,MMPDI的结果与模态叠加法保持了良好的一致性,从图4中可以看出,在300–500 Hz范围内,MMPDI的结果与模态叠加法结果基本一致,两者仅在400–450 Hz之间具有较为明显的差别。可见,MMPDI相较于传统网格方法及经典无网格法具有更高的中频段计算精度。从适用频率范围角度分析,由于本文推导的基于声粒子分布积分的无网格法是一种以波动声学为基础的方法,因此其主要适用范围为中低频;在计算上限频率方面,由于不同房间模型的适用情况不同,无法统一给出结论,当声模态密度较高时,本文所推导方法的

计算精度会有一定程度下降,但其中频段精度仍旧高于传统基于网格方法及经典无网格法。

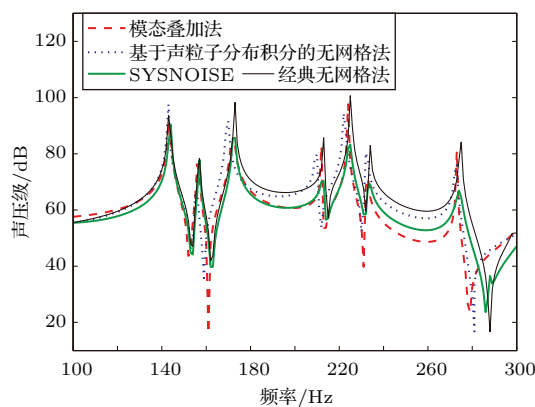


图3 声模态密度较低时不同方法的频率响应

Fig.3 Frequency responses under low acoustical modal density

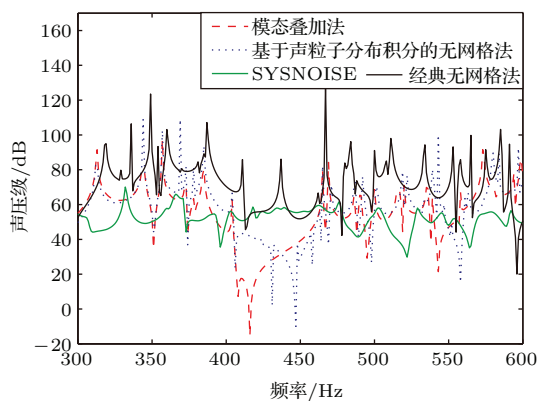


图4 声模态密度较高时不同方法的频率响应

Fig. 4 Frequency response under high acoustical modal density

在计算效率方面(计算环境: CPU型号为Intel(R), Core(TM), i3-4150CPU, @3.50 GHz, 3.50 GHz, 4 Gb内存), SYSNOISE所耗费的计算时间为84 s,而基于声粒子分布积分的无网格法耗费的计算时间为76 s。对于算法实现过程而言,理论上由于基于声粒子分布积分的无网格法比常规方法多了声粒子跟踪的过程,其计算效率会稍低于常规算法,但由于声粒子跟踪过程属于几何形式的复杂度较低的算法,其耗费的时间通常较小。本例中由于SYSNOISE的节点数目较多,其计算时间因此会多于基于声粒子分布积分的无网格法。MMPDI与经典无网格法相比,两者的节点数、积分点数均相同,由于MMPDI需要对声粒子进行跟踪,其计算时间会耗费稍多,但具有更高的计算精度。

为进一步分析基于声粒子分布对计算结果的影响,还对比计算了积分点完全随机分布时的频率响应,如图5所示。随机分布的积分点数目同声粒子数目一致,均为3064。

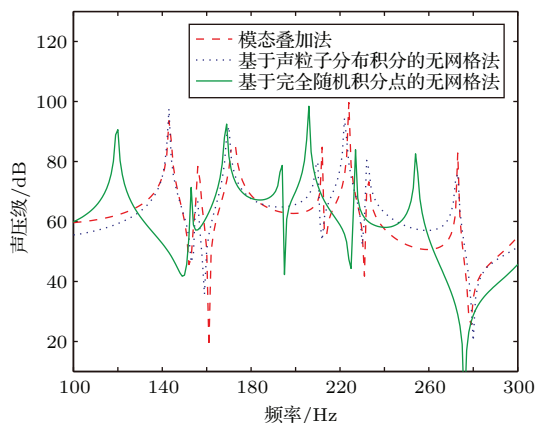


图5 不同分布方式积分点时的计算结果

Fig. 5 Results under different distributions of the integral points

从图5所示的计算结果来看,当积分点完全随机分布时,某些频率上的声模态峰会发生丢失的情况,且在幅值方面,MMPDI的计算结果也更加准确,这说明在相同积分点数目的条件下,基于声粒子分布积分的频率响应由于体现了声场分布规律,精度明显优于随机分布积分点时的计算结果。

4 结论

针对小尺度封闭空间中低频声场的数值计算,本文提出了一种基于声粒子分布积分的无网格数值算法。该方法以经典无网格法为基础,将某个时间点上声场内部分布的声粒子作为积分点,并利用蒙特卡罗法完成无网格法中的积分。与其他方法的对比结果表明,该方法在中频段相比于传统方法具有更高的精度。不过,由于额外增加了声粒子跟踪过程,该方法相比于经典无网格法,在计算耗时上有所增加,尤其是当空间结构更为复杂时,这种耗时增加可能会更加明显。该方法特别适用于飞机坐舱等

更关注中频段声场分布的情况,通过进一步完善后可作为舱内噪声场预计的可选方法。

参 考 文 献

- [1] MIROSLAW M. Analytical and numerical study of acoustic intensity field in irregularly shaped room[J]. Appl. Acoust., 2013, 74(5): 661-668.
- [2] 曾向阳. 声场视听一体化原理及应用[M]. 西安: 西北工业大学出版社, 2007.
- [3] ARETZ M, NÖTHEN R, VORLÄNDER M, et al. Combined broadband impulse responses using FEM and hybrid ray-based method[C]. EAA Symposium on Auralization, Espoo, Finland, 2009.
- [4] YEH H, MEHRA R, REN Z, et al. Wave-ray coupling for interactive sound propagation in large complex scenes[J]. ACM Transactions on Graphics, 2013, 32(6): 2504-2507.
- [5] HE Z C, LI G Y, ZHONG Z H, et al. An improved eigenfrequencies prediction for three-dimensional problems using face-based smoothed finite element method (FS-FEM)[J]. Acta Mechanica Solida Sinica, 2013, 26(2): 140-150.
- [6] BELYTSCHKO T, LU Y Y, GU L. Element-free Galerkin methods[J]. Int. J. Num. Meth. Eng., 1994, 37(2): 229-256.
- [7] WANG H T, ZENG X Y. Calculation of sound fields in small enclosures using a meshless model[J]. Appl. Acoust., 2013, 74(3): 459-466.
- [8] FINLAYSON B A, SCRIVEN L E. The method of weighted residuals - a review[J]. Appl. Mech. Rev., 1966, 19: 735-748.
- [9] NAYROLES B, TOUZOT G, VILLON P. Generalizing the finite element method: diffuse approximation and diffuse elements[J]. Comput. Mech., 1992, 10(5): 307-318.
- [10] LANCASTER P, SALKASKAS K. Surfaces generated by moving least squares methods[J]. Math. Comput., 1981, 37(155): 141-158.
- [11] 张雄, 刘岩. 无网格法[M]. 北京: 清华大学出版社, 2004.
- [12] KOSAKA Y, SAKUMA T. Numerical examination on scattering coefficients of architectural surfaces using boundary element method[J]. Acoust. Sci. Tech., 2005, 26(2): 136-144.