环的弱整体维数和 CM- 自由性

汪军鹏^{1*}, 刘仲奎¹, 张小向²

1. 西北师范大学数学与统计学院, 兰州 730070;

2. 东南大学数学学院, 南京 210096

E-mail: wangjunpeng1218@163.com, liuzk@nwnu.edu.cn, z990303@seu.edu.cn

收稿日期: 2020-05-06; 接受日期: 2020-08-24; 网络出版日期: 2020-12-04; * 通信作者

国家自然科学基金 (批准号: 11971388 和 11871145)、西北师范大学青年教师科研能力提升计划 (批准号: NWNLU-LKQN2019-14)

和甘肃省高等学校创新项目 (批准号: 2020B-087) 资助项目

摘要 设环 R 的弱整体维数有限. 本文证明 R 是强 CM- 自由的. 作为应用, 本文得到一些同伦范畴和相对导出范畴的三角等价和紧生成性. 当 R 弱整体维数不超过 1 时, 本文完全分类了这些等价范畴中的可定义子范畴, 并说明这些等价的范畴在 von Neumann 正则环上满足 Telescope 猜想. 同时将一个广义 Grothendieck 对偶型的三角等价成立的条件由 R 的左、右整体维数有限改进为仅右整体维数有限.

关键词 弱整体维数 (强) CM- 自由性 紧生成性 可定义子范畴 Grothendieck 对偶

MSC (2020) 主题分类 16E50, 18G20, 18G25

1 引言及主要结论

设 R 是环, $R\text{-Mod}$ 是左 R - 模的范畴, 其中所有有限表示左 R - 模构成的子范畴记为 $R\text{-mod}$. 分别用 $R\text{-Proj}$ 和 $R\text{-GProj}$ 表示所有投射左 R - 模和 Gorenstein 投射左 R - 模构成的子范畴, 其中所有的有限表示左 R - 模构成的子范畴分别记为 $R\text{-proj}$ 和 $R\text{-Gproj}$. 注意到

$$R\text{-Proj} \subseteq R\text{-GProj} \subseteq R\text{-Mod} \quad \text{和} \quad R\text{-proj} \subseteq R\text{-Gproj} \subseteq R\text{-mod}.$$

众所周知, $R\text{-GProj} = R\text{-Mod}$ 当且仅当 R 是 QF (quasi-Frobenius) 环; 一个 Artin 代数 R 满足 $R\text{-Gproj} = R\text{-mod}$ 当且仅当 R 是自内射代数. 另一方面, Chen^[1] 把满足等式 $R\text{-Gproj} = R\text{-proj}$ 的 Artin 代数 R 称为 CM- 自由代数. Enochs 等^[2] 将这一概念推广到一般环, 并把满足 $R\text{-GProj} = R\text{-Proj}$ 的环 R 称为强 CM- 自由环. 显然, 强 CM- 自由性蕴涵着 CM- 自由性, 但是否是严格地蕴涵目前未知. 关于一些特殊 Artin 代数的 CM- 自由性的分类参见文献 [1, 3, 4]; 但对于一般的情形, 这个分类问题很困难 (参见文献 [1, 引言]).

英文引用格式: Wang J P, Liu Z K, Zhang X X. Weak global dimension and CM-freeness of rings (in Chinese). Sci Sin Math, 2022, 52: 121–132, doi: 10.1360/SSM-2020-0139

对于一般的环 R , 当 R 的左整体维数有限时, 它是强 CM- 自由的 (参见文献 [5, 命题 2.27]). Ding 等 [6]、Mao 和 Ding [7] 研究了 Ding-Chen 环的强 CM- 自由性. 由文献 [6, 命题 2.14]、[7, 命题 2.9] 和 [8, 定理 1.1] 可知弱整体维数有限的 Ding-Chen 环是强 CM- 自由的. 从而一个自然的问题如下:

问题 A 弱整体维数有限的环是否是强 CM- 自由的?

受文献 [6, 命题 2.14] 和 [7, 命题 2.9] 的启发, 我们通过对 Gorenstein ∞ - 凝聚环同调性质的进一步研究, 在下述定理中给出问题 A 的肯定回答, 其中 $R\text{-Inj}$ ($R\text{-GInj}$ 、 $R\text{-DProj}$ 、 $R\text{-DInj}$) 表示 $R\text{-Mod}$ 中所有内射 (Gorenstein 内射、Ding 投射、Ding 内射) 左 R - 模构成的子范畴.

定理 B (= 定理 4.3) 设 R 是环, 考虑以下条件:

- (1) R 具有有限的弱整体维数;
- (2) R 是强 CM- 自由的, 即 $R\text{-Proj} = R\text{-GProj}$;
- (3) R 是强余 CM- 自由的, 即 $R\text{-Inj} = R\text{-GInj}$;
- (4) $R\text{-Proj} = R\text{-DProj}$;
- (5) $R\text{-Inj} = R\text{-DInj}$,

则有 (1) $\Rightarrow$ (2) $\Rightarrow$ (4) 和 (1) $\Rightarrow$ (3) $\Rightarrow$ (5). 当 R 是 Gorenstein ∞ - 凝聚环时, (1)–(5) 等价.

三角范畴特别是紧生成的三角范畴是现代数学和理论物理等研究领域中的重要工具. 众所周知, 导出范畴和同伦范畴是三角范畴中最常见的例子, 并且通常的导出范畴 $\mathbf{D}(R\text{-Mod})$, 在任意环 R 上紧生成. 自 21 世纪以来, 通常的同伦范畴 $K(R\text{-Mod})$, 及其许多同伦子范畴的紧生成性受到国内外众多学者的广泛关注 (参见文献 [9–13]). 特别地, Šťovíček [9] 证明了 $K(R\text{-Mod})$ 是紧生成的当且仅当 R 是左纯半单环; Neeman [11] 证明了, 当 R 是右凝聚环时, $K(R\text{-Mod})$ 的同伦子范畴 $K(R\text{-Proj})$ 是紧生成的; Šťovíček [12] 证明了, 当 R 是左凝聚环时, $K(R\text{-Mod})$ 的同伦子范畴 $K(R\text{-Inj})$ 是紧生成的; Gao [13] 证明了, 当 R 是有限 CM- 型的几乎 Gorenstein Artin 代数时, $K(R\text{-Mod})$ 的同伦子范畴 $K(R\text{-GProj})$ 是紧生成的, 并且 $K(R\text{-GProj})$ 与 $\mathbf{D}_{\text{GP}}(R)$ (即相对于 $R\text{-GProj}$ 的导出范畴) 三角等价. 事实上, 由文献 [14, 命题 2.6] 可知, 它们还与 Gorenstein 内射版本的两个三角范畴 $K(R\text{-GInj})$ 和 $\mathbf{D}_{\text{GI}}(R)$ 也都三角等价. 因此, 这些等价的三角范畴均紧生成. 另一方面易知, 当 R 具有有限的左整体维数时, $K(R\text{-Proj}) = K(R\text{-GProj})$ 和 $K(R\text{-Inj})$ 均三角等价于 $\mathbf{D}(R\text{-Mod})$, 从而紧生成. 作为定理 B 的应用, 我们有如下推论, 注意到存在弱整体维数有限的环既非左 (或右) 凝聚又具有无限左整体维数 (参见例 3.5), 该推论可视为上述文献 [11–13] 中相关结论在非凝聚环以及环的整体维数无限情形下的继续.

推论 C (= 推论 4.6 和 4.10) 设环 R 具有有限的弱整体维数, 则存在三角等价

$$K(R\text{-Proj}) = K(R\text{-GProj}) \simeq \mathbf{D}_{\text{GP}}(R\text{-Mod}) \simeq \mathbf{D}_{\text{GI}}(R\text{-Mod}) \simeq K(R\text{-GInj}) = K(R\text{-Inj}),$$

并且其中每个三角范畴是紧生成的.

Grothendieck 对偶的讨论是 Verdier 引入三角范畴这一概念的主要动机之一, 起源可追溯到 20 世纪 50 年代末. 注意到 $K(R\text{-Proj})$ 的紧生成性以及如下三角等价在经典的 Grothendieck 对偶定理的证明中起到重要的作用 (参见文献 [11, 15]):

$$K(R\text{-Proj})^c \simeq \mathbf{D}^b(R^{\text{op}}\text{-mod})^{\text{op}},$$

其中左边的范畴表示由 $K(R\text{-Proj})$ 的所有紧对象构成的全三角子范畴, 右边的范畴表示有限表示右 R - 模的有界导出范畴的反范畴. 当环 R 的左、右整体维数均有限时, Jørgensen 在文献 [10, 引言] 中指出这个三角等价成立. 作为推论 C 的一个应用, 我们得到仅在 R 的右整体维数有限时该三角等价也成立 (参见推论 4.10).

设 $\mathcal{C}$ 是紧生成的三角范畴. 称 $\mathcal{C}$ 满足 Telescope 猜想 (或 Smashing 猜想), 如果 $\mathcal{C}$ 中任一 Smashing 子范畴是紧生成的. 尽管 Keller^[16] 指出在一般环上 $\mathbf{D}(R\text{-Mod})$ 并不满足这一猜想, Neeman、Krause、Šťovíček、Bazzoni 和 Hrbek 等学者还是运用不同的方法研究了 $\mathbf{D}(R\text{-Mod})$ 满足 Telescope 猜想的条件. 事实上, Bazzoni 和 Hrbek^[17] 给出了弱整体维数不超过 1 的环上 $\mathbf{D}(R\text{-Mod})$ 中可定义子范畴的分类, 并由此说明在 von Neumann 正则环上 $\mathbf{D}(R\text{-Mod})$ 满足 Telescope 猜想. 结合推论 C 和文献 [17] 中的结论, 我们在 R 弱整体维数不超过 1 时完全分类了推论 C 中任一三角范畴中的可定义子范畴 (参见推论 4.12); 并说明推论 C 中的三角范畴在 von Neumann 正则环上均满足 Telescope 猜想 (参见推论 4.13).

2 预备知识

贯穿全文, R 表示具有单位元的结合环, 而所有的 (左、右) R -模都是酉模. 我们用 $R\text{-Mod}$ 表示左 R -模的范畴, 其中由所有投射、内射和平坦的左 R -模构成的子范畴分别记为 $R\text{-Proj}$ 、 $R\text{-Inj}$ 和 $R\text{-Flat}$; 用 $R^{\text{op}}\text{-Mod}$ 表示右 R -模的范畴, 其中 R^{op} 表示 R 的反环; 分别用 $\text{pd}_R(M)$ 、 $\text{id}_R(M)$ 和 $\text{fd}_R(M)$ 表示一个 R -模 M 的投射、内射和平坦维数; 用 $\mathbf{D}(R\text{-Mod})$ 表示左 R -模的导出范畴, 并用 $\mathbf{RHom}(-, -)$ 表示通常的导出函子; 用 $\mathbf{K}(R\text{-Mod})$ 表示左 R -模的同伦范畴, 其中投射和内射左 R -模构成的同伦子范畴分别记为 $\mathbf{K}(R\text{-Proj})$ 和 $\mathbf{K}(R\text{-Inj})$.

设 $\mathcal{A}$ 是 Abel 范畴. 对每个 $\mathcal{A}$ 中对象的复形

$$C = \cdots \rightarrow C^{m-1} \xrightarrow{\delta_C^{m-1}} C^m \xrightarrow{\delta_C^m} C^{m+1} \xrightarrow{\delta_C^{m+1}} \cdots,$$

分别记 $Z^m(C) = \text{Ker}(\delta_C^m)$ 、 $B^m(C) = \text{Im}(\delta_C^{m-1})$ 和 $H^m(C) = \text{Ker}(\delta_C^m)/\text{Im}(\delta_C^{m-1})$. 称一个复形 C 是正合的 (或零调的), 如果每个 $H^m(C) = 0$.

设 B 是 $\mathcal{A}$ 的对象, $\mathcal{X}$ 是 $\mathcal{A}$ 的子范畴. 令集合

$$\Omega = \{m \in \mathbb{N} \mid \text{存在正合复形 } 0 \rightarrow X^{-m} \rightarrow \cdots \rightarrow X^{-1} \rightarrow X^0 \rightarrow B \rightarrow 0, \text{ 其中每个 } X^i \in \mathcal{X}\}.$$

若 Ω 非空, 则定义 B 的 $\mathcal{X}$ -投射维数为 $\mathcal{X}\text{-pd}(B) = \inf \Omega$, 否则记 $\mathcal{X}\text{-pd}(B) = \infty$. 对偶地可以定义 $\mathcal{X}$ -内射维数.

根据文献 [18], 称左 R -模 M 是 FP_∞ 型的, 如果存在左 R -模的正合序列

$$\cdots \rightarrow P_1 \rightarrow P_0 \rightarrow M \rightarrow 0,$$

其中每个 P_i 都是有限生成投射的.

称左 R -模 M 是绝对 clean 模, 如果对任意的 FP_∞ 型左 R -模 T , 都有 $\text{Ext}_R^1(T, M) = 0$; 称右 R -模 N 是 level 模, 如果对任意的 FP_∞ 型左 R -模 T , 都有 $\text{Tor}_1^R(N, T) = 0$. 分别用 $R\text{-AbsC}$ 和 $R\text{-Lev}$ 表示由所有绝对 clean 和 level 左 R -模构成的 $R\text{-Mod}$ 的子范畴, 分别用 $\text{Lev-pd}_R(X)$ 和 $\text{AbsC-id}_R(X)$ 表示 R -模 X 的 $R\text{-Lev}$ -投射维数和 $R\text{-AbsC}$ -内射维数.

设 $\mathcal{X}$ 和 $\mathcal{Y}$ 是 Abel 范畴 $\mathcal{A}$ 的子范畴. 称二元组 $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ 是一个余挠对, 如果 $\mathcal{Y} = \mathcal{X}^\perp$ 且 $\mathcal{X} = {}^\perp\mathcal{Y}$, 这里 $\mathcal{X}^\perp = \{A \in \mathcal{A} \mid \text{Ext}_{\mathcal{A}}^1(X, A) = 0, \forall X \in \mathcal{X}\}$, 对偶地可定义 ${}^\perp\mathcal{Y}$. 称余挠对 $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ 是遗传的, 如果对任意的 $X \in \mathcal{X}$ 和 $Y \in \mathcal{Y}$ 及任意的 $m \geq 1$, 都有 $\text{Ext}_{\mathcal{A}}^m(X, Y) = 0$. 称余挠对 $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ 是完备的, 如果对任意的 $A \in \mathcal{A}$, 都存在如下两个 $\mathcal{A}$ 中的短正合序列:

$$0 \rightarrow Y \rightarrow X \rightarrow A \rightarrow 0 \quad \text{和} \quad 0 \rightarrow A \rightarrow Y' \rightarrow X' \rightarrow 0,$$

其中 $X, X' \in \mathcal{X}$ 且 $Y, Y' \in \mathcal{Y}$.

3 Gorenstein ∞ - 凝聚环

为后文的需要, 本节给出 Gorenstein ∞ - 凝聚环的定义、例子和基本事实.

定义 3.1 ^[19] 称 R 为 AC-Gorenstein 环, 如果存在非负整数 m , 使得对每个绝对 clean 左或右 R -模 A , 都有 $\text{Lev-pd}_R(A) \leq m$.

定义 3.2 ^[20] 称 R 为 Gorenstein ∞ - 凝聚环, 如果存在非负整数 m , 使得对每个绝对 clean 左或右 R -模 A , 都有 $\text{fd}_R(A) \leq m$.

注 3.3 (1) 称环 R 是 Gorenstein 环 (Ding-Chen 环), 如果存在非负整数 m , 使得 R 是 m -Gorenstein 环 (m -FC 环), 即 R 是双边 Noether (凝聚) 环, 并且 R 的双边自内射 (自 FP- 内射) 维数不超过 m . 特别地, 0-Gorenstein 环 (0-FC 环) 即 QF 环 (FC 环). 由文献 [20, 注 4.2] 可知, 每个 Gorenstein 环 (Ding-Chen 环) 是 Gorenstein ∞ - 凝聚环. 但反之未必成立 (参见文献 [20, 例 5.4]).

(2) 显然, 弱整体维数有限的环是 Gorenstein ∞ - 凝聚环. 但反之未必成立. 事实上, 由文献 [6, 注 3.3] 可知, $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ 是 QF 环 (从而由 (1) 可知它是 Gorenstein ∞ - 凝聚环), 但弱整体维数无限.

(3) 显然每个 Gorenstein ∞ - 凝聚环是 AC-Gorenstein 环. 下面例子说明反之未必成立. 令 $R = K \rtimes E$ 是 K 通过 E 的平凡扩张, 其中 K 是域, E 是无限维的 K - 向量空间, 则由文献 [21, 例 2.8] 可知, 所有左、右 R -模都是 level 模. 因此 R 是 AC-Gorenstein 环. 另一方面, 由文献 [22, 定理 3.4] 的证明可知, R 的弱整体维数无限. 可见 R 不是 Gorenstein ∞ - 凝聚环.

称左 R -模 M 是 Gorenstein 投射 ^[23] (或 Ding 投射 ^[6, 24], 或 Gorenstein AC- 投射 ^[18]) 的, 如果存在一个由投射左 R -模构成的 $\text{Hom}(-, R\text{-Proj})$ - 正合 (或 $\text{Hom}(-, R\text{-Flat})$ - 正合, 或 $\text{Hom}(-, R\text{-Lev})$ - 正合) 的正合序列

$$\cdots \rightarrow P_1 \rightarrow P_0 \rightarrow P^0 \rightarrow P^1 \rightarrow \cdots$$

使得 $M \cong \text{Im}(P_0 \rightarrow P^0)$. 对偶地可以定义 Gorenstein 内射 ^[23] (或 Ding 内射 ^[7, 24], 或 Gorenstein AC- 内射 ^[18]) 模. 分别用 $R\text{-GProj}$ 、 $R\text{-GInj}$ 、 $R\text{-DProj}$ 、 $R\text{-DInj}$ 、 $R\text{-GPac}$ 和 $R\text{-GIac}$ 表示 $R\text{-Mod}$ 中所有 Gorenstein 投射、Gorenstein 内射、Ding 投射、Ding 内射、Gorenstein AC- 投射和 Gorenstein AC- 内射左 R -模构成的子范畴.

引理 3.4 设 R 是 Gorenstein ∞ - 凝聚环, 则对任意的左 R -模 M , 以下条件等价:

- (1) M 是 Gorenstein AC- 投射模;
- (2) M 是 Ding 投射模;
- (3) M 是 Gorenstein 投射模;
- (4) 存在左 R -模的正合序列 $0 \rightarrow M \rightarrow P^0 \rightarrow P^1 \rightarrow \cdots$, 其中每个 P^i 是投射的.

证明 (1) $\Rightarrow$ (2) $\Rightarrow$ (3) $\Rightarrow$ (4) 显然.

(4) $\Rightarrow$ (1). 由 (4) 知, 存在如下投射左 R -模的正合序列:

$$\mathbf{P} = \cdots \rightarrow P_1 \rightarrow P_0 \rightarrow P^0 \rightarrow P^1 \rightarrow \cdots,$$

使得 $M = \text{Im}(P_0 \rightarrow P^0)$. 设 A 是任一绝对 clean 右 R -模, 则由 R 的 Gorenstein ∞ - 凝聚性可知, $\text{fd}_R(A) < \infty$. 从而运用通常的同调代数方法可以证得 $A \otimes_R \mathbf{P}$ 是正合的. 所以由文献 [18, 定理 A.6] 可知, M 是 Gorenstein AC- 投射的. $\square$

本节最后给出一些具有有限弱整体维数环的例子.

例 3.5 (1) 考虑环的有限直积 $R = R_1 \times \cdots \times R_m$. 易知 R 具有有限的 (弱) 整体维数当且仅当每个 R_i 具有有限的 (弱) 整体维数, 并且 R 是 (左、右) 凝聚环当且仅当每个 R_i 是 (左、右) 凝聚环.

(2) 显然具有有限整体维数的环和 von Neumann 正则环都具有有限的弱整体维数. 注意到 von Neumann 正则环是左、右凝聚环. 下面例子说明存在环具有有限的弱整体维数, 但既不具有有限的整体维数, 又非左 (右) 凝聚. 例如, 考虑环的直积 $R = S_1 \times S_2$, 其中 $S_1 = D + (x_1, x_2)K[x_1, x_2]$, 这里 D 是 Dedekind 整环而 K 是其商域; $S_2 = F_\alpha$ 是以 $\aleph_\alpha$ 为生成子的 Boolean 环, 这里 α 是一个无限基数. 由文献 [25, 第 128 页] 可知, S_1 是整体维数为 2 的交换环 (因而 S_1 的弱整体维数有限), 但 R 不是凝聚环. 由文献 [26, 例 3.3] 可知, S_2 是交换的 von Neumann 正则环 (因而 S_2 是凝聚环, S_2 的弱整体维数有限), 但具有无限的整体维数. 因此, 由 (1) 中事实可知, R 具有有限的弱整体维数, 但既不具有有限整体维数, 又非左 (右) 凝聚.

根据以下事实, 我们还可以通过已知的环构造更多的环具有有限的弱整体维数.

注 3.6 (1) 设 $R \subseteq S$ 是优越扩张, 则 R 与 S 的弱整体维数相同 (参见文献 [27, 定理 3]);

(2) 设 $R \subseteq S$ 是可分 Frobenius 扩张, 则 R 与 S 的弱整体维数相同 (参见文献 [28, 定理 8']);

(3) 设

$$T(R) = \begin{pmatrix} R & R \\ 0 & R \end{pmatrix}$$

是特殊形式的上三角矩阵环, 则 $T(R)$ 的弱整体维数比 R 的弱整体维数多 1 (参见文献 [29, 推论 3.7]);

(4) 称环的满同态 (范畴意义下) $f: R \rightarrow S$ 是同调的, 如果 S 作为 R -模具有有限的平坦维数 (通常环的局部化对应的环同态是常见环的同调满同态的例子). 此时, 若 R 具有有限的弱整体维数, 则 S 也具有有限的弱整体维数.

4 弱整体维数和强 CM- 自由性

本节给出引言中主要定理及一些推论的证明.

对于一个非负整数 m , 约定环 R 满足条件 (m -AbsC-Lev) (或 (m -AbsC-Flat)) 是指所有左、右绝对 clean R -模 M 均满足 $\text{Lev-pd}_R(M) \leq m$ (或 $\text{fd}_R(M) \leq m$). 注意到 R 为 AC-Gorenstein 环 (或 Gorenstein ∞ -凝聚环), 即存在某个非负整数 m 使得 R 满足条件 (m -AbsC-Lev) (或 (m -AbsC-Flat)).

引理 4.1 (参见文献 [19, 定理 4.2] 和 [20, 引理 4.3]) 设 m 如上, R 是满足条件 (m -AbsC-Lev) 的 AC-Gorenstein 环, 则对任意的左或右 R -模 M , 以下条件等价:

- (1) $\text{Lev-pd}_R(M) < \infty$;
- (2) $\text{Lev-pd}_R(M) \leq m$;
- (3) $\text{AbsC-id}_R(M) < \infty$;
- (4) $\text{AbsC-id}_R(M) \leq m$.

若 R 是满足条件 (m -AbsC-Flat) 的 Gorenstein ∞ -凝聚环, 则上述条件还等价于

- (5) $\text{fd}_R(M) < \infty$;
- (6) $\text{fd}_R(M) \leq m$.

我们用 $\mathcal{W}$ 表示 $R\text{-Mod}$ 中满足 $\text{Lev-pd}_R(M) < \infty$ 的所有左 R -模 M 构成的子范畴. 设 R 是 Gorenstein ∞ -凝聚环, 则由文献 [19, 定理 6.2 和 7.1] 可知二元组 $(R\text{-GPac}, \mathcal{W})$ 和 $(\mathcal{W}, R\text{-GIac})$ 均构成

$R\text{-Mod}$ 中的完备遗传的余挠对 (其中后一余挠对还可参见文献 [20, 引理 5.1] 的证明). 另一方面, 分别由文献 [20, 定理 4.5] 和引理 3.4 可知, $R\text{-GInj} = R\text{-DInj} = R\text{-GIac}$ 和 $R\text{-Proj} = R\text{-DProj} = R\text{-GPac}$. 由这些事实可直接得到如下结论.

引理 4.2 设 R 是 Gorenstein ∞ -凝聚环, 则左 R -模范畴中存在如下完备遗传的余挠对:

$$(R\text{-DProj}, \mathcal{W}) = (R\text{-GProj}, \mathcal{W}) \quad \text{和} \quad (\mathcal{W}, R\text{-DInj}) = (\mathcal{W}, R\text{-GInj}).$$

下述定理是本文的主要结论.

定理 4.3 设 R 是环, 考虑以下条件:

- (1) R 具有有限的弱整体维数;
- (2) R 是强左 CM-自由的, 即 $R\text{-Proj} = R\text{-GProj}$;
- (3) R 是强左余 CM-自由的, 即 $R\text{-Inj} = R\text{-GInj}$;
- (4) $R\text{-Proj} = R\text{-DProj}$;
- (5) $R\text{-Inj} = R\text{-DInj}$,

则有 (1) $\Rightarrow$ (2) $\Rightarrow$ (4) 和 (1) $\Rightarrow$ (3) $\Rightarrow$ (5). 当 R 是 Gorenstein ∞ -凝聚环时, (1)–(5) 等价.

证明 (1) $\Rightarrow$ (2). 设环 R 的弱整体维数有限, M 是 Gorenstein 投射左 R -模. 由 R 的 Gorenstein ∞ -凝聚性和引理 3.4 知, M 是 Ding 投射的. 故由文献 [6, 引理 2.4] 知, M 是投射的.

(2) $\Rightarrow$ (4) 由 $R\text{-Proj} \subseteq R\text{-DProj} \subseteq R\text{-GProj}$ 可得.

(4) $\Rightarrow$ (1). 设 M 是任一左 R -模. 由 R 的 Gorenstein ∞ -凝聚性和引理 4.2 可知, 存在左 R -模的短正合序列

$$0 \rightarrow M \rightarrow W \rightarrow G \rightarrow 0,$$

其中 $W \in \mathcal{W}$ 且 $G \in R\text{-DProj}$. 由 (4) 知 $G \in R\text{-Proj}$, 从而上述短正合列可裂, 故 M 同构于 W 的某个直和因子. 由 R 的 Gorenstein ∞ -凝聚性和引理 4.1 可知, $\text{fd}_R(W) < \infty$, 因此, $\text{fd}_R(M) < \infty$.

(1) $\Rightarrow$ (3). 设 R 具有有限的弱整体维数, M 是任一 Gorenstein 内射左 R -模. 由 R 的 Gorenstein ∞ -凝聚性和文献 [20, 定理 4.5] 可知, M 是 Gorenstein AC-内射的. 从而存在左 R -模的短正合序列 $0 \rightarrow M \rightarrow I \rightarrow C \rightarrow 0$, 其中 I 是内射的, 且 C 是 Gorenstein AC-内射的. 注意到 $\text{fd}_R(C) < \infty$, 从而由 R 的 Gorenstein ∞ -凝聚性和引理 4.1 可知, $\text{AbsC-id}_R(C) < \infty$. 由于 $R\text{-AbsC}$ 是内射可解的 (参见文献 [18, 命题 2.7]), 于是由通常的同调代数方法可以证明 $\text{Ext}_R^1(C, M) = 0$. 从而短正合序列 $0 \rightarrow M \rightarrow I \rightarrow C \rightarrow 0$ 可裂, 进而 M 是内射的.

(3) $\Rightarrow$ (5) 和 (5) $\Rightarrow$ (1) 分别对偶于 (2) $\Rightarrow$ (4) 和 (4) $\Rightarrow$ (1). □

众所周知, $R\text{-GProj}$ 连同每项均属于 $R\text{-GProj}$ 的短正合序列构成 $R\text{-Mod}$ 的 Frobenius 正合子范畴 (参见文献 [30, 定理 7.1.7(iii)]), 从而稳定范畴 $R\text{-GProj}$ 是三角范畴 (参见文献 [30, 定理 6.2.1]), 并且该三角范畴诱导了著名的 Buchweitz-Happel 定理及其逆定理 (参见文献 [30, 定理 8.1.2]). 最近, Zheng 和 Huang 在文献 [31, 定理 3.4] 中证明了在任意环上存在三角等价

$$R\text{-GProj} \simeq \mathbf{D}^b(R\text{-Mod})_{f\text{GP}}/K^b(R\text{-Proj}),$$

其中 $\mathbf{D}^b(R\text{-Mod})_{f\text{GP}}$ 表示有界导出范畴 $\mathbf{D}^b(R\text{-Mod})$ 的由所有具有有限 Gorenstein 投射维数的同调有界复形构成的全三角子范畴, $K^b(R\text{-Proj})$ 表示投射模的有界同伦范畴. 对偶地, 稳定范畴 $R\text{-GInj}$ 是三角范畴, 并存在相应的三角等价 $R\text{-GInj} \simeq \mathbf{D}^b(R\text{-Mod})_{f\text{GI}}/K^b(R\text{-Inj})$ (参见文献 [31, 注记 3.5]). 注意, 我们用 $K(R\text{-Proj})$ 和 $K(R\text{-Inj})$ 表示投射模和内射模的 (无界) 同伦子范畴.

Gao 和 Zhang^[32] 引入并研究了 Gorenstein 投射导出范畴 $\mathbf{D}_{\text{GP}}(R\text{-Mod})$. 注意到该相对导出范畴与通常的导出范畴 $\mathbf{D}(R\text{-Mod})$ 之间存在紧密的联系. 事实上, 由文献 [32, 推论 2.5] 可知, 存在自然的三角商函子 $\Pi: \mathbf{D}_{\text{GP}}(R\text{-Mod}) \rightarrow \mathbf{D}(R\text{-Mod})$, 并且 Π 是三角等价当且仅当 $R\text{-Proj} = R\text{-GProj}$. 对偶地, 对于 Gorenstein 内射导出范畴 $\mathbf{D}_{\text{GI}}(R\text{-Mod})$, 也有相应的结论.

基于以上事实, 易得下述引理, 其中 $K(R\text{-GProj})$ 和 $K(R\text{-GInj})$ 表示 Gorenstein 投射模和 Gorenstein 内射模的同伦子范畴.

引理 4.4 设 R 是环, 则以下条件等价:

- (1) R 是强左 CM- 自由的, 即 $R\text{-Proj} = R\text{-GProj}$;
- (2) $R\text{-GProj} = 0$;
- (3) $\mathbf{D}^b(R\text{-Mod})_{f\text{GP}}/K^b(R\text{-Proj}) = 0$;
- (4) $\mathbf{D}_{\text{GP}}(R\text{-Mod}) \simeq \mathbf{D}(R\text{-Mod})$;
- (5) $K(R\text{-Proj}) = K(R\text{-GProj})$.

对偶地, 以下条件等价:

- (6) R 是强左余 CM- 自由的, 即 $R\text{-Inj} = R\text{-GInj}$;
- (7) $R\text{-GInj} = 0$;
- (8) $\mathbf{D}^b(R\text{-Mod})_{f\text{GI}}/K^b(R\text{-Inj}) = 0$;
- (9) $\mathbf{D}_{\text{GI}}(R\text{-Mod}) \simeq \mathbf{D}(R\text{-Mod})$;
- (10) $K(R\text{-Inj}) = K(R\text{-GInj})$.

设 $\mathcal{T}$ 是具有任意直和的三角范畴. 称 $\mathcal{T}$ 中的对象 X 是紧的, 如果对 $\mathcal{T}$ 中的任意一族对象 $\{Y_j \mid j \in J\}$, 标准态射

$$\coprod_{j \in J} \text{Hom}_{\mathcal{T}}(X, Y_j) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{T}}\left(X, \coprod_{j \in J} Y_j\right)$$

是同构. 称该三角范畴 $\mathcal{T}$ 是紧生成的, 如果存在 $\mathcal{T}$ 中紧对象构成的集合 $\mathcal{S}$, 使得对每个 $\mathcal{T}$ 中非零对象 Y , 都存在非零同态 $f: \Sigma^m S \rightarrow Y$, 其中 $S \in \mathcal{S}$, $m \in \mathbb{Z}$, Σ 是 $\mathcal{T}$ 的平移函子.

注意到在任意环 R 上 $\mathbf{D}(R\text{-Mod})$ 是紧生成的 (参见文献 [30, 注第 258 页]), 从而由定理 4.3 和引理 4.4 可直接得到如下推论.

推论 4.5 设环 R 具有有限的弱整体维数, 则存在三角等价 $\mathbf{D}_{\text{GP}}(R\text{-Mod}) \simeq \mathbf{D}(R\text{-Mod}) \simeq \mathbf{D}_{\text{GI}}(R\text{-Mod})$; 特别地, $\mathbf{D}_{\text{GP}}(R\text{-Mod}) \simeq \mathbf{D}_{\text{GI}}(R\text{-Mod})$ 是紧生成的.

贯穿下文, 用 $\text{Ch}(R)$ 表示左 R - 模的复形范畴. 设 $X, Y \in \text{Ch}(R)$. 用 $\mathcal{H}om(X, Y)$ 表示如下 Abel 群的复形:

$$\cdots \longrightarrow \prod_{k \in \mathbb{Z}} \text{Hom}_R(X^k, Y^{k+m}) \xrightarrow{\delta^m} \prod_{k \in \mathbb{Z}} \text{Hom}(X^k, Y^{k+m+1}) \longrightarrow \cdots,$$

其中 δ^m 定义为

$$\delta^m((f^k)_{k \in \mathbb{Z}}) = (\delta_Y^{k+m} f^k - (-1)^m f^{k-1} \delta_X^k)_{k \in \mathbb{Z}}, \quad \forall (f^k)_{k \in \mathbb{Z}} \in \mathcal{H}om(X, Y)^m.$$

对 $R\text{-Mod}$ 中的任一余挠对 $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$, Gillespie^[33] 引入了下述定义, 其中 $C \in \text{Ch}(R)$.

- (1) 称 C 为 $\mathcal{X}$ 复形, 如果 C 是零调的, 并且每个 $Z^i(C) \in \mathcal{X}$;
- (2) 称 C 为 $\mathcal{Y}$ 复形, 如果 C 是零调的, 并且每个 $Z^i(C) \in \mathcal{Y}$;
- (3) 称 C 为 dg- $\mathcal{X}$ 复形, 如果每个 $C^i \in \mathcal{X}$, 并且对于任意的 $\mathcal{Y}$ 复形 Y , Abel 群的复形 $\mathcal{H}om(C, Y)$ 是零调的;

(4) 称 C 为 $\text{dg-}\mathcal{Y}$ 复形, 如果每个 $C^i \in \mathcal{Y}$, 并且对于任意的 $\mathcal{X}$ 复形 X , Abel 群的复形 $\text{Hom}(X, C)$ 是零调的.

注意到, 当 $(\mathcal{X}, \mathcal{Y}) = (R\text{-Proj}, R\text{-Mod})$ 时, $\text{dg-}\mathcal{X}$ 复形即 DG- 投射复形; 当 $(\mathcal{X}, \mathcal{Y}) = (R\text{-Mod}, R\text{-Inj})$ 时, $\text{dg-}\mathcal{Y}$ 复形即 DG- 内射复形.

设 R 是 Gorenstein ∞ - 凝聚环, 则由引理 4.2 可知存在 R - 模范畴中的完备遗传的余挠对

$$(R\text{-GProj}, \mathcal{W}) = (R\text{-DProj}, \mathcal{W}) \quad \text{和} \quad (\mathcal{W}, R\text{-GInj}) = (\mathcal{W}, R\text{-DInj}) = (\mathcal{W}, R\text{-GIac}).$$

分别当 $(\mathcal{X}, \mathcal{Y}) = (R\text{-GProj}, \mathcal{W})$ 和 $(\mathcal{X}, \mathcal{Y}) = (R\text{-DProj}, \mathcal{W})$ 时, 定义 $\text{dg-}\mathcal{X}$ 复形为 DG-Gorenstein 投射复形和 DG-Ding 投射复形; 分别当 $(\mathcal{X}, \mathcal{Y}) = (\mathcal{W}, R\text{-GInj})$ 、 $(\mathcal{X}, \mathcal{Y}) = (\mathcal{W}, R\text{-DInj})$ 和 $(\mathcal{X}, \mathcal{Y}) = (\mathcal{W}, R\text{-GIac})$ 时, 定义 $\text{dg-}\mathcal{Y}$ 复形为 DG-Gorenstein 内射复形、DG-Ding 内射复形和 DG-Gorenstein AC- 内射复形; 定义 $\mathcal{W}$ 复形为一个正合复形 X , 并满足每个 $Z^i(X) \in \mathcal{W}$.

由文献 [20, 引理 5.1 和定理 4.5] 可知, 一个复形 C 是 DG-Gorenstein AC- 内射复形当且仅当每个 C^i 是 Gorenstein 内射模. 注意到在 Gorenstein ∞ - 凝聚环上, DG-Gorenstein 内射复形、DG-Ding 内射复形和 DG-Gorenstein AC- 内射复形均一致, 从而有如下引理.

引理 4.6 设 R 是 Gorenstein ∞ - 凝聚环, $C \in \text{Ch}(R)$, 则以下条件等价:

- (1) C 是 DG-Gorenstein 内射复形;
- (2) 每个 C^i 是 Gorenstein 内射模.

称 X 为 Ding 投射复形^[34], 如果存在一个由投射复形构成的正合序列

$$\cdots \rightarrow P_{-1} \rightarrow P_0 \rightarrow P_1 \rightarrow P_2 \rightarrow \cdots$$

使得 $X \cong \text{Im}(P_0 \rightarrow P_1)$, 并且对任意平坦复形 Q , 函子 $\text{Hom}_{\text{Ch}R}(-, Q)$ 仍保持该序列的正合性.

由文献 [35, 定理 4.13] 可知一个复形 C 是 Ding 投射复形当且仅当每个 C^i 是 Ding 投射模. 由文献 [34, 定理 3.7] 可知, 对任意 Ding 投射复形 C 和平坦复形 F , $\text{Hom}(C, F)$ 是正合的. 基于这些事实, 下述引理给出 DG-Gorenstein 投射复形的刻画.

引理 4.7 设 R 是 Gorenstein ∞ - 凝聚环, 则对任意 $C \in \text{Ch}(R)$, 以下条件等价:

- (1) C 是 DG-Gorenstein 投射复形;
- (2) C 是 Ding 投射复形;
- (3) 每个 C^i 是 Ding 投射模;
- (4) 每个 C^i 是 Gorenstein 投射模.

证明 (1) $\Rightarrow$ (4) 显然, (4) $\Leftrightarrow$ (3) 由引理 3.4 可得, (3) $\Leftrightarrow$ (2) 由文献 [35, 定理 4.13] 可得.

(2) $\Rightarrow$ (1). 设 W 是任一 $\mathcal{W}$ 复形, 下证 Abel 群的复形 $\text{Hom}(C, W)$ 是正合的. 根据定义可知, W 是正合复形, 并且每个 $Z^i W \in \mathcal{W}$. 由引理 4.1 可知, 存在某个非负整数 m , 使得对任意的 $i \in \mathbb{Z}$, 有 $\text{fd}_R(Z^i W) \leq m$. 这说明, 在 $\text{Ch}(R)$ 中, W 的平坦维数 (即所有 $Z^i W$ 平坦维数的上确界) $\text{fd}_{\text{Ch}(R)}(W)$, 不超过 m . 下面对 $\text{fd}_{\text{Ch}(R)}(W) = n \leq m$ 进行数学归纳. 若 $n = 0$, 即 W 是平坦复形, 则由文献 [34, 定理 3.7] 可知 $\text{Hom}(C, W)$ 是正合的. 设 $n > 0$. 考虑 $\text{Ch}(R)$ 中的短正合序列

$$0 \rightarrow K \rightarrow F \rightarrow W \rightarrow 0,$$

其中 F 是平坦复形, 则存在如下 Abel 群复形的短正合序列:

$$0 \rightarrow \text{Hom}(C, K) \rightarrow \text{Hom}(C, F) \rightarrow \text{Hom}(C, W) \rightarrow 0.$$

注意到 $\text{fd}_{\text{Ch}(R)}(K) \leq \text{fd}_{\text{Ch}(R)}(W) - 1$, 从而由归纳假设可知 $\mathcal{H}om(C, K)$ 正合. 另一方面, 由文献 [34, 定理 3.7] 可知 $\mathcal{H}om(C, F)$ 是正合的. 因此, $\mathcal{H}om(C, W)$ 是正合的. $\square$

由以上两个引理和定理 4.3 可直接得到如下推论:

推论 4.8 设环 R 的弱整体维数有限, $C \in \text{Ch}(R)$, 则

- (1) C 是 DG- 投射复形当且仅当每个 C^i 是 (Gorenstein) 投射模;
- (2) C 是 DG- 内射复形当且仅当每个 C^i 是 (Gorenstein) 内射模.

用 $\text{K}(\text{DG-Proj})$ 和 $\text{K}(\text{DG-Inj})$ 分别表示所有左 R - 模的 DG- 投射和 DG- 内射复形构成的同伦子范畴. 推论 4.8 说明, 若环 R 的弱整体维数有限, 则存在等式

$$\text{K}(R\text{-GProj}) = \text{K}(R\text{-Proj}) = \text{K}(\text{DG-Proj}) \quad \text{和} \quad \text{K}(R\text{-GInj}) = \text{K}(R\text{-Inj}) = \text{K}(\text{DG-Inj}).$$

众所周知, 对任意环 R , 存在三角等价 $\text{K}(\text{DG-Proj}) \simeq \mathbf{D}(R\text{-Mod}) \simeq \text{K}(\text{DG-Inj})$ (参见文献 [30, 定理 5.3.2]), 并且 $\mathbf{D}(R\text{-Mod})$ 是紧生成的. 根据这些事实、定理 4.3 和引理 4.4, 可以直接得到如下推论.

推论 4.9 设环 R 的弱整体维数有限, 则存在三角等价

$$\text{K}(R\text{-GProj}) = \text{K}(R\text{-Proj}) \simeq \mathbf{D}(R\text{-Mod}) \simeq \text{K}(R\text{-Inj}) = \text{K}(R\text{-GInj});$$

特别地, $\text{K}(R\text{-Proj}) = \text{K}(R\text{-GProj}) \simeq \text{K}(R\text{-GInj}) = \text{K}(R\text{-Inj})$ 是紧生成的.

对任一紧生成的三角范畴 $\mathcal{G}$, 用 $\mathcal{G}^c$ 表示由 $\mathcal{G}$ 的所有紧对象构成的全三角子范畴. 由文献 [10, 引言] 可知, 当 R 具有左、右整体维数时, $\text{K}(R\text{-Proj})$ 是紧生成的, 并且存在如下的三角等价:

$$\text{K}(R\text{-Proj})^c \simeq \mathbf{D}^b(R^{\text{op}}\text{-mod})^{\text{op}},$$

其中右边的范畴表示有限生成右 R - 模的有界导出范畴的反范畴. 作为推论 4.9 的一个应用, 下述结论将这一紧生成性和三角等价均成立的条件改进为仅具有有限的右整体维数.

推论 4.10 设环 R 具有有限的右整体维数, 则 $\text{K}(R\text{-Proj})$ 和 $\text{K}(R^{\text{op}}\text{-Proj})$ 均是紧生成的, 并且存在如下的三角等价:

$$\text{K}(R\text{-Proj})^c \simeq \mathbf{D}^b(R^{\text{op}}\text{-mod})^{\text{op}} \quad \text{和} \quad \text{K}(R\text{-Proj})^c \simeq (\text{K}(R^{\text{op}}\text{-Proj})^c)^{\text{op}}.$$

证明 首先由环 R 右整体维数的有限性可知, R 具有有限的弱整体维数, 从而由推论 4.9 和弱整体维数有限性的对称性 (所有左 R - 模的平坦维数的上确界等于所有右 R - 模的平坦维数的上确界) 可知, $\text{K}(R\text{-Proj})$ 和 $\text{K}(R^{\text{op}}\text{-Proj})$ 均是紧生成的; 同时存在如下三角等价:

$$\text{K}(R\text{-Proj}) \simeq \mathbf{D}(R\text{-Mod}) \quad \text{和} \quad \text{K}(R^{\text{op}}\text{-Proj}) \simeq \mathbf{D}(R^{\text{op}}\text{-Mod}).$$

从而存在限制的三角等价

$$\text{K}(R\text{-Proj})^c \simeq \mathbf{D}(R\text{-Mod})^c \quad \text{和} \quad \text{K}(R^{\text{op}}\text{-Proj})^c \simeq \mathbf{D}(R^{\text{op}}\text{-Mod})^c.$$

我们断言存在如下的三角等价:

$$\mathbf{D}(R\text{-Mod})^c \simeq (\mathbf{D}(R^{\text{op}}\text{-Mod})^c)^{\text{op}} \simeq \mathbf{D}^b(R^{\text{op}}\text{-mod})^{\text{op}},$$

其中 $(\mathbf{D}(R^{\text{op}}\text{-Mod})^c)^{\text{op}}$ 表示 $\mathbf{D}(R^{\text{op}}\text{-Mod})^c$ 的反范畴, 从而可得欲证的三角等价. 事实上, 一方面, 运用通常的方法可以证明导出函子

$$\mathbf{R}\text{Hom}(-, R) : \mathbf{D}(R\text{-Mod})^c \rightarrow \mathbf{D}(R^{\text{op}}\text{-Mod})^c$$

是三角对偶, 即 $\mathbf{R}\mathrm{Hom}(-, R)$ 诱导了第一个三角等价. 另一方面, 由于 R 的右整体维数有限, 从而易证存在三角等价 $\mathbf{D}(R^{\mathrm{op}}\text{-Mod})^c \simeq \mathbf{D}^b(R^{\mathrm{op}}\text{-mod})$, 进而有另一个三角等价. $\square$

注 4.11 当 R 是左 Noether 环时, Krause^[36] 证明了 $\mathbf{K}(R\text{-Inj})$ 是紧生成的, 并且存在三角等价 $\mathbf{K}(R\text{-Inj})^c \simeq \mathbf{D}^b(R\text{-mod})$. 当 R 具有有限的右整体维数时, 由推论 4.10 的证明可知, $\mathbf{K}(R\text{-Inj})$ 和 $\mathbf{K}(R^{\mathrm{op}}\text{-Inj})$ 是紧生成的, 并且存在三角等价

$$\mathbf{K}(R\text{-Inj})^c \simeq \mathbf{D}^b(R^{\mathrm{op}}\text{-mod})^{\mathrm{op}} \quad \text{和} \quad \mathbf{K}(R\text{-Inj})^c \simeq (\mathbf{K}(R^{\mathrm{op}}\text{-Inj})^c)^{\mathrm{op}}.$$

众所周知, 左 R -模的短正合序列 $0 \rightarrow M \rightarrow N \rightarrow L \rightarrow 0$ 是纯正合的当且仅当对任意的有限生成左 R -模 P , 都存在诱导的 Abel 群的正合序列

$$0 \rightarrow \mathrm{Hom}_R(P, M) \rightarrow \mathrm{Hom}_R(P, N) \rightarrow \mathrm{Hom}_R(P, L) \rightarrow 0,$$

此时称 M 为 N 的纯子模. 称 $R\text{-Mod}$ 的子范畴 $\mathcal{X}$ 是可定义的, 如果 $\mathcal{X}$ 对直积、正向极限和纯子模封闭. 注意到这些概念在紧生成的代数三角范畴中有相应的版本. 设 $\mathcal{T}$ 是紧生成的代数三角范畴, Σ 是 $\mathcal{T}$ 的平移函子. 称好三角 $X \rightarrow Y \rightarrow Z \rightarrow \Sigma X$ 是纯好三角, 如果对 $\mathcal{T}$ 的任意紧对象 C , 都存在诱导的 Abel 群的正合序列

$$0 \rightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(C, X) \rightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(C, Y) \rightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(C, Z) \rightarrow 0,$$

此时称 X 为 Y 的纯子对象. 称 $\mathcal{T}$ 的子范畴 $\mathcal{X}$ 是可定义的, 如果 $\mathcal{X}$ 对直积、同伦正向极限和纯子对象封闭. 设 R 的弱整体维数不超过 1. Bazzoni 和 Hrbek^[17] 用 $R\text{-Mod}$ 中的可定义子范畴刻画了 $\mathbf{D}(R\text{-Mod})$ 中可定义子范畴. 下述结论运用这一事实刻画一些同伦子范畴和相对导出范畴的可定义子范畴.

推论 4.12 设环 R 的弱整体维数不超过 1, $\mathcal{T}$ 表示相互三角等价的三角范畴 $\mathbf{K}(R\text{-Proj}) = \mathbf{K}(R\text{-GProj}) \simeq \mathbf{D}_{\mathrm{GP}}(R\text{-Mod}) \simeq \mathbf{D}_{\mathrm{GI}}(R\text{-Mod}) \simeq \mathbf{K}(R\text{-GInj}) = \mathbf{K}(R\text{-Inj})$ 中任一范畴, 则互逆的对应方式

$$\begin{aligned} \mathcal{V} &\mapsto \mathcal{V}_n = \{H^n(X) \mid X \in \mathcal{V}, \forall n \in \mathbb{Z}\}, \\ \{\mathcal{V}_n \mid n \in \mathbb{Z}\} &\mapsto \mathcal{V} = \{X \in \mathcal{T} \mid H^n(X) \in \mathcal{V}_n, \forall n \in \mathbb{Z}\} \end{aligned}$$

给出以下两个类之间的一一对应:

$$\{\mathcal{T} \text{ 中的可定义子范畴}\} \leftrightarrow \{\text{类 } \{\mathcal{V}_n \mid n \in \mathbb{Z}\} \mid \text{每个 } \mathcal{V}_n \text{ 是 } R\text{-Mod 中的可定义子范畴}\}.$$

证明 首先 6 个范畴的三角等价由推论 4.5 和 4.9 可知. 注意到在三角等价下可定义子范畴是一个不变量, 即若存在三角等价 $F: \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}'$, 则 $\mathcal{U}$ 是 $\mathcal{G}$ 的可定义子范畴当且仅当 $F(\mathcal{U})$ 是 $\mathcal{G}'$ 的可定义子范畴. 因此欲证的一一对应可由文献 [17, 命题 3.5] 得到. $\square$

设 $\mathcal{G}$ 是紧生成的代数三角范畴, $\mathcal{U}$ 是 $\mathcal{G}$ 的三角子范畴. 称 $\mathcal{U}$ 是 $\mathcal{G}$ 的 Smashing 子范畴, 如果 $\mathcal{U}$ 是局部化子范畴 (即 $\mathcal{U}$ 对任意直和封闭), 包含函子 $\iota: \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{G}$ 具有保持直和的右伴随. 一个基本事实是, 紧生成的三角子范畴是 Smashing 子范畴, 著名的 Telescope 猜想考虑其逆. 称 $\mathcal{G}$ 满足 Telescope 猜想, 如果 $\mathcal{G}$ 的任一 Smashing 子范畴是紧生成的. Bazzoni 和 Hrbek 在文献 [17, 推论 4.12] 中证明了在 von Neumann 正则环上 $\mathbf{D}(R\text{-Mod})$ 满足 Telescope 猜想, 注意到满足 Telescope 猜想是三角等价的不变量 (即三角等价的其中一个范畴满足这一猜想当且仅当另一个也满足), 从而由推论 4.5 和 4.9, 得到如下推论.

推论 4.13 设环 R 是 von Neumann 正则环, $\mathcal{T}$ 表示相互三角等价的三角范畴

$$K(R\text{-Proj}) = K(R\text{-GProj}) \simeq \mathbf{D}_{\text{GP}}(R\text{-Mod}) \simeq \mathbf{D}_{\text{GI}}(R\text{-Mod}) \simeq K(R\text{-GInj}) = K(R\text{-Inj})$$

之一, 则 $\mathcal{T}$ 满足 Telescope 猜想.

致谢 感谢审稿人提出的宝贵建议, 使得论文在行文和内容上都有很大的提升.

参考文献

- 1 Chen X W. Algebras with radical square zero are either self-injective or CM-free. *Proc Amer Math Soc*, 2012, 140: 93–98
- 2 Enochs E E, Cortés-Izurdiaga M, Torrecillas B. Gorenstein conditions over triangular matrix rings. *J Pure Appl Algebra*, 2014, 218: 1544–1554
- 3 Ringel C M. The Gorenstein projective modules for the Nakayama algebras. I. *J Algebra*, 2013, 385: 241–261
- 4 Chen X W, Shen D W, Zhou G D. The Gorenstein-projective modules over a monomial algebra. *Proc Roy Soc Edinburgh Sect A*, 2018, 148: 1115–1134
- 5 Holm H. Gorenstein homological dimensions. *J Pure Appl Algebra*, 2004, 189: 167–193
- 6 Ding N Q, Li Y L, Mao L X. Strongly Gorenstein flat modules. *J Aust Math Soc*, 2009, 86: 323–338
- 7 Mao L X, Ding N Q. Gorenstein FP-injective and Gorenstein flat modules. *J Algebra Appl*, 2008, 7: 491–506
- 8 Gillespie J. On Ding injective, Ding projective and Ding flat modules and complexes. *Rocky Mountain J Math*, 2017, 47: 2641–2673
- 9 Šťovíček J. Locally well generated homotopy categories of complexes. *Doc Math*, 2010, 15: 507–525
- 10 Jørgensen P. The homotopy category of complexes of projective modules. *Adv Math*, 2005, 193: 223–232
- 11 Neeman A. The homotopy category of flat modules, and Grothendieck duality. *Invent Math*, 2008, 174: 255–308
- 12 Šťovíček J. On purity and applications to coderived and singularity categories. *arXiv:1412.1615*, 2014
- 13 Gao N. On homotopy categories of Gorenstein modules: Compact generation and dimensions. *Homology Homotopy Appl*, 2015, 17: 13–24
- 14 Chen X W. Homotopy equivalences induced by balanced pairs. *J Algebra*, 2010, 324: 2718–2731
- 15 Iyengar S, Krause H. Acyclicity versus total acyclicity for complexes over noetherian rings. *Doc Math*, 2006, 11: 207–240
- 16 Keller B. A remark on the generalized smashing conjecture. *Manuscripta Math*, 1994, 84: 193–198
- 17 Bazzoni S, Hrbek M. Definable coaisles over rings of weak global dimension at most one. *Publ Mat*, 2021, 65: 165–241
- 18 Bravo D, Gillespie J, Hovey M. The stable module category of a general ring. *arXiv:1405.5768*, 2014
- 19 Gillespie J. AC-Gorenstein rings and their stable module categories. *J Aust Math Soc*, 2019, 107: 181–198
- 20 Wang J P, Liu Z K, Yang X Y. A negative answer to a question of Gillespie (in Chinese). *Sci Sin Math*, 2018, 48: 1121–1130 [汪军鹏, 刘仲奎, 杨晓燕. Gillespie 所提出一个问题的否定回答. *中国科学: 数学*, 2018, 48: 1121–1130]
- 21 Gao Z H, Wang F G. Weak injective and weak flat modules. *Comm Algebra*, 2015, 43: 3857–3868
- 22 Mahdou N. On Costa's conjecture. *Comm Algebra*, 2001, 29: 2775–2785
- 23 Enochs E E, Jenda O M G. Gorenstein injective and projective modules. *Math Z*, 1995, 220: 611–633
- 24 Gillespie J. Model structures on modules over Ding-Chen rings. *Homology Homotopy Appl*, 2010, 12: 61–73
- 25 Kirkman E, Kuzmanovich J. On the global dimension of fibre products. *Pacific J Math*, 1988, 134: 121–132
- 26 Wang J P. Ding projective dimension of Gorenstein flat modules. *Bull Korean Math Soc*, 2017, 54: 1935–1950
- 27 Liu Z K. Excellent extensions and homological dimensions. *Comm Algebra*, 1994, 22: 1741–1745
- 28 Nakayama T, Tsuzuku T. On Frobenius extensions I. *Nagoya Math J*, 1960, 17: 89–110
- 29 Mao L X. Cotorsion pairs and approximation classes over formal triangular matrix rings. *J Pure Appl Algebra*, 2020, 224: 106271
- 30 Zhang P. *Triangulated Categories and Derived Categories* (in Chinese). Beijing: Science Press, 2015 [章璞. 三角范畴与导出范畴. 北京: 科学出版社, 2015]
- 31 Zheng Y F, Huang Z Y. Triangulated equivalences involving Gorenstein projective modules. *Canad Math Bull*, 2017, 60: 879–890
- 32 Gao N, Zhang P. Gorenstein derived categories. *J Algebra*, 2010, 323: 2041–2057
- 33 Gillespie J. The flat model structure on $\mathbf{Ch}(R)$. *Trans Amer Math Soc*, 2004, 356: 3369–3390
- 34 Yang G, Liu Z K, Liang L. Model structures on categories of complexes over Ding-Chen rings. *Comm Algebra*, 2013, 41: 50–69

- 35 Yang G, Da X S. On Ding projective complexes. *Acta Math Sin Engl Ser*, 2018, 34: 1718–1730
36 Krause H. The stable derived category of a Noetherian scheme. *Compos Math*, 2005, 141: 1128–1162

Weak global dimension and CM-freeness of rings

Junpeng Wang, Zhongkui Liu & Xiaoxiang Zhang

Abstract Let R be a ring with finite weak global dimension. We prove that R is (strongly) CM-free. As applications, we obtain some triangulated equivalences between some compactly-generated homotopy categories and relative derived categories. We classify the definable categories of such equivalent triangulated categories when the weak global dimension of R is at most 1, and show that such equivalent triangulated categories satisfy Telescope conjecture when R is a von Neumann regular ring. We also improve the condition such that a triangulated equivalence about the extended Grothendieck duality holds from the finiteness of the left and right global dimension of R to only the finiteness of the right global dimension of R .

Keywords weak global dimension, (strongly) CM-free, compactly generated, definable subcategories, Grothendieck duality

MSC(2020) 16E50, 18G20, 18G25

doi: 10.1360/SSM-2020-0139