有限素数度弧正则图

潘江敏*, 丁素云, 刘寅

云南大学数学与统计学院, 昆明 650091
E-mail: jmpan@ynu.edu.cn, 15288361350@163.com, liuyinjiayou@sina.com

收稿日期: 2013-07-03; 接受日期: 2013-12-10; * 通信作者
国家自然科学基金 (批准号: 11071210 和 11171292) 资助项目

摘要 如果一个图的全自同构群在其弧集上正则, 则称此图为弧正则图. 本文刻画素数度的立方自由阶弧正则图, 证明任何素数度 2 倍奇立方自由阶弧正则图都是正规或二部正规 Cayley 图, 且不存在任意素数度 4 倍奇立方自由阶的弧正则图, 推广了一些已知的结果, 得到阶为 8 倍奇平方自由阶素数度弧正则图的分类, 并发现新的弧正则图类. 此外, 基于所得的结果, 我们提出一个猜想和有待后续研究的一些问题.

关键词 弧正则图 Cayley 图 自同构群 立方自由阶

MSC (2010) 主题分类 20B15, 20B30, 05C25

1 引言

在本文中, 所考虑的图都是度数大于等于 3 的无向单图.

对于一个图 Γ , 令 $V\Gamma$, $A\Gamma$ 和 $\text{Aut}\Gamma$ 分别表示它的顶点集、弧集和全自同构群. 若 $\text{Aut}\Gamma$ 在 $A\Gamma$ 上正则, 则称 Γ 为弧正则图 (或 1-正则图). 若 $\text{Aut}\Gamma$ 的一个子群 X 在 $A\Gamma$ 上正则, 则称 Γ 为 X -弧正则图. 易知, 弧正则图都是连通图.

设 G 为一个群, S 为 $G \setminus \{1\}$ 的一个非空子集, 且满足 $S = S^{-1} := \{g^{-1} \mid g \in S\}$. 定义群 G 关于 S 的 Cayley 图 (记为 $\text{Cay}(G, S)$) 如下: 顶点集为 $V\Gamma = G$, 顶点 g 与 h 邻接当且仅当 $hg^{-1} \in S$. 众所周知, 一个图 Γ 与群 G 上的一个 Cayley 图同构当且仅当 $\text{Aut}\Gamma$ 包含一个与 G 同构且在 $V\Gamma$ 上正则的子群 [1, 命题 16.3]. 设 $X \leq \text{Aut}\Gamma$, 图 Γ 称为 X -正规 Cayley 图, 如果 X 包含一个在 $V\Gamma$ 上正则的正规子群; 图 Γ 称为 X -二部正规 Cayley 图, 如果 X 有一个正规子群在 $V\Gamma$ 上半正则且恰有两个轨道; 特别地, 如果 $X = \text{Aut}\Gamma$, 则 Γ 分别称为正规 Cayley 图或二部正规 Cayley 图.

由定义可知, 弧正则图与其全自同构群密切相关. 由于确定已知图的全自同构群是代数图论中的基本课题之一, 弧正则图的刻画受到了众多学者的关注. 例如, 文献 [2–5] 给出了小度数弧正则图的一些构造; 文献 [6] 得到了素数度平方自由阶弧正则图的分类; 文献 [7, 8] 证明了存在 $2p$ 阶和 $6p$ 阶 (其中 p 为素数) 的 3 度弧正则图的充分必要条件是 $3 \mid (p-1)$. 此外, 文献 [8] 证明了不存在 4 倍奇素数和 4 倍奇素数平方阶的 3 度弧正则图, 文献 [9] 证明了不存在 4 倍奇平方自由阶的 3 度弧正则图. 本文的第一个结果刻画素数度立方自由阶弧正则图, 特别地, 证明不存在任意素数度的 4 倍奇立方自由阶弧正则图, 推广了上述结果. 一个正整数 n 称为平方自由、立方自由或四次自由的, 如果不存在素数 p 分别有 $p^2 \mid n$, $p^3 \mid n$ 或 $p^4 \mid n$ 成立.

定理 1.1 设 n 为立方自由的奇整数, 则下面的结论成立:

- (1) 不存在任意素数度的 $4n$ 阶连通弧正则图;
- (2) 任何 $2n$ 阶的素数度连通弧正则图都是正规 Cayley 图或者二部正规 Cayley 图.

基于正规 Cayley 图和二部正规 Cayley 图的一些很好的性质^[10-12], 定理 1.1(2) 中的图有很好的刻画. 例如, 容易证明, 定理 1.1(2) 的正规 Cayley 图都可以表示为 $\text{Cay}(G, S)$ (这里的群 G 已被文献 [13] 完全确定), 其中 $S = g^{(\sigma)}$, $g \in G$ 为二阶元, σ 为满足 $\langle g^{(\sigma)} \rangle = G$ 的群 G 的 p 阶自同构. 然而, 要完全确定这些图的具体构造在目前看来仍是困难的.

文献 [14] 得到了 8 倍素数阶和 8 倍素数平方阶的 3 度弧传递图的分类. 本文的第二个结果刻画了任意素数度的 8 倍奇平方自由阶弧正则图.

定理 1.2 设 Γ 为素数度的 8 倍奇平方自由阶的连通弧正则图, 则下列情形之一成立:

- (1) $\Gamma = \text{CQ}(k, n)$ (见例 4.2) 是三维超立方体 Q_3 的正则 $\mathbb{Z}_n$ -覆盖, 其中 $2 \leq k \leq n-3$, $k^2 + k + 1 \equiv 0 \pmod{n}$;
- (2) Γ 为完全二部图 $K_{3,3}$ 的唯一正则 $(\mathbb{Z}_2^2 \times \mathbb{Z}_m)$ -覆盖, 其中 $m = 3^s p_1 p_2 \cdots p_t$, $0 \leq s \leq 1$, $t \geq 1$, 且每个 p_i 都是满足 $p_i \equiv 1 \pmod{3}$ 的素数;
- (3) Γ 为以第一 Janko 单群 J_1 为全自同构群的度数为 3, 5, 7, 11 或 19 的图;
- (4) $\text{Aut} \Gamma \cong \text{PGL}(2, p)$, 其中 $p \equiv \pm 3 \pmod{8}$ 为素数.

注 1.3 (1) 定理 1.2(2) 中的图利用文献 [15, 第 5 节] 中的方法可以完全确定; 定理 1.2(3) 中的图利用 Magma 程序^[16] 可以完全确定.

(2) 设 $q \geq 5$ 为素数幂, 利用 Macbeath^[17] 证明的 $\text{PSL}(2, q)$ 和 $\text{SL}(2, q)$ 的所谓“逆/反射”性质 (见引理 2.2), 本文的引理 3.3 证明不存在以 $\text{PSL}(2, q)$ 或 $\text{SL}(2, q)$ 为全自同构群的素数度弧正则图. 通过用文献 [16] 对一些具体素数 p 的验证, 我们相信 $\text{PGL}(2, q)$ 也具有“逆/反射”性, 且定理 1.2(4) 中的图不存在. 由此, 我们提出下面的猜想 (其在抽象群论中也应该是有意义的).

猜想 1.4 设 $G = \text{PGL}(2, q)$, 其中 $q \geq 5$ 为素数幂. 假设 $\{a, b\}$ 是 G 的一个生成集, 则存在扩群 $X \supseteq G$ 以及 X 中的元素 x , 使得 $a^x = a^{-1}$, $b^x = b^{-1}$.

本文的结构如下: 第 2 节给出一些预备知识; 第 3 和 4 节分别给出定理 1.1 和 1.2 的证明; 第 5 节对本文作回顾与展望.

2 预备知识

设 G 为一个群, H 为 G 的核自由子群 (即 H 不包含 G 的任何非平凡正规子群). 设 $g \in G \setminus H$ 使得 $g^2 \in H$. 定义陪集图 $\text{Cos}(G, H, HgH)$ 如下 (参见文献 [18]): 顶点集为 $[G : H] := \{Hx \mid x \in G\}$, 且

$$Hx \sim Hy \Leftrightarrow yx^{-1} \in HgH.$$

引理 2.1^[19] (1) 设 Γ 的定义如上, 则 Γ 是度数为 $|H : H \cap H^g|$ 的 G -弧传递图, 且 Γ 是连通的当且仅当 $\langle H, g \rangle = G$.

(2) 设 Σ 为 X -弧传递图, 则 $\Sigma \cong \text{Cos}(X, X_\alpha, X_\alpha x X_\alpha)$, 其中 $\alpha \in V\Sigma$, $x \in X \setminus X_\alpha$ 为一个 2-元素, 且 $x^2 \in X_\alpha$.

下面的定理是 $\text{PSL}(2, q)$ 和 $\text{SL}(2, q)$ 的“逆/反射”性质, 其中 q 为素数幂, 它由 Macbeath^[17] 在 1961 年证明的, 此后 Singerman^[19, 定理 3] 给出了一个新的证明.

定理 2.2 设 $T = \text{PSL}(2, q)$ 或 $\text{SL}(2, q)$, 其中 $q \geq 5$ 为素数幂. 设 $\{a, b\}$ 是 T 的一个生成集, 则存在 T 的一个扩群 G 和元素 $g \in G$ 使得 $a^g = a^{-1}$, $b^g = b^{-1}$.

作正规商图是研究和构造局部本原图的一个典型方法. 设 Γ 为一个图, 且 $X \leq \text{Aut} \Gamma$ 有一个不传递的正规子群 N . 用 $V\Gamma_N$ 表示 N 在 $V\Gamma$ 中的所有轨道构成的集合. 定义 Γ 的由 N 诱导的正规商图 Γ_N 如下: 其顶点集为 $V\Gamma_N$, 且顶点 $B, C \in V\Gamma_N$ 邻接当且仅当 B 中的某点与 C 中的某点在 Γ 中邻接. 特别地, 如果 Γ 和 Γ_N 的度数相等, 则称 Γ 为 Γ_N 的正则 N -覆盖 (或正规 N -覆盖).

下面的定理提供了研究局部本原图的一个基本方法 [20, 引理 2.5], 它略微改进了 Praeger 的一个著名结果 [22].

定理 2.3 设 Γ 为 X -点传递局部本原图, 且 X 有一个正规子群 N 在 $V\Gamma$ 上至少有 3 个轨道, 则下列结论成立:

- (1) N 在 $V\Gamma$ 上半正则, $X/N \leq \text{Aut} \Gamma_N$, Γ_N 为 X/N -局部本原图, 且 Γ 为 Γ_N 的正则 N -覆盖;
- (2) Γ 为 (X, s) -弧传递图 ($s \geq 2$) 当且仅当 Γ_N 为 $(X/N, s)$ -弧传递图, 其中 $1 \leq s \leq 5$ 或 $s = 7$;
- (3) $X_\alpha \cong (X/N)_\delta$, 其中 $\alpha \in V\Gamma$, $\delta \in V\Gamma_N$.

下面的引理刻画了含有二面体 Sylow 2-子群的有限群, 参见文献 [23, 定理 16.3].

引理 2.4 设 G 为一个含有二面体 Sylow 2-子群的有限群, M 是 G 的最大奇数阶正规子群, 则 G/M 同构于下列群之一:

- (1) (二面体) 2-子群;
- (2) A_4 或 A_7 ;
- (3) $\text{Aut}(\text{PSL}(2, q))$ 的包含 $\text{PSL}(2, q)$ 的子群, 其中 $q \geq 5$ 为奇素数幂.

由文献 [8, 定理 6.1], 我们可得下面的结果.

引理 2.5 设 Γ 为完全图 K_4 的连通弧传递正则 N -覆盖, 其中 N 为循环群或初等交换群, 则 $N \cong \mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_4$, 或者 N 为 p^3 阶的初等交换群, 其中 p 为素数.

下面的结果稍微推广了文献 [24, 定理 3.4], 由于证明较为相似, 我们将其略去.

引理 2.6 设 X 为 Ω 上的传递置换群, p^α 为 $|\alpha^X|$ 的因子, 其中 $\alpha \in \Omega$, p 为素数. 如果 X 的子群 H 满足条件 $(p, |X:H|) = 1$, 则 p^α 整除 $|\alpha^H|$. 特别地, 若 $(|\Omega|, |X:H|) = 1$, 则 H 在 Ω 上传递.

在本节的最后, 我们给出关于立方自由奇数阶群和四次自由阶群的两个刻画.

引理 2.7 [13, 推论 3.4] 设 G 为一个立方自由奇数阶群, 则 $G = G_{p_t} : G_{p_{t-1}} : \cdots : G_{p_1}$, 其中 G_{p_i} 为 G 的 Sylow p_i -子群, 且 $p_t > p_{t-1} > \cdots > p_1$.

引理 2.8 [24, 定理 1.3] 设 G 为四次自由阶的不可解群, 则 $G = (M \times N).L$, 其中 N 为可解群, L 为交换群, M 为完全群且满足下面情形之一, 其中 p 为素数.

(1) $M = A_7, J_1, \text{PSL}(2, 8), \text{PSL}(2, p^f)$ (p 为奇素数且 $f \leq 3$), $3.A_6, 3.A_7, \text{SL}(2, p)$ ($p \geq 5$), 或 $\text{SL}(2, p^3)$ (p 为奇素数).

(2) $M = \text{ASL}(2, p) = \mathbb{Z}_p^2 : \text{SL}(2, p)$, 其中 $p \geq 5$.

(3) $M = F : \text{SL}(2, 5)$, 其中 F 为幂零群, 且其每个 Sylow r -子群同构于 $\mathbb{Z}_r^2, \mathbb{Z}_r^2 : \mathbb{Z}_r$ 或 $\mathbb{Z}_r^3$, 此处 $r = 5$ 或 $r \equiv \pm 1 \pmod{10}$.

(4) $M = \mathbb{Z}_m^3 : S$, 其中 m 为平方自由的整数, 且下列情形之一成立:

- (a) $S = \text{PSL}(2, 7)$, m 的每个素因子 r 都满足 $r \geq 11$ 且 $r^3 \equiv 1 \pmod{7}$;
- (b) $S = \mathbb{Z}_3.A_6$, m 的每个素因子 $r \equiv 1, 19 \pmod{30}$;
- (c) $S = A_5$, m 的每个素因子 $r \equiv \pm 1 \pmod{10}$.

3 定理 1.1 的证明

首先, 我们证明几个引理. 设 m 为正整数, p 为 m 的素因子, 我们用 m_p 表示 m 的 p -部分, 即整除 m 的 p 的最大方幂. 令 $m_{p'} = m/m_p$.

引理 3.1 设 Γ 为奇素数度 X -弧正则图, 且 Γ 的阶数为 4 倍奇数, 其中 $X \leq \text{Aut} \Gamma$, 则 X 为不可解群, 或者 $\text{val}(\Gamma) = 3$, $X = M.A_4$, M 在 $V\Gamma$ 上半正则, 且 Γ 是 $\mathbf{K}_4$ 的正则 M -覆盖, 其中 M 为 X 的最大奇数阶正规子群.

证明 设 X 是可解群, $|V\Gamma| = 4m$, $\text{val}(\Gamma) = r$, 其中 m 为奇数, r 为奇素数, 则 $|X| = 4mr$. 设 X_2 为 X 的 Sylow 2-子群, 则 $X_2 \cong \mathbb{Z}_4$ 或 $\mathbb{Z}_2^2$. 若 $X_2 \cong \mathbb{Z}_4$, 由 Burnside 定理知, X 是 2-幂零的, 即存在 X 的一个正规子群 N , 使得 $X = N : X_2$. 从而 $|N| = mr$ 是一个奇数, 由引理 2.6, N 在 $V\Gamma$ 上恰有四个轨道, 故由定理 2.3 可知, N 在 $V\Gamma$ 上半正则, 从而 $|N| = mr$ 整除 $4m$, 矛盾.

设 $X_2 \cong \mathbb{Z}_2^2$, 因为 X 可解, 由引理 2.4, 我们有 $X = M : X_2$ 或 $X = M.A_4$, 其中 M 为 X 的最大奇数阶正规子群. 对于前一情形, 类似于上面的讨论, 可得 $|M| = mr$ 整除 $4m$, 矛盾. 所以 $X = M.A_4$. 现在, M 在 $V\Gamma$ 上至少有四个轨道, 由定理 2.3 知, M 在 $V\Gamma$ 上半正则, 且 Γ 为 Γ_M 的正则 M -覆盖. 因为 Γ_M 为 X/M -弧正则图, 且 $X/M \cong A_4$, 我们有 $\Gamma_M \cong \mathbf{K}_4$ 且 $\text{val}(\Gamma) = \text{val}(\Gamma_M) = 3$. $\square$

引理 3.2 设 X 为一个群, G 为 X 的子群. 假设 $G = \langle a, g \rangle$, 其中 $o(a)$ 为奇素数, $\langle a \rangle$ 在 G 中核自由, g 为二阶元. 如果存在元素 $x \in X$, 使得 $a^x = a^{-1}$ 且 $g^x = g$, 则 $\Gamma := \text{Cos}(G, \langle a \rangle, \langle a \rangle g \langle a \rangle)$ 不是弧正则图.

证明 设 $H = \langle a \rangle$, 定义

$$\sigma_x : V\Gamma \rightarrow V\Gamma, \quad Hy \rightarrow Hy^x, \quad y \in G.$$

因为 x 正规化 H , 容易证明 σ_x 为一一对应. 因为 $(HgH)^x = HgH$, 可得 $\sigma_x \in \text{Aut} \Gamma$. 注意到 $G = \langle H, g \rangle$, H 在 G 中核自由, 有 $H^g \neq H$, 又 $|H| = o(a)$ 为素数, 故 $H \cap H^x = 1$. 从而 $ga(ga^{-1})^{-1} = ga^2g \notin H$, 推出 $Hga \neq Hga^{-1} = (Hga)^{\sigma_x}$, 即 $\sigma_x \neq 1$. 现在, 由 σ_x 稳定 Γ 的弧 (H, Hg) , 引理成立. $\square$

利用引理 3.2, 我们可以证明下面的结论.

引理 3.3 设 $G = \text{PSL}(2, q)$ 或 $\text{SL}(2, q)$, 其中 $q \geq 5$ 为素数幂, 则不存在 r 度且全自同构群同构于 G 或者 $G \times H$ 的弧正则图, 其中 r 为 $|G|$ 的奇素因子, $H \cong \mathbb{Z}_r$.

证明 (反证法) 假设 Γ 是一个 r 度的弧正则图, 且 $A := \text{Aut} \Gamma = G$ 或者 $G \times H$. 由引理 2.1, 我们可设 $\Gamma = \text{Cos}(A, \langle a \rangle, \langle a \rangle g \langle a \rangle)$, 其中 $o(a) = r$, $o(g) = 2$, $\langle a, g \rangle = A$. 由定理 2.2 和引理 3.2 知, $\text{Cos}(G, \langle a \rangle, \langle a \rangle g \langle a \rangle)$ 不是弧正则图, 故有 $A \neq G$.

如果 $A = G \times H$, 则 $a = (a_1, a_2)$, $g = (g_1, g_2)$, 其中 $a_1, g_1 \in G$, $a_2, g_2 \in H$. 因为 $\langle a, g \rangle = G \times H$, 所以 $\langle a_1, g_1 \rangle = G$, $\langle a_2, g_2 \rangle = H$ 且 $g_2 = 1$. 因为 H 为循环群, 显然, 存在 $\sigma \in \text{Aut}(H)$ 使得 $a_2^\sigma = a_2^{-1}$, 又由引理 2.2, 存在 $\tau \in \text{Aut}(G)$, 使得 $a_1^\tau = a_1^{-1}$ 且 $g_1^\tau = g_1^{-1} = g_1$. 定义 A 的一个映射 $(\tau, \sigma): (x, y) \rightarrow (x^\tau, y^\sigma)$, 其中 $x \in G$, $y \in H$ 为任意元素. 易知 $(\tau, \sigma) \in \text{Aut}(A)$ 且 $a^{(\tau, \sigma)} = a^{-1}$, $g^{(\tau, \sigma)} = g$, 故由引理 3.2, $\Gamma = \text{Cos}(G \times H, \langle a \rangle, \langle a \rangle g \langle a \rangle)$ 不是弧正则的, 矛盾. $\square$

下面的引理可由文献 [26, 定理 1.1] 直接得到.

引理 3.4 设 Γ 为连通奇素数度 X -弧正则图, 其中 $X \leq \text{Aut} \Gamma$ 为可解群, 则 Γ 为 X -正规或者 X -二部正规 Cayley 图.

下面证明定理 1.1.

定理 1.1 的证明 首先, 设 Γ 为 $2n$ 阶 r 度弧正则图, 其中 r 为奇素数, 设 $A := \text{Aut}\Gamma$, 则 $|A| = 2nr$, 故 A 为可解群. 由引理 3.4, Γ 为正规或者二部正规 Cayley 图, 定理 1.1(2) 成立.

现在, 设 Γ 为 $4n$ 阶 r 度弧正则图, $A = \text{Aut}\Gamma$, 则 $|A| = 4nr$. 因为 n 为立方自由的奇数, A 为四次自由阶群.

设 A 为可解群, 由引理 3.1 知, $r = \text{val}(\Gamma) = 3$, $A = M.A_4$, 且 Γ 为 $\Gamma_M = \mathbf{K}_4$ 的正规 M -覆盖, 其中 M 为 A 的最大奇数阶正规子群. 因为 $\mathbf{K}_4$ 不是弧正则图, $|M| \neq 1$ 为立方自由的奇数, 由引理 2.7 得 $M = N:M_{p_1}$, 其中 M_{p_1} 为 M 的 Sylow p_1 -子群, N 为 M 的 Hall p_1' -子群, 且 $p_1 \geq 3$ 为 $|M|$ 的最小素因子. 因为 $N \triangleleft A$, 由定理 2.3 可知, Γ_N 是 $\Gamma_M = \mathbf{K}_4$ 的弧传递正则 M_{p_1} -覆盖. 然而, 因为 $|M_{p_1}|$ 整除 p_1^2 , M_{p_1} 为循环群或初等交换群, 由引理 2.5, 这是不可能的.

下设 A 为不可解群, 则 $|A|_2 = 4$, $|A|_r$ 整除 r^3 , 且 $|A|_{r'}$ 为立方自由的整数.

设 $|A|_r \neq r^3$, 则 A 为立方自由阶群. 由文献 [13, 定理 3.10], $A = T \times H$, 其中 $T \cong \text{PSL}(2, p)$, $p \equiv \pm 3 \pmod{8}$ 为素数. 若 T 在 $V\Gamma$ 上不传递, 由引理 2.6 可知, 4 整除 $|v^T|$, 其中 $v \in V\Gamma$, 故 T 在 $V\Gamma$ 上至少有三个轨道. 从而由定理 2.3 可得 Γ_T 为奇数阶奇数度的弧传递图, 这是不可能的, 所以 T 在 $V\Gamma$ 上传递. 因为 $|A|$ 整除 $r|V\Gamma|$, 我们进一步可得 $A = T$ 或 $A = T \times \mathbb{Z}_r$. 然而, 由引理 3.3, Γ 不是弧正则图, 矛盾.

下面考虑 $|A|_r = r^3$ 的情形. 因为 $|A|_2 = 4$, 由引理 2.8, $A = (M \times N).L$, 其中 N 为可解群, L 为交换群, 且由 $|M|_2 = 4$, 容易得到 $M = \text{PSL}(2, p)$, 其中 $p \equiv \pm 3 \pmod{8}$, 或者 $M = \mathbb{Z}_r^3 : A_5$, 其中 $r \equiv \pm 1 \pmod{10}$. 对于前一情形, 类似上面的讨论, 可以证明 M 在 $V\Gamma$ 上传递, 从而由 $\text{Out}(M) \cong \mathbb{Z}_2$ 且 $|X:M|$ 整除 r , 我们容易推出 $A = \text{PSL}(2, p)$ 或 $A = \text{PSL}(2, p) \times \mathbb{Z}_r$, 但由引理 3.3 可知, 这两种情形都是不可能的. 对于后一情形, 设 M_r 为 M 的一个 Sylow r -子群, 则 $M_r \cong \mathbb{Z}_r^3$ 在 A 中正规且在 $V\Gamma$ 上至少有三个轨道, 故由定理 2.3, M_r 在 $V\Gamma$ 上半正则, 从而 r^3 整除 $|V\Gamma|$, 矛盾. $\square$

4 定理 1.2 的证明

本节先讨论几个在定理 1.2 中出现的例子, 然后证明该定理.

对于给定的较小置换群 G , 利用 Magma 程序^[16] 可以确定所有 G -弧传递图. 通过直接计算, 我们可得以下的结论.

引理 4.1 (1) 不存在 840 阶且全自同构群同构于 A_7 的 3 度弧正则图;

(2) 对每个 $r \in \{3, 5, 7, 11, 19\}$, 都存在 r 度且全自同构群同构于第一 Janko 单群 J_1 的弧正则图.

下面是由三维超立方体 Q_3 的正规循环覆盖得到的无限族的例子.

例 4.2 ^[26, 定理 1.1] 设 Γ 为三维超立方体 Q_3 的弧正则的正规 $\mathbb{Z}_n$ -覆盖, 其中 n 为奇数, $\mathbb{Z}_n$ 为模 n 的剩余类加群. 设 $V(Q_3) = \{a, b, c, d, w, x, y, z\}$, 则 Γ 同构于图 $\text{CQ}(k, n)$, 其顶点集为 $V(Q_3) \times \mathbb{Z}_n$ (Descartes 乘积), 边集为

$$\begin{aligned} E(\text{CQ}(k, n)) = & \{(a, i)(x, i), (a, i)(y, i), (a, i)(z, i), (b, i)(w, i), (b, i)(z, i), (c, i)(z, i), (d, i)(y, i), \\ & (b, i)(y, i+1), (c, i)(w, i+k), (c, i)(x, i-k^{-1}), \\ & (d, i)(w, i-k^{-1}-1), (d, i)(x, i+k) \mid i \in \mathbb{Z}_n\}, \end{aligned}$$

其中 $2 \leq k \leq n-3$, $n \mid (k^2 + k + 1)$.

在多数情况下, 当覆盖变换群为循环群或初等交换群时, 电压图技术提供了一个确定图的正则覆盖的有效方法, 但是当覆盖变换群为其他群时, 这种方法通常不是很有效. 最近, 文献 [15] 通过考虑泛群在基图上的作用, 得到了确定一般交换正则覆盖的新方法, 并利用此方法确定了 $\mathbf{K}_{3,3}$ 和其他几个图的所有弧 - 传递交换正则覆盖.

第二个无限簇的例子来自于完全二部图 $\mathbf{K}_{3,3}$ 的正则 $(\mathbb{Z}_2^2 \times \mathbb{Z}_m)$ - 覆盖, 它可由文献 [15, 第 5 节] 的讨论得到. 作者感谢 Conder 教授提供这些信息, 并指出下面的引理.

引理 4.3 设 Γ 为 $\mathbf{K}_{3,3}$ 的弧正则的正则 N - 覆盖, 其中 $N \cong \mathbb{Z}_2^2 \times \mathbb{Z}_m$, m 为平方自由的奇数, 则 $m = 3^s p_1 p_2 \cdots p_t$, 其中 $0 \leq s \leq 1$, $t \geq 1$, p_i 为奇素数且 $p_i \equiv 1 \pmod{3}$, 且对每一个 m , 存在唯一的图 Γ .

证明 设 $A = \text{Aut} \Gamma$, 则 $N \triangleleft A$ 在 $V\Gamma$ 上半正则, $\Gamma_N = \mathbf{K}_{3,3}$. 若 $m = 1$, 由文献 [28, 表 A.1] 知, $\Gamma = \text{F024}$ 为 2- 弧正则图, 矛盾.

因此 $m \neq 1$. 设 $\langle a \rangle = N_{2'} \cong \mathbb{Z}_m$ 为 N 的 Sylow $2'$ - 子群, p 是 m 的一个素因子, $M(p) := \mathbb{Z}_2^2 \rtimes \langle a^{m/p} \rangle$, 则 $M(p) \triangleleft A$, 且 $\Gamma_{M(p)}$ 为 $\Gamma_N = \mathbf{K}_{3,3}$ 的一个弧传递正则 $\mathbb{Z}_p$ - 覆盖. 由文献 [29, 定理 1.1] 知, $p = 3$ 或 $p \equiv 1 \pmod{3}$. 若 $m = 3$, 则 $|V\Gamma| = 72$, 由文献 [28, 表 A.1] 可知, 不存在 72 阶的 3 度弧传递图, 矛盾. 因此 m 至少有一个素因子 p_i 使得 $p_i \equiv 1 \pmod{3}$, 所以 $m = 3^s p_1 p_2 \cdots p_t$, 其中 $0 \leq s \leq 1$, $t \geq 1$, 且每个 $p_i \equiv 1 \pmod{3}$ 为素数. 进一步, 由文献 [15, 定理 5.1] 知, F024 是 $\mathbf{K}_{3,3}$ 的唯一弧传递正则 $\mathbb{Z}_2^2$ - 覆盖, F018 (Pappus 图) 是 $\mathbf{K}_{3,3}$ 的唯一弧传递正则 $\mathbb{Z}_3$ - 覆盖, 且只存在唯一的 $\mathbf{K}_{3,3}$ 弧传递正则 $\mathbb{Z}_{p_i}$ - 覆盖 $\Gamma_{M(p_i)}$, 其中 $p_i \equiv 1 \pmod{3}$. 此外, 因为 $t \geq 1$, $\Gamma_{M(p_i)}$ 是弧正则的, 且 $\Gamma_{M(p_i)}$ 的弧正则性可以推出 Γ 的弧正则性, 由文献 [15, 第 5 节] 可知, 对每一个 m , 都存在唯一一个 $\mathbf{K}_{3,3}$ 的弧正则的正则 $\mathbb{Z}_2^2 \times \mathbb{Z}_m$ - 覆盖. $\square$

下面的引理给出了完全图 $\mathbf{K}_8$ 的正则循环覆盖的一个性质.

引理 4.4 设 Γ 为完全图 $\mathbf{K}_8$ 的连通 X - 弧正则的正则 $\mathbb{Z}_n$ - 覆盖, 其中 $X \leq \text{Aut} \Gamma$, n 为平方自由的整数, 则 $n = 2$.

证明 由题设条件知, X 在 Γ 上弧正则, 且 X 有正规子群 $N := \langle a \rangle \cong \mathbb{Z}_n$ 使得 $\Gamma_N \cong \mathbf{K}_8$, 所以 $\text{val}(\Gamma) = 7$ 且 X/N 在 Γ_N 上弧正则. 因为 N 是循环群, N 的子群都是 X 的正规子群, 故由定理 2.3 及 n 平方自由, 我们只需证明当 n 为素数时引理成立即可.

假设 $n = p$ 为奇素数. 因为 $X/N \leq \text{Aut}(\mathbf{K}_8) = \text{S}_8$ 在 $\mathbf{K}_8$ 上弧正则, X/N 为 8 次精确 2- 传递置换群, 所以 $X/N \cong \mathbb{Z}_2^3 : \mathbb{Z}_7 \leq \text{AGL}(3, 2)$, 从而 Γ 为群 G 的 X - 正规 Cayley 图, 其中 $G \cong N : \mathbb{Z}_2^3 \cong \mathbb{Z}_p : \mathbb{Z}_2^3$. 设 $\Gamma = \text{Cay}(G, S)$, 则 S 由 7 个二阶元组成. 若 G 是交换群, 则 $\langle S \rangle \neq G$, 与 Γ 的连通性矛盾, 故 G 不是交换群. 因为 $\text{Aut}(N) \cong \mathbb{Z}_{p-1}$ 是循环群, 所以, 中心化子 $C_G(N) \cong \mathbb{Z}_p : \mathbb{Z}_2^3 = \mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_2^3$, 且 $G = (\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_2^3) : \mathbb{Z}_7$, 从而 $\text{soc}(G) = \mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_2^3$ 有特征子群 $M \cong \mathbb{Z}_2^3$, 因此, M 在 X 中正规, 且 $\mathbb{Z}_2^3 \cong MN/N \triangleleft X/N \cong \mathbb{Z}_2^3 : \mathbb{Z}_7 \leq \text{AGL}(3, 2)$, 这与 $X/N \cong \mathbb{Z}_2^3 : \mathbb{Z}_7$ 有唯一的极小正规子群 $\mathbb{Z}_2^3$ 矛盾. $\square$

现在, 我们开始证明定理 1.2.

定理 1.2 的证明 设 $|V\Gamma| = 8n$, 其中 n 为平方自由的奇数. 若 $n = 1$, 则 $\Gamma = \text{Q}_3$ 或 $\mathbf{K}_8$, 这两个图都不是弧正则图, 矛盾. 所以 $n \geq 3$. 设 $A = \text{Aut} \Gamma$, $r = \text{val}(\Gamma)$, 则 $|A| = 8nr = 8r^s p_1 \cdots p_t$, 其中 $s \leq 2$, $r, p_1, \dots, p_t$ 为互异的奇素数. 下面分两种情形进行讨论.

情形 1 A 是可解群. 设 F 为 A 的 Fitting 子群, 即 F 为 A 的极大幂零正规子群, 则 $F \neq 1$, $C_A(F) \leq F$, 且 $F = F_2 \times F_r \times F_{p_1} \times \cdots \times F_{p_t}$, 其中 F_2 , F_r 和 F_{p_i} ($1 \leq i \leq t$) 分别表示 F 的 Sylow 2- 子群, Sylow r - 子群和 Sylow p_i - 子群. 因为 F 的每个 Sylow 子群都在 A 中正规且在 $V\Gamma$ 上至少有 3 个轨道, 由定理 2.3 可知, 它们在 $V\Gamma$ 上都是半正则的, 从而 F 在 $V\Gamma$ 上也是半正则的. 特别地, $|F_2|$ 整除 8, $F_r \leq \mathbb{Z}_r$, $F_{p_i} \leq \mathbb{Z}_{p_i}$.

若 $|F_2| = 8$, 则正规商图 Γ_{F_2} 为奇数度 r 奇数阶 n 的弧传递图, 这是不可能的. 所以, $|F_2| \leq 4$, F 为立方自由阶群, 从而 F 为交换群, 且 $C_A(F) = F$. 若 $F_2 \leq \mathbb{Z}_2$, 则 F 是循环群且 $A/F \leq \text{Aut}(F)$ 为交换群. 然而, 由于 F 在 $V\Gamma$ 上至少有 4 个轨道, 由定理 2.3 知, Γ_F 是 A/F -弧正则的, 这是不可能的. 因此 $|F_2| = 4$.

假设 $F_2 \cong \mathbb{Z}_2^2$ 且 F 在 $V\Gamma$ 上至少有 3 个轨道. 由定理 2.3, Γ_F 是 r 度的 A/F -弧正则图. 注意到 $A/F \leq \text{Aut}(F) = S_3 \times \mathbb{Z}_{q_1-1} \times \cdots \times \mathbb{Z}_{q_t-1}$, 其中 $q_1, \dots, q_t \in \{r, p_1, p_2, \dots, p_t\}$.

设 H 为 $\text{Aut}(F)$ 中同构于 S_3 的直积因子, $R = H \cap (A/F)$, 则 $R \triangleleft A/F$, $(A/F)/R \cong (A/F)H/H \leq \text{Aut}(F)/H$ 为交换群. 由定理 2.3 知, $R \leq S_3$ 在 $V\Gamma_F$ 上至多有两个轨道, 因此, $|V\Gamma_F|$ 整除 12. 因为 $|V\Gamma_F|_2 = 2$ 且 $|V\Gamma_F| \geq 3$, 所以, $|V\Gamma_F| = 6$, 且 $\Gamma_F = \mathbf{K}_{3,3}$ 或 $\mathbf{K}_6$. 对于前一情形, Γ 为 $\mathbf{K}_{3,3}$ 的弧正则的正则 $\mathbb{Z}_2^2 \times \mathbb{Z}_{n/3}$ -覆盖, 由引理 4.3 知, 定理 1.2(2) 成立. 对于后一情形, 有 $A/F \leq S_6$ 且 $|A/F| = 30$. 然而, 由文献 [30] 可知, S_6 没有与 $S_3 \times \mathbb{Z}_{q_1-1} \times \cdots \times \mathbb{Z}_{q_t-1}$ 的子群同构的 30 阶的子群, 矛盾.

现在假设 $F_2 \cong \mathbb{Z}_2^2$ 且 F 在 $V\Gamma$ 上恰好有两个轨道, 或者 $F_2 \cong \mathbb{Z}_4$. 若 $F_2 \cong \mathbb{Z}_4$, 则 F 是循环群, 且 $A/F \leq \text{Aut}(F)$ 为交换群, 由定理 2.3 知, F 在 $V\Gamma$ 上恰有两个轨道. 因此, 我们总有 $|F| = 4n$, $F_{2'} \cong \mathbb{Z}_n$ 为 A 的正规子群且在 $V\Gamma$ 上恰有 8 个轨道, 故 $\Gamma_{F_{2'}}$ 是 8 阶的 $A/F_{2'}$ -弧正则图, 所以 $\Gamma_{F_{2'}} = \mathbf{Q}_3$ 或 $\mathbf{K}_8$, 且 Γ 为 $\Gamma_{F_{2'}}$ 的弧正则的正则 $\mathbb{Z}_n$ -覆盖. 若 $\Gamma_{F_{2'}} = \mathbf{Q}_3$, 由例 4.2 知, $\Gamma \cong \text{CQ}(k, n)$, 其中 $2 \leq k \leq n-3$, 且 $k^2 + k + 1 \equiv 0 \pmod{n}$, 定理 1.2(1) 成立. 若 $\Gamma_{F_{2'}} = \mathbf{K}_8$, 由引理 4.4 可知, $n = 2$, 矛盾.

情形 2 A 是不可解群. 因为 A 是四次自由阶群, 由引理 2.8 知, $A = (M \times N).L$, 其中 N 是可解群, L 是交换群, M 为满足引理 2.8(1)–(4) 的完全群. 由引理 2.1, 我们可设 $\Gamma = \text{Cos}(A, A_\alpha, A_\alpha g A_\alpha)$, 其中 $A_\alpha := \langle x \rangle \cong \mathbb{Z}_r$, g 为二阶元. 设 $C = C_A(M)$ 为 M 在 A 中的中心化子. 因为 M 为完全群, $|M|_2 = 4$ 或 8.

(1) 假设 $|M|_2 = 4$. 由引理 2.8 易知, 唯一可能的情形是 $M = \text{PSL}(2, p)$, 其中 $p \equiv \pm 3 \pmod{8}$. 因为 $C \cap M = Z(M) = 1$, $\langle M, C \rangle = MC = M \times C \triangleleft A$. 故由 $A/MC \leq \text{Out}(M) = \mathbb{Z}_2$ 可知, $A = (M \times C).O$, 其中 $O \leq \mathbb{Z}_2$.

设 $A = M \times C$, 则 $|C|_2 = 2$. 如果 $C \cong \mathbb{Z}_2$, 则 M 在 $V\Gamma$ 上恰有两个轨道. 由文献 [31, 引理 2.4], Γ 为 Γ_C 的标准双覆盖, 且 $M \cong A/C \leq \text{Aut}(\Gamma_C)$. 因为 $\text{Aut}(\Gamma_C) \times \mathbb{Z}_2 \leq \text{Aut}\Gamma = A$, $\text{Aut}(\Gamma_C) \cong M$, 即 Γ_C 为 r 度弧正则图, 且其全自同构群同构于 $\text{PSL}(2, p)$, 由引理 3.3 可知, 这是不可能的. 因此, $|C| \geq 3$. 设 $x = (a, b)$, $g = (g_1, g_2)$, 其中 $a, g_1 \in M$, $b, g_2 \in C$. 由 Γ 的连通性可知, $\langle (a, b), (g_1, g_2) \rangle = M \times C$, 从而, $\langle a, g_1 \rangle = M$, $\langle b, g_2 \rangle = C$. 因为 $|C| \geq 3$, $b \neq 1$, 所以 $o(b) = r$. 从而 $2r$ 整除 $|C|$ 且 $o(g_1) = o(g_2) = 2$. 若 r 不整除 $|M|$, 则 $a = 1$ 且 $M = \langle a, g_1 \rangle \cong \mathbb{Z}_2$, 这与 M 为完全群矛盾. 所以 $o(a) = o(b) = r$, C 为平方自由阶群. 现在, 容易证明 $C = \langle b, g_2 \rangle = \langle b \rangle : \langle g_2 \rangle \cong \mathbb{Z}_{2r}$ 或 D_{2r} . 因为 $\text{Aut}(M) \times \text{Aut}(C) \subseteq \text{Aut}(A)$, 由定理 2.2 知, 存在自同构 $\sigma \in \text{Aut}(A)$, 使得 $x^\sigma = (a, b)^\sigma = x^{-1}$ 且 $g^\sigma = (g_1, g_2)^\sigma = g$. 由引理 3.3 知, Γ 不是弧正则图, 矛盾.

现在, 设 $A = (M \times C).\mathbb{Z}_2$, 则 C 为奇数阶群. 若 $C = 1$, 则 $A = M.\mathbb{Z}_2 = \text{PGL}(2, p)$, 定理 1.2(4) 成立. 若 $|C| \geq 3$, 因为 $C \triangleleft A$ 在 $V\Gamma$ 上至少有 8 个轨道, 由定理 2.3 知, C 在 $V\Gamma$ 上半正则, 从而 C 为奇平方自由阶群, 所以 $C = R : \mathbb{Z}_q$, 其中 q 为 n 的最小素因子. 现在, $P := M \times R$ 在 $V\Gamma$ 上至少有 3 个轨道. 由定理 2.3 知, Γ_P 为素数度 X/P -弧正则图; 然而, $X/P \cong \mathbb{Z}_q : \mathbb{Z}_2$, 这是不可能的.

(2) 假设 $|M|_2 = 8$. 如果 M 在 $V\Gamma$ 上至少有 3 个轨道, 那么 Γ_M 为奇数度奇数阶的弧传递图, 这是不可能的. 进一步, 由文献 [24] 知, $8 \mid |\alpha^M|$, 故 M 在 $V\Gamma$ 上传递.

若 M 在 $V\Gamma$ 上正则, 则 M 为 $8n$ 阶的完全群, 由引理 2.8 知, $M = \text{PSL}(2, p)$ 或 $\text{SL}(2, p)$, 且 $A = M.\mathbb{Z}_r$. 若 $C = C_A(M) = 1$, 则 $M.\mathbb{Z}_r \cong A \leq \text{Aut}(M)$; 然而, 由于 $\text{Aut}(\text{PSL}(2, p)) = \text{PSL}(2, p).2$ 且

$\text{Aut}(\text{SL}(2, r)) \cong \text{Inn}(\text{PSL}(2, r)). \text{Out}(\text{SL}(2, r)) \cong \text{PSL}(2, r). \mathbb{Z}_2$, 矛盾. 因此 $C \cong \mathbb{Z}_r$ 且 $A = M \times \mathbb{Z}_r$. 由引理 3.2, 这是不可能的.

所以, M 在 $V\Gamma$ 上不是正则的, 从而 $A = M$. 由引理 2.8, 我们可以推出 $A = A_7, J_1, \text{PSL}(2, 8), \text{PSL}(2, 9), \mathbb{Z}_r^2 : \text{SL}(2, 5), \text{PSL}(2, p)$ 且 $p \equiv \pm 1 \pmod{8}$, 或者 $\text{SL}(2, p)$ 且 $p \equiv \pm 3 \pmod{8}$.

若 $A = A_7$, 则 $r = 3$ 且 $|V\Gamma| = 840$. 由引理 4.1, 这样的图不存在.

若 $A = J_1$, 则 $r = 3, 5, 7, 11$ 或 19 . 由引理 2.3 知, 定理 1.2(3) 成立.

设 $A = \text{PSL}(2, 8), \text{PSL}(2, 9), \text{PSL}(2, p)$ 或 $\text{SL}(2, p)$, 由引理 3.3, Γ 不是弧正则图, 矛盾.

最后, 设 $A = \mathbb{Z}_r^2 : \text{SL}(2, 5)$, 则 $r \neq 5$, 且 $A_\alpha < \mathbb{Z}_r^2 \triangleleft A$, 于是 $\langle A_\alpha, g \rangle \leq \mathbb{Z}_r^2. \mathbb{Z}_2$ 为 A 的真子群, 所以 Γ 不连通, 矛盾. 至此, 我们完成了定理 1.2 的证明. $\square$

5 回顾与展望

本文所得到的两个主要定理 (定理 1.1 和 1.2) 分别刻画了两类弧正则图. 特别地, 定理 1.1(1) 证明了不存在任意素数度的 4 倍奇立方自由阶的弧正则图. 文献 [32] 证明了存在 4 倍奇数阶的 3 度弧正则图, 这启发我们思考下面有趣的问题:

问题 5.1 设存在素数度的 4 倍奇 m 次自由阶的弧正则图, 确定 m 的下确界. 此外, 这个下确界是否独立于图的度数?

利用 2 倍奇立方自由阶群的刻画, 由定理 1.1(2) 不难证明 2 倍奇立方自由阶素数度弧正则图都是阶为 $2p$ 或 $2p^2$ 的素数度 X -弧正则图 (不一定是弧正则图) 的 M -正规覆盖, 其中 M 为奇立方自由阶群. 所以, 我们提出下面的问题:

问题 5.2 刻画 $2p$ 或 $2p^2$ 阶素数度弧传递图的弧正则正规覆盖.

致谢 作者十分感谢审稿人的有益意见.

参考文献

- 1 Biggs N. Algebraic Graph Theory, 2nd ed. New York: Cambridge University Press, 1994
- 2 Frucht D. A one-regular graph of degree three. Canad J Math, 1952, 4: 240–247
- 3 Malnič A, Marušič D, Seifter N. Constructing infinite one-regular graphs. Europ J Combin, 1999, 20: 845–853
- 4 Marušič D. A family of one-regular graphs of valency 4. Europ J Combin, 1997, 18: 59–64
- 5 Oh J M, Hwang K W. Construction of one-regular graphs of valency 4 and 6. Discrete Math, 2004, 278: 195–207
- 6 Feng Y Q, Li Y T. One-regular graphs of square-free order of prime valency. Europ J Combin, 2011, 32: 265–275
- 7 Feng Y Q, Kwak J H. One-regular cubic graphs of order a small number times a prime or a prime square. J Aust Math Soc, 2004, 76: 345–356
- 8 Feng Y Q, Kwak J H. Cubic symmetric graphs of order a small number times a prime or a prime square. J Combin Theory Ser B, 2007, 97: 627–646
- 9 周进鑫, 冯衍全. 二倍无平方因子阶的 3 度 1-正则图. 中国科学 A 辑, 2008, 38: 121–127
- 10 Li C H. Finite edge-transitive Cayley graphs and rotary Cayley maps. Trans Amer Math Soc, 2006, 358: 4605–4635
- 11 Pan J M. Locally primitive Cayley graphs of dihedral groups. Europ J Combin, 2014, 36: 39–52
- 12 Praeger C E. Finite normal edge-transitive Cayley graphs. Bull Aust Math Soc, 1999, 60: 207–220
- 13 Qiao S H, Li C H. The finite groups of cube-free order, J Algebra, 2011, 334: 101–108
- 14 Feng Y Q, Kwak J H, Wang K S. Classifying cubic symmetric graphs of order $8p$ or $8p^2$. Europ J Combin, 2005, 26: 1033–1052
- 15 Conder M, Ma J C. Arc-transitive abelian regular covers of cubic graphs. J Algebra, 2013, 387: 215–242
- 16 Bosma W, Cannon J, Playoust C. The Magma algebra system I: The user language. J Symbolic Comput, 1997, 24: 235–265

- 17 Macbeath A M. On a theorem of Hurwitz. *Proc Glasgow Math Assoc*, 1961, 5: 90–96
- 18 Godsil C D. On the full automorphism group of a graph. *Combinatorica*, 1981, 1: 243–256
- 19 Sabidussi G O. Vertex-transitive graphs. *Monatsh Math*, 1984, 68: 426–438
- 20 Singerman D. Symmetries of Riemann surfaces with large automorphism group. *Math Ann*, 1974, 210: 17–32
- 21 Li C H, Pan J M. Finite 2-arc-transitive abelian Cayley graphs. *Europ J Combin*, 2008, 29: 148–158
- 22 Praeger C E. On O’Nan-Scott theorem for finite quasiprimitive permutation groups and an application to 2-arc transitive graphs. *J London Math Soc*, 1993, 47: 227–239
- 23 Gorenstein D. *Finite Simple Groups*. New York: Plenum Press, 1982
- 24 Wielandt H. *Finite Permutation Groups*. New York/London: Academic Press, 1964
- 25 Li C H, Qiao S H. Finite groups of fourth-free order. *J Group Theory*, 2013, 16: 275–298
- 26 Fang X G, Wang J, Xu M Y. On 1-arc-regular graphs. *Europ J Combin*, 2002, 23: 785–791
- 27 Feng Y Q, Wang K S. s -Regular cyclic coverings of the three-dimensional hypercube Q_3 . *Europ J Combin*, 2003, 24: 719–731
- 28 Conder M, Nedela R. A refined classification of symmetric cubic graphs. *J Algebra*, 2009, 322: 722–740
- 29 Feng Y Q, Kwak J H. s -Regular cubic graphs as coverings of the complete bipartite graph $K_{3,3}$. *J Graph Theory*, 2004, 45: 101–112
- 30 Conway J H, Curtis R T, Norton S P, et al. *Atlas of Finite Groups*. London/New York: Oxford University Press, 1985
- 31 Li C H, Lou B G, Pan J M. Finite locally primitive abelian Cayley graphs. *Sci China Math*, 2011, 54: 845–854
- 32 Conder M, Feng Y Q. Arc-regular cubic graphs of order four times an odd integer. *J Algebraic Combin*, 2012, 36: 21–31

Finite arc-regular graphs of prime valency

PAN JiangMin, DING SuYun & LIU Yin

Abstract A graph is called arc-regular if its full automorphism group acts regularly on its arc set. We characterise arc-regular graphs with prime valency of cube-free order, and prove that such graphs of order twice an odd cube-free integer are normal Cayley graphs or binormal Cayley graphs, and there is no such graph of order four times an odd cube-free integer, which generalises certain previous results in the literature; we also classify arc-regular graphs with prime valency of order eight times an odd square-free integer, and found some new arc-regular graphs. Moreover, motivated by the obtained results, a conjecture and some problems are proposed.

Keywords arc-regular graph, Cayley graph, automorphism group, cube free order

MSC(2010) 20B15, 20B30, 05C25

doi: 10.1360/012014-1