

轴对称塑性流动的主剪应力迹线理论

王仲仁 胡卫龙

(哈尔滨工业大学金属材料系, 哈尔滨 150006)

关键词 轴对称塑性流动、主剪应力迹线

一、引言

滑移线法是塑性力学中的基本解题方法之一^[1,2],但对于目前已有的滑移线理论,严格地说,它只限于解刚塑性平面应变问题。虽然曾有人利用“完全塑性”假设条件对轴对称问题做了一些推广^[3],但更多的问题仍不能由此法得到满意地解决。为此,本文通过建立具有实际物理含义的假设条件,给出轴对称子午面内沿主剪应力迹线正应力及流动速度变化规律的微分方程式。

二、轴对称问题的基本方程

首先,假设所分析的材料是理想刚塑性的且各向同性。这样,如不考虑体力的影响,则塑性区内的平衡微分方程为

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{\partial \tau}{\partial z} + \frac{\sigma_r - \sigma_\phi}{r} = 0, \\ \frac{\partial \tau}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\tau}{r} = 0, \end{cases} \quad (1)$$

式中的 r, z, ϕ 分别为极坐标系中的径向、轴向和环向。

材料的塑性屈服满足于 Mises 准则,当引入了 Lode 参数 μ^M 以后,其函数形式可以写成

$$\sigma_1 - \sigma_3 = \sqrt{\frac{2\sigma_s}{3 + \mu^2}} (\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3). \quad (2)$$

另外,在 r, z 平面坐标系内,引入角参数 φ ,它与面内两个主应力 σ_η, σ_ξ 的位置关系如图 1 所示。这样,如设 $p = \frac{1}{2}(\sigma_\eta + \sigma_\xi)$ 为子午面内主剪应力迹线上的正应力,则由应力莫尔圆得到

$$\begin{cases} \tau_r = p - \frac{1}{2}(\sigma_\eta - \sigma_\xi) \sin 2\varphi, \\ \sigma_z = p + \frac{1}{2}(\sigma_\eta - \sigma_\xi) \sin 2\varphi, \\ \tau = \frac{1}{2}(\sigma_\eta - \sigma_\xi) \cos 2\varphi. \end{cases} \quad (3)$$

本文 1991 年 6 月 25 日收到。1991 年 9 月 14 日收到修改稿。

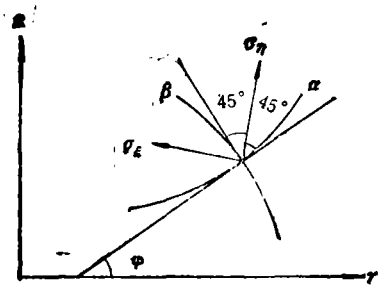


图1 子午面内坐标系

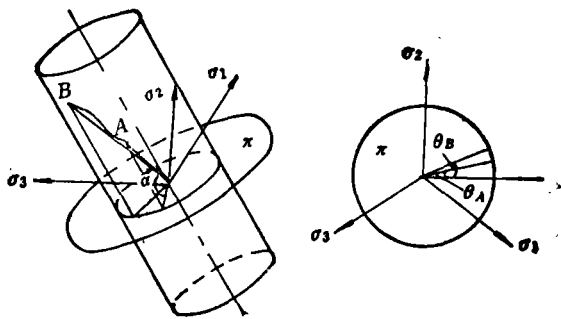


图2 空间屈服点的几何表示

同时,应变速率满足不可压缩条件,而应力应变速率关系则服从 Lévy-Mises 流动法则,即

$$\begin{cases} \dot{\epsilon}_r = \frac{\partial u}{\partial r} = \lambda(2\sigma_r - \sigma_\phi - \sigma_z), \\ \dot{\epsilon}_\phi = \frac{u}{r} = \lambda(2\sigma_\phi - \sigma_z - \sigma_r), \\ \dot{\epsilon}_z = \frac{\partial w}{\partial z} = \lambda(2\sigma_z - \sigma_r - \sigma_\phi), \\ \dot{\nu} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial r} \right) = 3\lambda\tau, \end{cases} \quad (4)$$

式中 u, w 为材料沿 r 和 z 方向的流动速度。

从上面所列诸方程可知,轴对称问题不是双曲型的,且一般来说也不是静定的。所以,求解轴对称塑性流动的关键问题,是如何做一些具有实际物理含义的近似且合理的假设条件。

三、“ π 平面等方位角”假设

事实上,当理想刚塑性材料的屈服应力 σ_s 被确定以后,空间屈服表面上任一屈服点的应力值均可以用图 2 中的几何参数 α 及 θ 来表示。其中 θ 角所在平面为 π 平面。而当材料所满足的屈服准则与静水压力无关时,真正表现该屈服点变形特性的,实际上仅为 π 平面内的方位角 θ 。 θ 角也可简单地用 Lode 参数表示为

$$\mu = \sqrt{3} \lg \theta. \quad (5)$$

而对于一个连续塑性变形区来说,它的屈服点必将在屈服表面上形成一条连续的屈服迹线,如图 2 中的 AB 曲线。如设 $\Delta\theta$ 为 A 点与 B 点的方位角差,则由方位角所具有的物理含义可知,当 $\Delta\theta$ 绝对值很小时, A 点与 B 点的偏应力张量差也是很小的。由此,可对轴对称塑性变形问题的分析过程作出以下近似假设。

假设:对于一个轴对称塑性变形问题,如果某一塑性变形区内各点的屈服应力仅分布于 Mises 屈服圆柱面上由两条相近母线所围成的有限区域内,则在各应力分量和流动速度的分析计算过程中,可近似地利用已知边界条件或实验等手段,选择一个不变的方位角 θ ,来代替这一区域内所有屈服点的方位角。这一假设可简称为“ π 平面等方位角”假设。

另外,由式 (5) 可知,“ π 平面等方位角”假设,实际上也就是假设这一区域内 Lode 参数值近似为一常数。

四、沿主剪应力迹线正应力及流动速度的变化规律

对于轴对称塑性变形问题,其环向应力 σ_ϕ 可能处于任一主应力状态。当我们假设 $\sigma_\phi = \sigma_3$, 并选择 σ_ϕ 作为子午面内的最大主应力时,由式(2)并借助 Lode 参数可得

$$\begin{cases} \sigma_\phi - \sigma_r = \frac{2\sigma_1}{\sqrt{3+\mu^2}} = 2k, \\ \sigma_\phi - \sigma_z = (1-\mu)k. \end{cases} \quad (6)$$

这样,将式(3)、(6)代入方程(1)中,得

$$\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial r} - (1-\mu)k \cos 2\varphi \frac{\partial \varphi}{\partial r} - (1-\mu)k \sin 2\varphi \frac{\partial \varphi}{\partial z} \\ = -\frac{(1-\mu)k(1+\sin 2\varphi) - 4k}{2r}. \end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial z} - (1-\mu)k \sin 2\varphi \frac{\partial \varphi}{\partial r} + (1-\mu)k \cos 2\varphi \frac{\partial \varphi}{\partial z} \\ = -\frac{(1-\mu)k}{2r} \cos 2\varphi. \end{aligned} \quad (8)$$

(7)、(8)式构成了一组双曲型偏微分方程,沿两族特征线方向的斜率 $m = dz/dr$ 可表示为

$$\text{沿 } \alpha \text{ 线 } m = \operatorname{tg} \varphi; \quad (9)$$

$$\text{沿 } \beta \text{ 线 } m = -\operatorname{ctg} \varphi. \quad (10)$$

也就是说两族特征线是正交的,且与子午面内的主剪应力迹线相重合。

进一步可求得沿特征线正应力 p 的微分方程为

$$\text{沿 } \alpha \text{ 线 } dp - (1-\mu)k d\varphi - \frac{k}{2r} [(1-\mu)\operatorname{tg} \varphi - (3+\mu)]dr = 0; \quad (11)$$

$$\text{沿 } \beta \text{ 线 } dp + (1-\mu)k d\varphi - \frac{k}{2r} [(1-\mu)\operatorname{ctg} \varphi - (3+\mu)]dr = 0. \quad (12)$$

如果按“完全塑性”假设条件^[3]取 Lode 参数值(上述状态 $\mu = -1$),则(11)、(12)式将转化为按“完全塑性”假设所推导出的方程形式。所以说,“完全塑性”假设仅是“ π 平面等方位角”假设的一个特例。

同样,利用应力应变速率关系(式(4))及材料体积不可压缩条件,可获得一组求轴对称塑性流动速度场的偏微分方程,它们也是双曲型的,且特征线与应力方程特征线重合。当设 U 、 W 分别为沿 α 和 β 线方向的速度分量时,则有

$$\text{沿 } \alpha \text{ 线 } dU - W d\varphi + \frac{(5+\mu)\operatorname{tg}^2 \varphi + 1 + \mu}{2(3+\mu)} \cos \varphi \cdot \frac{U}{r} dr = 0; \quad (13)$$

$$\text{沿 } \beta \text{ 线 } dW + U d\varphi + \frac{(5+\mu)\operatorname{ctg}^2 \varphi + 1 + \mu}{2(3+\mu)} \sin \varphi \cdot \frac{W}{r} dr = 0. \quad (14)$$

当环向主应力 $\sigma_\phi = \sigma_2$ 及 $\sigma_\phi = \sigma_1$ 时,其应力方程与速度方程的求解过程与上述完全相同。

五、实例计算

现在我们直接引用前面所导出的应力方程(11)、(12)式进行拔管工艺的应力值计算。

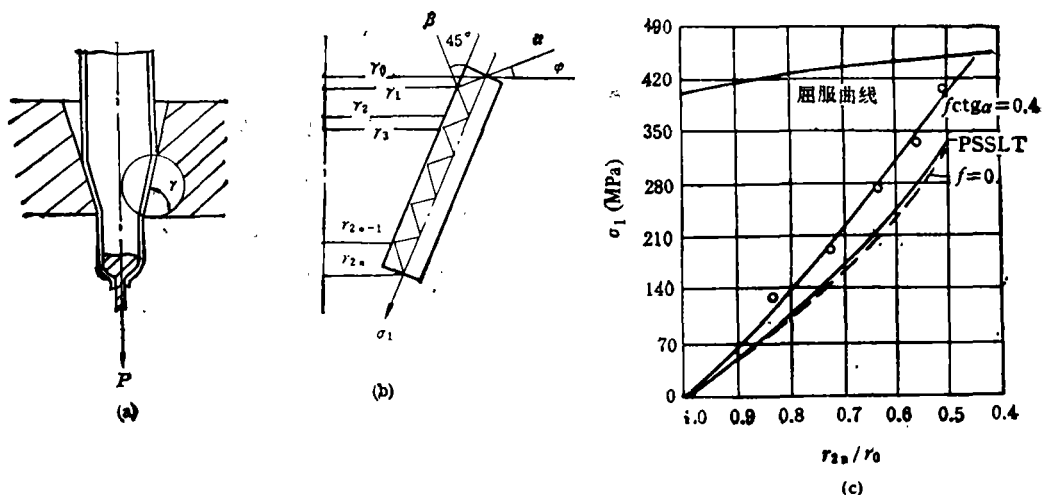


图3 拔管

(a) 工艺简图; (b) 主剪应力迹线; (c) 计算结果

图3a为拔管工艺简图,如不考虑工件与工具间摩擦力的影响,其塑性变形区的主剪应力迹线可近似地表示为图3b。这样, α 特征线与 r 轴间的夹角为 $\varphi = \gamma - 45^\circ$ 。因为管子壁很薄,并且为了与用切块法获得的解析解^[2]进行比较,这里,我们只计算管壁中线的拉拔应力值。计算由已知边界点 r_0 算起,分别利用式(11)、(12)经逐点迭加,最后可得 r_{2n} 点的主应力值 σ_1 为

$$\sigma_1 = \frac{k}{2} \left\{ [(1-\mu)\operatorname{tg}\varphi - (3+\mu)] \ln \frac{r_1 r_3 \cdots r_{2n-1}}{r_0 r_2 \cdots r_{2(n-1)}} + [(1-\mu)\operatorname{ctg}\varphi - (3+\mu)] \ln \frac{r_2 r_4 \cdots r_{2n}}{r_1 r_3 \cdots r_{2n-1}} \right\}, \quad (15)$$

式中各点的 r 值可由图3b的几何关系简单地求得。

用文献[2]所给算例中的基本参数,并选择不同的 r_{2n}/r_0 值进行了计算,结果见图3c所示。从图中的计算曲线可以看到,用本文的特征线解法所得结果,略大于文献[2]中用切块法导出的并同样不考虑摩擦力(摩擦系数 $f=0$)影响的近似解析解,差值在2%左右。

参 考 文 献

- [1] 王仁、熊祝华、黄文彬,塑性力学基础,科学出版社,1982,244—312; 105.
- [2] Johnson, W., Mellor, P. B., *Engineering Plasticity*. Van Nostrand Reinhold, London, 1973, 381—414, 288.
- [3] Shield, R. T., *Proc. Roy. Soc.*, A233 (1955). 267—287.