



论 文

完全判别分析

霍红文^{①*}, 封举富^②

① 中国电子技术标准化研究院, 北京 100007

② 北京大学信息科学技术学院, 机器感知与智能教育部重点实验室, 北京 100871

* 通信作者. E-mail: huohongwen@gmail.com

收稿日期: 2011-05-16; 接受日期: 2011-07-13

国家重点基础研究发展计划 (批准号: 2011CB302400) 资助项目

摘要 针对现有的线性判别分析算法中存在的降维舍弃空间的判别信息丢失问题, 以及秩空间和零空间的判别信息难以兼顾的问题, 本文提出了一种完全判别分析算法. 算法通过新构建一个子空间以及其中的判别矩阵, 实现了可以充分使用全空间的判别信息; 且新空间的维数较低, 算法流程简单, 计算代价较小. 相关实验结果证实了本文算法较传统判别分析算法有更好的性能和效率.

关键词 判别分析 子空间 秩空间 零空间 人脸识别

1 引言

基于线性投影的子空间判别分析方法是模式识别中一类非常重要的方法. 其主要思想是: 将训练样本 (或由训练样本提取的特征) 看作是一个矩阵或向量, 根据一定的性能目标要求来寻求一个线性的空间变换来构建一个新的子空间, 而任何一个训练样本都可以对应于该空间中的一个点. 在新的空间中包含有原始样本的分布信息或者分类信息的低维特征, 在这些低维特征的基础上可以进行分类识别.

子空间方法中最重要的一类方法是主成分分析 (principal component analysis, PCA) 方法^[1] 和线性判别分析 (linear discriminant analysis, LDA) 方法^[2].

由于基于 PCA 的子空间分类方法仅考虑了子空间的结构信息, 而没有考虑到样本的判别 (类别) 信息; 而基于 LDA 的子空间分类方法在提取低维特征和构建子空间时都着重考虑了样本自身所携带的判别信息 (如图 1 所示), 并且计算简单且存储容易, 因此判别分析方法在分类识别问题中有着更为广泛的应用. 各种基于判别分析的模式识别算法层出不穷, 一直是模式识别领域的主流方法之一.

但是以判别分析方法为代表的子空间分类方法自身有一些难以克服的问题, 限制了其识别效能和适用范围:

- 在样本数较少、维数较高情况下无法使用的问题 (即高维小样本问题);
- 在对高维子空间降维时, 所舍弃空间中很可能蕴含着很多有用的判别信息, 如何更好地保留、使用这些判别信息一直以来都是一个研究热点;
- 在判别分析过程中, 存在秩空间和零空间判别信息难以兼顾等问题.

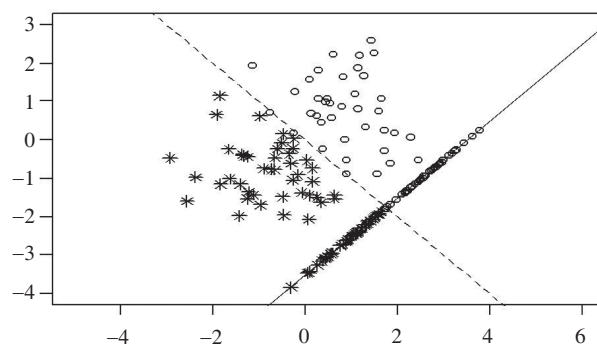


图 1 二维空间的线性判别分析

Figure 1 Linear discriminant analysis in 2D space

因此针对判别分析算法展开进一步研究有着很强的理论意义和应用价值. 本文将首先介绍传统的线性判别分析算法, 并指出其存在的一些目前尚未解决的问题, 然后给出一种新的子空间中的判别分析方法——完全判别分析算法. 在这个新的算法中, 我们将给出一种新的构造判别空间的办法. 该方法既大大地降低了原空间的维数, 也完整地使用了全空间 (包括秩空间和零空间) 中的判别信息; 同时算法还对全空间中的判别信息进行了有效的融合, 共同给出最终的判别结果.

2 线性判别分析 (LDA)

本节将分三个小节详细介绍线性判别分析算法. 2.1 小节介绍其在类内散度矩阵 S_w 的秩空间中的求解方法, 2.2 小节介绍其在 S_w 的零空间中的求解方法, 2.3 小节介绍判别分析算法存在的问题以及现有的解决方案.

2.1 秩空间中的判别分析

在秩空间中, 线性判别分析 (LDA) 是基于 Fisher 准则来最优化其目标函数的, 又称为 Fisher 判别分析. 它以样本的可分性为目标. 算法的目标是寻找一组线性变换, 使得在变换后的空间中, 训练样本的类内离散度 S_w 最小, 同时, 类间离散度 S_b 达到最大.

为使得同类训练样本分布的尽可能集中, 而不同类的训练样本分布的尽可能分散, 最佳的 LDA 投影变换矩阵 W 应满足如下的 Fisher 判别准则:

$$J_F(W) = \frac{W^T S_b W}{W^T S_w W}. \quad (1)$$

Fisher 准则在分母不为零即 $W^T S_w W \neq 0$ 的情况下才可以正常求解, 即一定要在 S_w 的秩空间 (非零空间) 求解. 此时使该准则函数取最大值的投影向量 W_F 就是最佳的投影方向

$$W_F = \arg \max_W \frac{W^T S_b W}{W^T S_w W}. \quad (2)$$

2.2 零空间中的判别分析

LDA 算法的核心部分是求解 Fisher 函数. 但是在求解时, $W^T S_w W = 0$ 情况是被略去的, 而满足 $W^T S_w W = 0$ 的 W 所张成的空间中很可能含有大量的判别信息, 这一空间被称为零空间.

对于高维的训练样本来说, 类内散度阵 S_w 是较大的矩阵, 求解其零空间需要较大的计算量. 为此文献 [3] 首先对训练样本进行聚类分析并降维来降低计算的复杂度, 然而这种方法改变了原始样本特征空间. 文献 [4] 的实验显示这个方法的识别性能非常依赖于零空间的维数, 因此应该避免预先的降维处理. 类间散度矩阵 S_b 和类内散度矩阵 S_w 均为半正定阵, 由于所求判别向量 W 应使得 (1) 式的分子最大, 因此总散度矩阵的零空间对之后的判别分析作用不大; 为此文献 [5] 的 PCA + 零空间方法首先将所有样本映射到总散度阵的秩空间 (即非零空间) 中, 然后在 S_w 的零空间中得到最佳的判别方向.

从以上的分析可以看出, 零空间方法在 LDA 的一系列改进方法中有着非常重要的作用. 本小节下面对零空间的线性判别分析 (NLDA) 方法做简要的介绍.

经典的 LDA 求解方法是通过舍弃 S_w 的零空间使得 Fisher 判别准则 (1) 式可以直接求解. 但是如果 $W^T S_w W = 0$, 而 $W^T S_b W > 0$, 则 (1) 式的目标函数 J_F 就达到了最大值. 也就是说基于 Fisher 判别准则的部分最佳投影方向 W 存在于 S_w 的零空间中. 因此, 零空间的线性判别分析 (NLDA) 就是在 S_w 的零空间中寻找最佳的判别投影方向, Fisher 判别准则 (1) 式由如下变形的 Fisher 判别准则 (3) 式替代.

$$J_F(W) = W^T S_b W, \text{ s.t. } W^T S_w W = 0. \quad (3)$$

由 (3) 式求解 NLDA 最佳判别投影矩阵, 需要经过下面的两个步骤:

- 构建 S_w 的零空间. S_w 的零空间 Ω_N 由特征方程 $S_w \alpha = \lambda \alpha$ 所有零特征值所对应的特征向量张成, 即 Ω_N 的基向量为 $\{\alpha_i \mid \lambda_i = 0\}$. 令 $W_N = [\alpha_1, \dots, \alpha_i, \dots, \alpha_m]$, 其中 $\alpha_i \in \Omega_w$, $m = N - \text{rank}(S_w)$ 为 Ω_w 的维数. W_N 即为从 $\mathbb{R}^N$ 到零空间 Ω_N 的投影变换矩阵, 训练样本 $x \in \mathbb{R}^N$ 在 S_w 的零空间 Ω_N 中的投影为 $y = W_N^T x$.

- 提取 S_w 零空间中的最佳投影向量. 首先, 将训练样本集 $X = \{x_i\}_{i=1}^n$, $x_i \in \mathbb{R}^m$ 投影到 S_w 的零空间 Ω_N 中, 其类内散度矩阵 $\tilde{S}_w = W_N^T S_w W_N = 0$, 此时类间散度矩阵为 $\tilde{S}_b = W_N^T S_b W_N$. 其次, 在 Ω_N 中寻找投影的最佳方向 W_B , 即寻找使得训练样本集的类间散度最大的最佳投影方向. 由求解如 (4) 式的最优化问题得到.

$$W_B = \arg \max_W |W^T \tilde{S}_b W| = \arg \max_W |W^T W_N^T S_b W_N W| = [w_1, \dots, w_B]. \quad (4)$$

通过上述两步的投影变换, 零空间线性判别分析 (NLDA) 的最佳投影变换矩阵为 $W_{\text{NLDA}} = W_N W_B$. 将训练样本 x 投影到 W_{NLDA} 的列向量上, 即可得到描述该训练样本的一组特征 $y = W_{\text{NLDA}}^T x$, 这些特征向量可以直接用于判别分类, 典型的零空间方法即是如此 [3,6,7].

2.3 判别分析存在的问题

很多模式识别问题都是训练样本数可能较少, 而样本的维数往往很高. 在这种情况下应用线性判别分析来解决分类识别问题就会遇到一个很大的难题, 即高维小样本 (small sample size, SSS) 问题.

在很多模式识别问题中, 样本的维数往往达到样本数的几百倍或者更多. 此时如果单独在 S_w 秩空间中进行判别分析算法, 则会损失大量的判别信息 (S_w 零空间的维数往往远高于 S_w 秩空间的维

数); 而如果仅在 S_w 零空间中判别, 一则维数太高导致运算量很大, 二则同样会损失 S_w 秩空间中的判别信息.

也就是说, 无论是秩空间中的 Fisher 准则判别, 还是零空间判别分析, 这两种算法都没有提取到完整的判别信息, 它们都是仅仅关注了某一方面的特征而忽视了另一方面. Fisher 准则判别丢掉了 S_w 的整个零空间, 仅仅提取了存在于 S_w 秩空间中的判别信息; 与此相反, 零空间判别分析只是提取了 S_w 零空间的判别信息, 却完全忽视了 S_w 的秩空间.

S_w 的秩空间与 S_w 的零空间是 $\mathbb{R}^{N \times N}$ 空间中的两个相互正交的互补子空间, 如何同时提取存在于该两个子空间中的判别信息, 并将这两部分信息进行有效地融合, 一直以来都是子空间分析方法中的热点和难点.

为了融合秩空间与零空间的判别信息, Zhang 等 [8] 提出了用模糊积分、加权投票等办法来融合秩空间、零空间的判别结果, 取得了一定的成果; 但是这些方法在融合判别结果时都明显有较强的外力干预痕迹, 结果也不很理想.

Zhang 等 [9] 构建了总体散度矩阵并在其中求解, 以保留全部的判别信息. 但是由于该矩阵的维度很高 ($N \times N$), 必须先经过降维才能够进一步使用判别分析方法, 而降维过程不可避免地要舍弃很多空间, 因此仍然会损失大量的判别信息, 而且计算代价很大.

在下一节, 本文将提出一种“完全判别分析”算法来解决这个问题.

3 完全判别分析

本节将提出一种新的判别分析方法: 子空间中的完全判别分析算法.

在上一节中, 我们分别介绍了在秩空间和零空间中使用线性判别分析方法: Fisher 判别分析和零空间判别分析, 以及判别分析算法目前存在的一些难以解决的问题. 简单来说, 需要解决的问题有两个: 一是原空间维数较高, 因此需要降维, 但是降维过程往往伴随着判别信息的损失; 二是缺乏一种有效的融合零空间判别信息与秩空间判别信息的方法. 这两个问题都是我们提出的完全判别分析算法要解决的. 下面我们用数学语言来描述这个问题:

设训练集中有分属于 c 个人的一共 n 个训练样本, 每个样本为 m 维, 记 $X = [x_1, x_2, \dots, x_n]$, $x_i \in \mathbb{R}^m$, 为方便计算起见, 设 X 是去中心化的. 记降维后的数据集维数为 k , 集合 $\mathcal{K} = \{1, 2, \dots, k\}$, $\mathcal{N} - \mathcal{K} = \{k+1, k+2, \dots, n\}$, 如果一个矩阵 M 有 n 列元素, 则 M 可重写为 $M = [M_{:\mathcal{K}}, M_{:(\mathcal{N}-\mathcal{K})}]$; 如果 M 有 n 行元素, 则记为

$$M = \begin{bmatrix} M_{\mathcal{K}:} \\ M_{(\mathcal{N}-\mathcal{K}):} \end{bmatrix}.$$

设在原 n 维的空间中, 矩阵 X 可以被一组基线性表示,

$$X = PA, \quad (5)$$

其中, $P = [p_1, p_2, \dots, p_n] \in \mathbb{R}^{m \times n}$ 称为基矩阵; $A = [a_1, a_2, \dots, a_n] \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 且 $A = (P^T P)^{-1} P^T X$ 称为特征矩阵, 当 P 为列正交矩阵时, 可以简化为 $A = P^T X$.

PCA 算法即是按照最小重构误差准则获得这样一个正交基矩阵 P , 并截取其特征值最大的 k ($k \ll n$) 个基向量 $P_{:\mathcal{K}}$ 来构建一个新的子空间. 在这个 k 维的子空间中, X 的特征矩阵为 $A = P_{:\mathcal{K}}^T X$. 设 $\tilde{X}$

是对 X 的重构, 则

$$\tilde{X} = \sum_{j=1}^k a_j u_j = P_{:\mathcal{K}}(P_{:\mathcal{K}}^T X). \quad (6)$$

在子空间方法中, 判别分析方法也可以简单地认为是一个维数约减问题. 即寻找一个线性函数 $g(x)$, 满足

$$g(X) = W^T X, \quad (7)$$

其中 $W = [w_1, w_2, \dots, w_c] \in R^{m \times c}$, c 为类别数. 即将原空间中的数据映射到一个低维的“分类空间”中去. 当 S_w 正定时, 可以使用 LDA 算法, 根据 Fisher 准则来确定线性映射矩阵 W ,

$$J_F(W) = \frac{W^T S_b W}{W^T S_w W}. \quad (8)$$

而对于 S_w 的零空间, 则可以用如下公式处理:

$$J_F(W) = W^T S_b W, \text{ s.t. } W^T S_w W = 0. \quad (9)$$

由 (5) 式可知, 在原 n 维空间中, X 可以表示为 $X = PA$, 即基矩阵 P 张成了 X 的空间, 而 (7) 式中的 W 正是这个空间的一个具有判别信息的子空间. 所以有: $W = PV$, 其中 $V \in R^{n \times c}$ 可以看成是一个从 W 空间向 P 空间的线性映射. 当 P 为正交矩阵时, V 的计算如下:

$$V = (P^T P)^{-1} P^T W = P^T W. \quad (10)$$

将 (5) 和 (10) 式代入 (7) 式中, 有

$$g(X) = W^T X = (V^T P^T)(PA) = V^T A. \quad (11)$$

在高维小样本情况下, 上述映射 $g(X)$ 是存在着零空间的问题的, 即类内散度阵 S_w 的零特征值对应的特征向量张成的空间中很可能存在着判别信息. 针对零空间维数较高的问题, 文献 [7,10] 等提出了采用降维的方法对零空间进行处理. 即对 S_w 做 SVD 分解, 并按特征值大小做降序排列,

$$S_w = U^T \Lambda U = U^T \begin{bmatrix} \Lambda_t & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} U, \quad (12)$$

其中 t 为 S_w 的秩. 在后 $n-t$ 个特征向量中截取 k 个向量, 由这 k 个向量张成零空间的一个子空间

$$U_{:\mathcal{K}}^T S_w U_{:\mathcal{K}} = 0. \quad (13)$$

然后在这个子空间中继续其他的映射变换操作. 这个方法降低了子空间的维数, 有效地减少了计算量, 但是在降维过程中很可能会丧失一部分判别信息.

下面将介绍本文提出的完全判别分析算法. 该算法既完整地保留零空间中的判别信息, 也大大地降低了零空间的维数使得判别分类的计算量显著下降, 同时也将零空间的判别信息与非零空间 (S_w 的秩空间) 中所蕴含的判别信息做了融合.

对 S_w 做如 (12) 式所示的特征值分解. 将特征向量矩阵 U 分成两个部分, 即 t 个非零特征值对应的特征向量矩阵 $U_{:\mathcal{T}}$ 和其余 $n-t$ 个零特征值对应的特征向量矩阵 $U_{:(\mathcal{N}-\mathcal{T})}$,

$$U_{:\mathcal{T}}^T S_w U_{:\mathcal{T}} = \Lambda_t, \quad U_{:(\mathcal{N}-\mathcal{T})}^T S_w U_{:(\mathcal{N}-\mathcal{T})} = 0. \quad (14)$$

设在 $U \in \mathbb{R}^{m \times n}$ 张成的空间 (即 S_w 的完整空间) 中, 样本集 X 的最佳投影方向为 $W \in \mathbb{R}^{n \times c}$, 则投影变换结果 $Y \in \mathbb{R}^{c \times n}$ 为

$$\begin{aligned} Y &= W^T (U^T X) = (UW)^T X = \left([U_{:\mathcal{T}}, U_{:(\mathcal{N}-\mathcal{T})}] \begin{bmatrix} W_{\mathcal{T}:} \\ W_{(\mathcal{N}-\mathcal{T}):} \end{bmatrix} \right)^T X \\ &= (U_{:\mathcal{T}} W_{\mathcal{T}:} + U_{:(\mathcal{N}-\mathcal{T})} W_{(\mathcal{N}-\mathcal{T}):})^T X, \end{aligned} \quad (15)$$

其中 $W_{\mathcal{T}:} \in \mathbb{R}^{t \times c}$ 是秩空间 (即非零空间) 中的最佳判别投影, 可以用 (1) 式所示的 Fisher 准则求得; $W_{(\mathcal{N}-\mathcal{T}):} \in \mathbb{R}^{(n-t) \times c}$ 是零空间中的最佳判别投影, 可以用 (3) 式求得. 典型的 LDA 算法就是在 $U_{\mathcal{T}}$ 张成的空间中求解, 而典型的零空间方法则是在 $U_{(\mathcal{N}-\mathcal{T})}$ 张成的空间中求解.

为了更好地将秩空间和零空间的判别信息融合起来, 并且考虑到高维小样本问题中零空间的维数往往远大于非零空间的维数, 我们对零空间的基进行线性组合, 构成一个维数较低的“判别零空间”, 并且将它与秩空间组合起来.

判别零空间 令 $\tilde{\Phi} = U_{:(\mathcal{N}-\mathcal{T})} W_{(\mathcal{N}-\mathcal{T}):} \in \mathbb{R}^{m \times c}$, 组成 $\tilde{\Phi}$ 的 c 个向量都在零空间中, 即都是由基矩阵 U 后面的 $n-t$ 个基张成. 也就是说这 c 个向量都可以由这 $n-t$ 个基的线性组合表示, 因此它们与前 t 个基都是正交的, 而相互之间不一定正交. 对 $\tilde{\Phi}$ 做正交化,

$$\Phi_{\perp} = \tilde{\Phi} (\tilde{\Phi}^T \tilde{\Phi})^{-1/2}.$$

由 $\Phi_{\perp}$ 张成的空间是零空间的一个子空间, 其维数低于零空间的维数 ($c < (n-t)$), 却含有零空间中所有的 LDA 判别信息 (下面的公式给出了证明), 因此称为“判别零空间”.

下面组合秩空间和判别零空间, 定义两个新变量 Φ 和 Ψ ,

$$\begin{aligned} \Phi &= [U_{:\mathcal{T}}, \Phi_{\perp}] = \left[U_{:\mathcal{T}}, \tilde{\Phi} (\tilde{\Phi}^T \tilde{\Phi})^{-1/2} \right] \in \mathbb{R}^{m \times (t+c)}, \\ \Psi &= \begin{bmatrix} W_{\mathcal{T}:} \\ (\tilde{\Phi}^T \tilde{\Phi})^{1/2} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{(t+c) \times c}. \end{aligned}$$

新空间的基矩阵 Φ 是由原秩空间基矩阵 $U_{:\mathcal{T}}$ 和判别零空间基矩阵 $\Phi_{\perp}$ 组合而成; 而矩阵 Ψ 则是在原秩空间判别矩阵 $W_{\mathcal{T}:}$ 的基础上添加了 c 个行向量. 可以证明, 此时的新空间基矩阵 Φ 以及矩阵 Ψ 包含了 U 空间中所有的判别信息, 如下面的公式所示:

$$\begin{aligned} \hat{Y} &= \Psi^T (\Phi^T X) = (\Phi \Psi)^T X = \left([U_{:\mathcal{T}}, \tilde{\Phi} (\tilde{\Phi}^T \tilde{\Phi})^{-1/2}] \begin{bmatrix} W_{\mathcal{T}:} \\ (\tilde{\Phi}^T \tilde{\Phi})^{1/2} \end{bmatrix} \right)^T X \\ &= (U_{:\mathcal{T}} W_{\mathcal{T}:} + \tilde{\Phi})^T X = (U_{:\mathcal{T}} W_{\mathcal{T}:} + U_{:(\mathcal{N}-\mathcal{T})} W_{(\mathcal{N}-\mathcal{T}):})^T X \\ &= \left([U_{:\mathcal{T}}, U_{:(\mathcal{N}-\mathcal{T})}] \begin{bmatrix} W_{\mathcal{T}:} \\ W_{(\mathcal{N}-\mathcal{T}):} \end{bmatrix} \right)^T X = (UW)^T X = W^T (U^T X) = Y. \end{aligned} \quad (16)$$

算法的流程如表 1 所示, 下面对我们的算法做一个简单的小结.

- 首先, 这个算法有效地降低了判别分析算法的空间复杂度, 原空间的基矩阵 U 张成了 n 维空间, 而新的基矩阵 Φ 张成的空间只有 $t+c$ 维, 其中 t 为秩空间的维数, c 为线性判别的类别数;
- 其次, 相较于典型的线性判别分析算法和零空间算法, 我们的算法完整地利用了原空间中的所

表 1 完全判别分析算法

Table 1 Complete discriminant analysis algorithm

Training	Testing
Input: $X \in \mathbb{R}^{m \times n}$.	Input: $\Phi \in \mathbb{R}^{m \times (t+c)}, \Psi \in \mathbb{R}^{(t+c) \times c}, x \in \mathbb{R}^m$.
Output: $\Phi \in \mathbb{R}^{m \times (t+c)}, \Psi \in \mathbb{R}^{(t+c) \times c}$.	Output: $y \in \mathbb{R}^c$.
Step: 1. In rank space $\rightarrow U_{:\mathcal{T}}, W_{\mathcal{T}:}$. 2. In null space $\rightarrow U_{:(\mathcal{N}-\mathcal{T})}, W_{(\mathcal{N}-\mathcal{T}):}$. 3. $\tilde{\Phi} = U_{:(\mathcal{N}-\mathcal{T})} W_{(\mathcal{N}-\mathcal{T}):} \in \mathbb{R}^{m \times c}$. 4. $\Phi = [U_{:\mathcal{T}}, \tilde{\Phi}(\tilde{\Phi}^T \tilde{\Phi})^{-1/2}] \in \mathbb{R}^{m \times (t+c)}$. 5. $\Psi = \begin{bmatrix} W_{\mathcal{T}:} \\ (\tilde{\Phi}^T \tilde{\Phi})^{1/2} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{(t+c) \times c}$.	Step: 1. Project x to space Φ: $x' = \Phi^T x \in \mathbb{R}^{t+c}$. 2. $y = \Psi^T x' = \Psi^T \Phi^T x \in \mathbb{R}^c$.

有判别信息, 即非零空间的判别信息 $W_{\mathcal{T}}$ 和零空间的判别信息 $W_{(\mathcal{N}-\mathcal{T})}$ 都得到了保留.

4 实验结果

为了测试本文提出的完全判别分析算法的有效性, 我们在 Yale, ORL, AR^[11] 等人脸数据库上做了相关测试, 并与经典的子空间人脸识别方法 Eigenface, Fisherface 等算法做了比较.

Yale 人脸数据库中共有 165 幅图像, 分属 15 个人, 每人有 11 幅不同表情和光照条件的图像. 其光照条件根据光源位置可划分为均匀、中心、左侧和右侧等. 除了表情与光照条件的差异外, 有些图像还存在有或没有佩戴眼镜的差异. Yale 数据集的主要挑战是光照的变化.

ORL 人脸数据库包含有 40 个人的 400 幅图像, 每个人包含 10 幅图像. ORL 数据集的主要挑战是人脸图像有 20 度之内的姿态变化.

AR 人脸数据库包含 126 个人的 3276 幅图像, 每个人包含 26 幅图像 (编号 a~z). 在每个人的 26 幅图像中, a~m 是同一时间拍摄的, n~z 是 2 周后拍摄的. AR 包含表情 (a~d, n~q)、光照 (e~g, r~t) 和遮挡 (h~m, u~z) 等大变化, 是一个很有挑战性的数据集.

我们对人脸图像做了简单的预处理, 提取的特征为灰度和梯度联合向量 $\mathbf{V}^{[12]}$, 设人脸图像 I 的尺寸为 $W \times H$, 则 $\mathbf{V}$ 的表达式为

$$\begin{aligned}
 \mathbf{v}_A(Hy + x) &= I(x, y), \\
 \mathbf{v}_G(Hy + x) &= |\nabla I(x, y)|, \\
 \mathbf{v} &= \begin{pmatrix} \mathbf{v}_A \\ \mathbf{v}_G \end{pmatrix},
 \end{aligned} \tag{17}$$

除了与两种经典的子空间人脸识别方法: 特征脸 “Eigenface” 和 “Fisherface” 两种算法进行比较外, 我们还测试了完全判别分析与另外两种对比方法的实验结果. 即设置了完全判别分析算法在另外

表 2 完全判别分析与相关算法的比较 (%)

Table 2 Comparing complete discriminant analysis with other algorithms(%)

	Eigenface	Fisherface	Only rank space	Only null space	Complete discriminant analysis
Yale	83.72 ± 2.51	86.52 ± 3.25	88.48 ± 3.05	88.46 ± 3.18	92.49 ± 2.48
ORL	85.57 ± 2.92	89.73 ± 3.92	91.42 ± 2.71	94.72 ± 3.23	98.22 ± 1.51
AR	83.31 ± 3.27	86.42 ± 3.71	88.77 ± 2.90	89.29 ± 2.51	93.85 ± 1.17

表 3 完全判别分析算法性能与每个人训练样本数的关系 (%)

Table 3 The relationship between complete discriminant analysis algorithm's performance and number of training samples of each person(%)

	6	8	10	12	14	16
Yale	75.25	83.02	86.24	89.17	90.05	92.50
ORL	82.36	87.92	89.33	92.72	97.22	97.45
AR	82.31	84.71	88.77	90.04	92.45	94.72

两种情况下 (分别为仅秩空间, 仅零空间) 的分类准确率.

1) 仅秩空间, 即首先由类内散度矩阵 S_w 的非零特征值对应的特征向量构建的秩空间中, 并在秩空间中进行判别分析;

2) 仅零空间, 即首先由类内散度矩阵 S_w 的零特征值对应的特征向量构建的零空间中, 并在零空间中进行判别分析.

我们将本文的算法以及相关对比算法在 Yale, ORL, AR 等人脸数据库上进行了对比实验. 在实验中, 各算法的实验条件设置完全一致. 在测试并对比各算法时, 每个人脸库都是随机取一半人脸图像作训练样本, 另一半作测试样本. 每个人脸库上的随机实验都各做了 10 组, 最终的统计结果如表 2 所示.

实验结果显示, 本文算法的性能与经典的子空间算法相比有较大的提升; 另外通过与仅在秩空间中进行判别分析, 仅在零空间中进行判别分析这两种对比实验的比较, 可以看出本文的算法的准确率较高, 在算法中为提升识别结果的相关转换处理是有效的.

另外我们通过表 3 来显示完全判别分析算法的识别率随着参与训练样本的增加而变化的过程, 即完全判别分析算法的性能与参与训练的样本的个数之间的关系. 为了增加每一类样本的个数, 我们对数据集中的原始样本做了预处理之后, 进行了左右镜像操作. 从表中可以看出, 随着参与训练的人脸样本个数的增加, 完全判别分析算法的性能也是随之提升的.

5 总结

基于线性投影的子空间判别分析方法目前是模式识别领域的主流方法之一, 但是在“高维小样本”情况下, 即当样本数量较少且维数较高时, 子空间判别方法在分类识别中的应用受到了很多限制.

本文针对子空间判别分析算法中存在的降维舍弃空间的判别信息丢失问题, 以及秩空间判别信息与零空间判别信息难以融合的问题, 提出了完全判别分析算法.

算法将秩空间和零空间的基矩阵进行了重新处理和组合, 构建了一个新的判别空间以及该判别空间中的判别矩阵. 算法的优点在于新构建的判别空间的维数较低, 同时充分保留了全空间的判别信息; 而且流程简单, 计算代价较小.

通过在 Yale, ORL, AR 等数据库上与其他子空间算法的对比实验, 验证了本文提出的完全判别分析算法有效地利用了全空间的判别信息, 是又一种有效的子空间判别分析算法.

参考文献

- 1 Turk M A, Pentland P A. Eigenfaces for recognition. *J Cogn Neurosci*, 1991, 3: 71–86
- 2 Belhumeur P N, Hespanha J P, Kriegman D J. Eigenfaces vs. Fisherfaces: recognition using class specific linear projection. *IEEE Trans Pattern Anal Mach Intell*, 1997, 19: 711–720
- 3 Chen L F, Liao H Y M, Ko M T, et al. A New LDA-based face recognition system which can solve the small sample size problem. *Pattern Recognit*, 2000, 33: 1713–1726
- 4 Cevikalp H, Neamtu M, Wilkes M, et al. Discriminative common vectors for face recognition. *IEEE Trans Pattern Anal Mach Intell*, 2005, 27: 4–13
- 5 Huang R, Liu Q, Lu H, et al. Solving the small size problem of LDA. In: *Proceedings of International Conference of Pattern Recognition*, Barcelona, 2000. 29–32
- 6 Ye J, Xiong T. Computational and theoretical analysis of null space and orthogonal linear discriminant analysis. *J Mach Learn Res*, 2006, 7: 1183–1204
- 7 Zhang X, Jia Y, Lu L. Symmetrical null space LDA for object recognition. In: *Proceedings of International Conference on Intelligent Computing*, Hefei, 2005. 1099–1108
- 8 Zhang C, Ruan Q. Fusing the complete linear discriminant features by fusing integral for face recognition. In: *Proceedings of International Conference on Signal Processing*, Guilin, 2007. 419–426
- 9 Zhang C, Ruan Q, Pan X. Local fisher discriminant embedding for face recognition. In: *Proceedings of International Conference on Signal Processing*, Beijing, 2008. 293–297
- 10 Liu W, Wang Y H, Li S Z, et al. Null space-based kernel fisher discriminant analysis for face recognition. In: *Proceedings of the 6th International Conference on Automatic Face and Gesture Recognition*, Seoul, 2004. 57–62
- 11 Martinez A M, Benavente R. The AR Face Database. Technical Report CVC. 1999. 1–10
- 12 Arandjelovic O, Zisserman A. Automatic face recognition for film character retrieval in feature length films. In: *Proceedings of Computer Vision and Pattern Recognition*, Minneapolis, 2007. 860–867

Complete discriminant analysis

HUO HongWen^{1*} & FENG JuFu²

¹ *China Electronics Standardization Institute, Beijing 100007, China;*

² *School of Electronics Engineering and Computer Science, Peking University, Key Laboratory of Machine Perception, MOE, Beijing 100871, China*

*E-mail: huohongwen@gmail.com

Abstract This paper proposes a complete discriminant analysis algorithm to solve the problem that existing linear discriminative analysis algorithms always miss discriminant information when reducing dimensions, and the problem that it is difficult to juggle discriminant information both in rank space and null space. This algorithm makes full use of all discriminant information in all space, by constructing a new subspace and its discriminant matrix. The dimension of the new subspace is low and the algorithm is simple and costless. The

experimental results demonstrate that this algorithm has better performance and efficiency than traditional discriminant analysis algorithms.

Keywords discriminant analysis, subspace, rank space, null space, face recognition



HUO HongWen was born in 1984. He received his B.S. degree in computer science and technology from Xi'an Jiaotong University in 2006, and received his Ph.D. degree in signal and information processing from Peking University in 2011. Now he is a research member of China Electronics Standardization Institute, focusing on pattern recognition, signal processing, discriminant analysis and image processing.



FENG JuFu was born in 1967. He received his bachelor's degree of mathematics from Peking University in 1989, and received his Ph.D. degree of mathematics from Peking University in 1997. Now he is a Professor of School of Electronics Engineering and Computer Science, Peking University, focusing on image processing, pattern recognition, biometrics and artificial intelligence.