Cauchy 变换型空间上复合算子的线性组合

献给吴从忻教授 85 华诞

郭鑫, 王茂发*

武汉大学数学与统计学院, 武汉 430072

E-mail: xguo.math@whu.edu.cn, mfwang.math@whu.edu.cn

收稿日期: 2020-05-25; 接受日期: 2020-09-04; 网络出版日期: 2020-11-20; * 通信作者

国家自然科学基金 (批准号: 11771340) 和中国博士后科学基金 (批准号: 2020M672399) 资助项目

摘要 本文研究从 Cauchy 变换型空间到 Korenblum 空间上复合算子线性组合的紧性问题. 本文证明该线性组合的紧性与其在加权 Bergman 空间上的紧性是等价的.

关键词 Cauchy 变换型空间 Korenblum 空间 复合算子的线性组合

MSC (2010) 主题分类 47B33, 30H20

1 引言

本文用 $\mathbf{D}$ 表示复平面 $\mathbb{C}$ 上的单位圆盘, $\mathbf{S} = \mathbf{S}(\mathbf{D})$ 表示 $\mathbf{D}$ 上解析自映射的全体, $H(\mathbf{D})$ 表示 $\mathbf{D}$ 上解析函数的全体. $\varphi \in \mathbf{S}$ 诱导的复合算子 C_φ 定义为

$$(C_\varphi f)(z) = f(\varphi(z)), \quad f \in H(\mathbf{D}), \quad z \in \mathbf{D}.$$

复合算子由于可模型化函数论和算子理论中许多深层次的问题而受到了广泛研究 (参见文献 [1,2]). 众所周知, 由 Littlewood 从属原理可知, 定义在单位圆盘 $\mathbf{D}$ 上的 Hardy 空间与 Bergman 空间上的复合算子总是有界的. 随后, Shapiro^[3] 引入值分布理论中的 Nevanlinna 计数函数, 完全刻画了复合算子在 Hardy 空间上的紧性. MacCluer 和 Shapiro 利用 Julia-Carathéodory 型消失条件刻画了 Bergman 空间上复合算子的紧性^[2]. 当复合算子的基本问题如有界性和紧性被解决以后, 研究复合算子集合的拓扑结构是一个很有意义的课题, 即赋予给定函数空间上所有有界复合算子的集合以算子范数拓扑, 从而探究该拓扑空间的连通性. 1990 年, Shapiro 和 Sundberg^[4] 在研究 Hardy 空间上复合算子集合的拓扑结构时提出如下猜想: 两个复合算子 C_φ 和 C_ψ 处在同一个连通分支当且仅当它们的差 $C_\varphi - C_\psi$ 为紧算子. 由此, 解析函数空间上复合算子的紧差引起了国内外专家学者浓厚的研究兴趣 (参见文献 [5–11]). 沿着紧差的发展路线, 最近解析函数空间上复合算子的线性组合的研究备受关注. 2008 年,

英文引用格式: Guo X, Wang M F. Linear combination of composition operators on Cauchy transform type spaces (in Chinese). Sci Sin Math, 2020, 50: 1733–1744, doi: 10.1360/SSM-2020-0160

Izuchi 和 Ohno^[12] 研究了有界解析函数空间上复合算子的线性组合的紧性. 2014 年, Cho 等^[13] 证明了 Fock-Sobolev 空间上复合算子的线性组合为紧算子当且仅当每个复合算子为紧算子. 随后, Koo 和 Wang^[8] 克服了差分变量替换公式的缺失, 用联合 Carleson 测度刻画了加权 Bergman 空间上复合算子的紧差; Choe 等^[14] 刻画了加权 Bergman 空间上线性分式复合算子的线性组合为紧算子, 则每个复合算子为紧算子; 对于加权 Bergman 空间上一般符号诱导的复合算子的线性组合, 最近 Choe 等^[15] 研究了其紧性的 Julia-Carathéodory 型消失特征刻画以及 Carleson 型测度特征刻画. 但迄今为止, Hardy 空间上的复合算子的紧差刻画还没有完全解决. 1998 年, Cima 和 Matheson^[16] 证明了单个复合算子在 Hardy 空间上的紧性等价于复合算子在 Cauchy 变换型空间上的紧性. 人们自然期望通过研究 Cauchy 变换型空间上复合算子的紧差来探讨 Hardy 空间上复合算子的紧差等问题. 这也是我们考虑 Cauchy 变换型空间上复合算子的动机. 事实上, Cauchy 变换在经典复分析、调和分析和几何测度论中起着重要的作用. 本文将研究 Cauchy 变换型空间到 Korenblum 空间上复合算子的线性组合的紧性 (见定理 3.1). 一方面, 该结果与加权 Bergman 空间上复合算子的线性组合的紧性是等价的; 另一方面, 与文献 [17] 的研究形成鲜明对比, 该结果给出了从 Cauchy 变换型空间到 Korenblum 空间上复合算子的紧差关于伪双曲度量的刻画.

设 $\alpha > 0$, $\mathcal{M}$ 为圆周 $\partial\mathbf{D}$ 上所有的复 Borel 测度的全体. 称 $f \in H(\mathbf{D})$ 属于 Cauchy 变换型空间 $\mathcal{F}_\alpha$, 如果存在 $\mu \in \mathcal{M}$ 使得

$$f(z) = \int_{\partial\mathbf{D}} \frac{d\mu(\xi)}{(1-\bar{\xi}z)^\alpha}, \quad z \in \mathbf{D}. \quad (1.1)$$

赋予范数 $\|f\|_{\mathcal{F}_\alpha} = \inf\{\|\mu\| : \mu \text{ 满足 (1.1)}\}$, 则空间 $\mathcal{F}_\alpha$ 为 Banach 空间. 特别地, 当 $\alpha = 1$ 时, $\mathcal{F}_\alpha$ 称为 Cauchy 变换型空间, 在本文中简记为 $\mathcal{F}$. 关于 Cauchy 变换型空间的专著, 可参见文献 [18]. Cauchy 变换型空间上的复合算子起源于文献 [16].

设 $0 < \alpha < \infty$, 函数 $f \in H(\mathbf{D})$ 且满足

$$\|f\|_{-\alpha} = \sup_{z \in \mathbf{D}} (1 - |z|^2)^\alpha |f(z)| < \infty,$$

则称 f 属于 Korenblum 空间 (或增长型空间), 记为 $\mathcal{A}^{-\alpha}$. 易知在上述范数下, $\mathcal{A}^{-\alpha}$ 为 Banach 空间, 且 Korenblum 空间在 Bergman 空间的内插与样本序列的研究中起非常重要的作用 (关于 Korenblum 空间的更多信息参见文献 [19, 第 5 章]).

设 $\gamma > -1$, 单位圆盘 $\mathbf{D}$ 上的加权测度定义为 $dA_\gamma(z) := (\gamma + 1)(1 - |z|^2)^\gamma dA(z)$, 其中 $dA(z)$ 表示 $\mathbf{D}$ 上的规范化 Lebesgue 面积测度. 令 $0 < p < \infty$, $\gamma > -1$, 加权 Bergman 空间 A_γ^p 由满足条件

$$\|f\|_{A_\gamma^p} =: \left\{ \int_{\mathbf{D}} |f(z)|^p dA_\gamma(z) \right\}^{\frac{1}{p}} < \infty$$

的解析函数 f 的全体组成. 众所周知, 当 $1 \leq p < \infty$ 时, A_γ^p 是 Banach 空间; 当 $0 < p < 1$ 时, 空间 A_γ^p 在度量 $(f, g) \mapsto \|f - g\|_{A_\gamma^p}^p$ 下是完备的度量空间. 特别地, 当 $\gamma \rightarrow -1$ 时, 空间 A_γ^p 一般可视为单位圆盘上的 Hardy 空间 H^p (参见文献 [1, 19]).

在本文中, 符号 “ $A \lesssim B$ ” 表示存在一个常数 $C > 0$, 使得 $A \leq CB$, “ $A \approx B$ ” 表示 $A \lesssim B \lesssim A$.

2 预备知识

对于 $z, w \in \mathbf{D}$, z 和 w 之间的伪双曲度量定义为

$$\rho(z, w) := \left| \frac{z - w}{1 - \bar{z}w} \right|.$$

由等式

$$1 - \rho^2(z, w) = \frac{(1 - |z|^2)(1 - |w|^2)}{|1 - \bar{z}w|^2} \quad (2.1)$$

可得

$$\frac{1 - |z|^2}{|1 - \bar{z}w|} \leq \sqrt{1 - \rho^2(z, w)}, \quad \text{当 } |w| \leq |z|. \quad (2.2)$$

对任意的 $z, w \in \mathbf{D}$, 由 (2.1) 可得

$$\frac{1 - \rho(z, w)}{1 + \rho(z, w)} \leq \frac{1 - |z|^2}{1 - |w|^2} \leq \frac{1 + \rho(z, w)}{1 - \rho(z, w)}. \quad (2.3)$$

给定正整数 $N \geq 2$, 设指标集 $\Lambda_N := \{1, 2, \dots, N\}$ 的所有置换构成的群为 $\mathcal{P}_N$. 对于任意的 $\eta \in \mathcal{P}_N$, 记 $\eta = (\eta_1, \dots, \eta_N)$, 其中 $\eta_i := \eta(i)$. 设系数 $\lambda_1, \dots, \lambda_N \in \mathbf{C} \setminus \{0\}$, 对于任意的 $i \in \Lambda_N$, 记

$$\sigma_i^\eta = \sigma_i^\eta(\lambda_1, \dots, \lambda_N) := \sum_{j=1}^i \lambda_{\eta_j}.$$

设诱导符号 $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_N \in \mathbf{S}$. 对于 $i, j \in \Lambda_N$, 记

$$T_i := C_{\varphi_i}, \quad T_{i,j} := T_i - T_j,$$

复合算子的线性组合为 $T := \sum_{i=1}^N \lambda_i T_i$. 设 $\eta \in \mathcal{P}_N$, 算子 T 也可写成如下形式:

$$T = \sum_{i=1}^{N-1} \sigma_i^\eta T_{\eta_i, \eta_{i+1}} + \sigma_N^\eta T_{\eta_N}. \quad (2.4)$$

为了方便, 引入以下记号:

$$\begin{aligned} \rho_{i,j}(z) &:= \rho_{\varphi_i, \varphi_j}(z) = \rho(\varphi_i(z), \varphi_j(z)), \\ R_i(z) &:= R_{\varphi_i}(z) = \frac{1 - |z|^2}{1 - |\varphi_i(z)|^2}, \\ M_{i,j}(z) &:= M_{\varphi_i, \varphi_j}(z) = [R_i(z) + R_j(z)]\rho_{i,j}(z), \end{aligned} \quad (2.5)$$

其中 $\varphi_i, \varphi_j \in \mathbf{S}$, $i, j \in \Lambda_N$. 特别地, 由 Schwarz-Pick 引理可知, 每个 R_i 及 $M_{i,j}$ 都是 $\mathbf{D}$ 上的有界函数.

下面的基本估计参见文献 [18].

引理 2.1 设 $\alpha, \beta > 0$, $f \in H(\mathbf{D})$.

- (1) 若 $f \in \mathcal{F}_\alpha$, $z \in \mathbf{D}$, 则有 $|f(z)| \leq \|f\|_{\mathcal{F}_\alpha} / (1 - |z|^2)^\alpha$;
- (2) 若 $f \in \mathcal{F}_\alpha$, 则有 $f' \in \mathcal{F}_{\alpha+1}$ 且 $\|f'\|_{\mathcal{F}_{\alpha+1}} \leq \alpha \|f\|_{\mathcal{F}_\alpha}$;
- (3) 若 $f' \in \mathcal{F}_{\alpha+1}$, 则 $f \in \mathcal{F}_\alpha$, 且存在常数 $C > 0$ 使得 $\|f\|_{\mathcal{F}_\alpha} \leq |f(0)| + C \|f'\|_{\mathcal{F}_{\alpha+1}}$;
- (4) 若 $f \in \mathcal{F}_\alpha$ 且 $g \in \mathcal{F}_\beta$, 则 $fg \in \mathcal{F}_{\alpha+\beta}$ 且 $\|fg\|_{\mathcal{F}_{\alpha+\beta}} \leq \|f\|_{\mathcal{F}_\alpha} \|g\|_{\mathcal{F}_\beta}$.

由引理 2.1(1) 和文献 [20, 推论 4.4] 易知每个复合算子都是从 Cauchy 变换型空间 $\mathcal{F}_\alpha$ 到 Korenblum 空间 $\mathcal{A}^{-\alpha}$ 上的有界线性算子.

由 Montel 定理和文献 [1, 命题 3.11] 易证如下引理.

引理 2.2 设 $\alpha > 0$, $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_N \in \mathbf{S}$, $T := \sum_{i=1}^N \lambda_i C_{\varphi_i}$ 为复合算子的线性组合, 则 $T : \mathcal{F}_\alpha \rightarrow \mathcal{A}^{-\alpha}$ 为紧算子当且仅当对于 $\mathcal{F}_\alpha$ 中任意有界且满足在 $\mathbf{D}$ 的紧致子集上一致收敛于 0 的序列 $\{f_k\}$, 有 $\|Tf_k\|_{-\alpha} \rightarrow 0$, $k \rightarrow \infty$.

为了应用引理 2.2, 下面构造 Cauchy 变换型空间 $\mathcal{F}_\alpha$ 上的测试函数族.

引理 2.3 设 $\alpha > 0$, s 为非负整数, $z \in \mathbf{D}$. 令

$$\tau_z^s(w) = \frac{(1 - |z|^2)^s}{(1 - \bar{z}w)^{\alpha+s}}, \quad w \in \mathbf{D}, \quad (2.6)$$

则 $\tau_z^s \in \mathcal{F}_\alpha$ 且 $\sup_{z \in \mathbf{D}} \|\tau_z^s\|_{\mathcal{F}_\alpha} < \infty$.

证明 当 $s = 0$ 时, 由文献 [18] 可知, $1/(1 - \bar{z}w)^\alpha \in \mathcal{F}_\alpha$ 且 $\|1/(1 - \bar{z}w)^\alpha\|_{\mathcal{F}_\alpha} = 1$. 下面假设 $s \in \mathbb{N}$, 其中 $\mathbb{N}$ 为正整数集.

当 $\alpha = 1$, 令

$$k_z(w) := \frac{1 - |z|^2}{(1 - \bar{z}w)^2}, \quad w \in \mathbf{D}, \quad (2.7)$$

则 $k_z \in H^1$ 且 $\|k_z\|_{H^1} \leq 1$. 由文献 [18] 可知, $H^1 \subset \mathcal{F}$ 且 $\|\cdot\|_{\mathcal{F}} \leq \|\cdot\|_{H^1}$. 因此, 对于任意的 $z \in \mathbf{D}$, $k_z \in \mathcal{F}$ 且 $\|k_z\|_{\mathcal{F}} \leq 1$. 由引理 2.1(4) 可得 $k_z^s \in \mathcal{F}_s$. 考虑

$$\begin{aligned} (\tau_z^s)^{(s-1)}(w) &= \left(\frac{(1 - |z|^2)^s}{(1 - \bar{z}w)^{s+1}} \right)^{(s-1)} \\ &= \prod_{j=1}^{s-1} (s+j) \frac{\bar{z}^{s-1} (1 - |z|^2)^s}{(1 - \bar{z}w)^{2s}} \\ &= \prod_{j=1}^{s-1} (s+j) \bar{z}^{s-1} k_z^s(w). \end{aligned} \quad (2.8)$$

由引理 2.1(3) 可得 $\tau_z^s \in \mathcal{F}$ 以及对任意的 $z \in \mathbf{D}$, 有

$$\|\tau_z^s\|_{\mathcal{F}} \leq C_1(1 + \|k_z\|_{\mathcal{F}}^s) \leq C_2.$$

当 $\alpha > 1$ 时, 考虑

$$\tau_z^s(w) = \frac{(1 - |z|^2)^s}{(1 - \bar{z}w)^{\alpha+s}} = \frac{(1 - |z|^2)^s}{(1 - \bar{z}w)^{s+1}} \frac{1}{(1 - \bar{z}w)^{\alpha-1}}.$$

因为

$$\frac{(1 - |z|^2)^s}{(1 - \bar{z}w)^{s+1}} \in \mathcal{F}, \quad \frac{1}{(1 - \bar{z}w)^{\alpha-1}} \in \mathcal{F}_{\alpha-1},$$

所以根据引理 2.1(4) 可得 $\tau_z^s \in \mathcal{F}_\alpha$, 且对于任意的 $z \in \mathbf{D}$, 有 $\|\tau_z^s\|_{\mathcal{F}_\alpha} \leq C$.

当 $0 < \alpha < 1$ 时, 因为

$$(\tau_z^s)'(w) = (\alpha + s) \frac{\bar{z}(1 - |w|^2)^s}{(1 - \bar{z}w)^{\alpha+1+s}} \in \mathcal{F}_{\alpha+1}$$

且对任意的 z , 有 $\|(\tau_z^s)'\|_{\mathcal{F}_{\alpha+1}} \leq C$, 所以由引理 2.1(3) 可得 $\tau_z^s \in \mathcal{F}_\alpha$ 且 $\|\tau_z^s\|_{\mathcal{F}_\alpha} \leq C$. 证毕. $\square$

3 复合算子线性组合的紧性

本节刻画从 Cauchy 变换型空间 $\mathcal{F}_\alpha$ 到 Korenblum 空间 $\mathcal{A}^{-\alpha}$ 上复合算子线性组合的紧性, 并揭示该紧性与加权 Bergman 空间 A_γ^p ($\gamma > -1$) 上复合算子线性组合的紧性的关系.

设 $\eta \in \mathcal{P}_N$, 受 (2.4) 和 (2.5) 启发, 定义

$$Q_\eta := \sum_{i=1}^{N-1} |\sigma_i^\eta| M_{\eta_i, \eta_{i+1}} + |\sigma_N^\eta| R_{\eta_N} \quad (3.1)$$

和

$$Q := \prod_{\eta \in \mathcal{P}_N} Q_\eta. \quad (3.2)$$

记 τ_z^s 为引理 2.3 中的测试函数, T 表示 (2.4) 中的复合算子的线性组合. 我们有如下的主要结果.

定理 3.1 设 $\gamma > -1$, $0 < p, \alpha < \infty$, $\varphi_i \in \mathbf{S}$, $\lambda_i \in \mathbf{C} \setminus \{0\}$, 其中 $i \in \Lambda_N$, 则下列陈述等价:

- (1) $T: A_\gamma^p \rightarrow A_\gamma^p$ 为紧算子;
- (2) $\lim_{|z| \rightarrow 1} Q(z) = 0$;
- (3) $T: \mathcal{F}_\alpha \rightarrow \mathcal{A}^{-\alpha}$ 为紧算子;
- (4) $\lim_{|z| \rightarrow 1} \|T\tau_z^s\|_{-\alpha} = 0$, 对于任意的 $s \in \mathbb{N}$.

为证明此定理, 需要以下预备引理.

引理 3.1 设 $\alpha > 0$, 则存在常数 $C > 0$ 使得对于任意的 $f \in \mathcal{F}_\alpha$, $z, w \in \mathbf{D}$, 有

$$|(1 - |z|^2)^\alpha f(z) - (1 - |w|^2)^\alpha f(w)| \leq C \|f\|_{\mathcal{F}_\alpha} \rho(z, w).$$

证明 引理 2.1(1) 隐含着, 如果 $f \in \mathcal{F}_\alpha$, 则 $f \in \mathcal{A}^{-\alpha}$ 且有 $\|f\|_{-\alpha} \leq C \|f\|_{\mathcal{F}_\alpha}$. 从而根据文献 [19, 引理 5.1], 即得该引理. $\square$

由引理 2.1(1) 易证下面的引理.

引理 3.2 设 $\epsilon > 0$, $0 < \alpha < \infty$, $\varphi \in \mathbf{S}$ 且 $W: \mathbf{D} \rightarrow [0, 1]$ 为 Borel 可测函数. 令 $\beta := \min\{\alpha, 1\}$. 如果

$$\sup_{z \in \mathbf{D}} R_\varphi(z) W(z) \leq \epsilon,$$

则存在常数 $C = C(\alpha) > 0$, 使得对任意的 $f \in \mathcal{F}_\alpha$, 有

$$\sup_{z \in \mathbf{D}} (1 - |z|^2)^\alpha |f \circ \varphi(z)| W(z) \leq C \epsilon^\beta \|f\|_{\mathcal{F}_\alpha}.$$

引理 3.3 ^[21] 对任意的 $s > 0$, $r \in (0, 1)$, 存在常数 $C = C(r, s) > 0$, 使得 $z, w \in \mathbf{D}$ 满足 $\rho(z, w) \leq r$ 时,

$$\left| 1 - \left(\frac{1 - |z|^2}{1 - |w|^2} \right)^s \right| \leq C \rho(z, w).$$

下面的引理在主要结果的证明中起重要的作用.

引理 3.4 设 $\alpha, \epsilon > 0$, $\varphi, \psi \in \mathbf{S}$ 且 K 为 $\mathbf{D}$ 中的 Borel 可测子集. 若

$$\sup_{z \in K} [R_\varphi(z) + R_\psi(z)] \rho_{\varphi, \psi}(z) \leq \epsilon, \quad (3.3)$$

则存在常数 $h(\epsilon) > 0$ 满足 $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} h(\epsilon) = 0$, 使得对于任意的 $f \in \mathcal{F}_\alpha$, 有

$$\sup_{z \in K} (1 - |z|^2)^\alpha |f \circ \varphi(z) - f \circ \psi(z)| \leq h(\epsilon) \|f\|_{\mathcal{F}_\alpha}.$$

证明 设 $f \in \mathcal{F}_\alpha$, $\delta := \delta(\epsilon) \in (0, \frac{1}{2})$. 令

$$K_\delta := \{z \in K : \rho_{\varphi, \psi}(z) < \delta\}$$

以及 $K'_\delta := K \setminus K_\delta$. 考虑

$$\sup_{z \in K} (1 - |z|^2)^\alpha |f \circ \varphi(z) - f \circ \psi(z)| \leq \mathcal{J}_1 + \mathcal{J}_2, \quad (3.4)$$

其中

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_1 &= \sup_{z \in K_\delta} (1 - |z|^2)^\alpha |f \circ \varphi(z) - f \circ \psi(z)|, \\ \mathcal{J}_2 &= \sup_{z \in K'_\delta} (1 - |z|^2)^\alpha |f \circ \varphi(z) - f \circ \psi(z)|. \end{aligned}$$

一方面, 由 Schwarz-Pick 引理可得

$$R_\varphi(z) \leq \frac{1 + |\varphi(0)|}{1 - |\varphi(0)|}.$$

因此, 结合引理 2.1、3.1 和 3.3 (取 $r = \frac{1}{2}$) 可得

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_1 &= \sup_{z \in K_\delta} |(1 - |\varphi(z)|^2)^\alpha [R_\varphi(z)]^\alpha f \circ \varphi(z) - (1 - |\psi(z)|^2)^\alpha [R_\psi(z)]^\alpha f \circ \psi(z)| \\ &\leq \sup_{z \in K_\delta} [R_\varphi(z)]^\alpha |(1 - |\varphi(z)|^2)^\alpha f \circ \varphi(z) - (1 - |\psi(z)|^2)^\alpha f \circ \psi(z)| \\ &\quad + \sup_{z \in K_\delta} [R_\varphi(z)]^\alpha \left[1 - \left(\frac{1 - |\varphi(z)|^2}{1 - |\psi(z)|^2} \right)^\alpha \right] (1 - |\psi(z)|^2)^\alpha |f \circ \psi(z)| \\ &\lesssim \sup_{z \in K_\delta} \left(\frac{1 + |\varphi(0)|}{1 - |\varphi(0)|} \right)^\alpha \rho_{\varphi, \psi}(z) \|f\|_{\mathcal{F}_\alpha} \\ &\lesssim \delta \|f\|_{\mathcal{F}_\alpha}, \end{aligned}$$

这里常数仅依赖于 α .

另一方面, 令 $\chi_{K'_\delta}$ 为集合 K'_δ 的特征函数. 由 $\delta \chi_{K'_\delta} \leq \rho(\varphi, \psi)$ 和 (3.3) 可得

$$\chi_{K'_\delta} [R_\varphi(z) + R_\psi(z)] \leq \frac{\epsilon}{\delta}.$$

结合引理 3.2, 可得

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_2 &\leq \sup_{z \in K'_\delta} (1 - |z|^2)^\alpha |f \circ \varphi(z)| + \sup_{z \in K'_\delta} (1 - |z|^2)^\alpha |f \circ \psi(z)| \\ &\lesssim \left(\frac{\epsilon}{\delta} \right)^\beta \|f\|_{\mathcal{F}_\alpha}, \end{aligned}$$

其中 $\beta := \min\{\alpha, 1\}$ 且这里的常数仅依赖于 α .

结合上述 $\mathcal{J}_1$ 和 $\mathcal{J}_2$ 的估计以及 (3.4), 可得

$$\sup_{z \in K} (1 - |z|^2)^\alpha |f \circ \varphi(z) - f \circ \psi(z)| \leq C \left[\left(\frac{\epsilon}{\delta} \right)^\beta + \delta \right] \|f\|_{\mathcal{F}_\alpha}.$$

通过选取合适的 $\delta = \frac{\sqrt{\epsilon}}{1+2\sqrt{\epsilon}}$, 引理 3.4 证毕. □

定理 3.1 的证明 (1) $\Leftrightarrow$ (2) 的证明参见文献 [15, 定理 1.1], 因此, 我们将通过 (2) $\Rightarrow$ (3) $\Rightarrow$ (4) $\Rightarrow$ (2) 完成定理 3.1 的证明.

证明 (2) $\Rightarrow$ (3) 假设 (2) 成立. 令 $\{f_k\}$ 为 $\mathcal{F}_\alpha$ 中的任意序列, 满足 $\|f_k\|_{\mathcal{F}_\alpha} \leq 1$ 且 f_k 在 $\mathbf{D}$ 的任意紧致子集上一致收敛于 0. 根据引理 2.2, 我们仅需证明 $\|Tf_k\|_{-\alpha} \rightarrow 0, k \rightarrow \infty$.

设 $\epsilon > 0, \eta \in \mathcal{P}_N$. 令

$$U_{\epsilon, \eta} := \{z \in \mathbf{D} : Q_\eta(z) \leq \epsilon\}.$$

对于 $\xi \in \partial\mathbf{D}, 0 < \delta < 1$, 用 $I(\xi, \delta)$ 表示 $\partial\mathbf{D}$ 上以 ξ 为中心、以 $2\pi\delta$ 为弧长的开弧. 关于开弧 $I(\xi, \delta)$ 的 Carleson 集 $S(\xi, \delta)$ 定义为

$$S(\xi, \delta) := \left\{ z \in \mathbf{D} : 1 - \delta < |z| < 1 \text{ 且 } \frac{z}{|z|} \in I(\xi, \delta) \right\}.$$

由 $\partial\mathbf{D}$ 的紧性知 $\partial\mathbf{D}$ 上存在有限个点 $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_\vartheta$ 使得 $\partial\mathbf{D}$ 由开弧族 $I(\xi_1, \delta_1), \dots, I(\xi_\vartheta, \delta_\vartheta)$ 覆盖, 其中 $\delta_i := \delta_{\xi_i}$. 令

$$r := 1 - \min_{1 \leq i \leq \vartheta} \delta_i,$$

可得

$$\mathbf{D} \setminus r\mathbf{D} \subset \bigcup_{i=1}^{\vartheta} S(\xi_i, \delta_i). \quad (3.5)$$

则我们断言: 对每个 $\xi \in \partial\mathbf{D}$, 存在 $\delta_\xi = \delta_\xi(\epsilon) \in (0, 1)$ 使得

$$S(\xi, \delta_\xi) \subset \bigcup_{\eta \in \mathcal{P}_N} U_{\epsilon, \eta}. \quad (3.6)$$

事实上, 若上述断言不成立, 则存在某个 $\xi_0 \in \partial\mathbf{D}$, 使得对于任意的 $\delta \in (0, 1)$, $S(\xi_0, \delta)$ 包含 $\mathbf{D}$ 中的点 z_δ , 而对任意的 $\eta \in \mathcal{P}_N$, 有 $Q_\eta(z_\delta) > \epsilon$, 因此, $Q(z_\delta) > \epsilon^{N!}$, 这与假设 (2) 矛盾. 结合 (3.5) 和 (3.6) 可得

$$\mathbf{D} \setminus r\mathbf{D} \subset \bigcup_{\eta \in \mathcal{P}_N} U_{\epsilon, \eta}.$$

因此, 对于任意的 k , 有

$$\begin{aligned} \sup_{z \in \mathbf{D}} (1 - |z|^2)^\alpha |Tf_k(z)| &\leq \sup_{z \in r\mathbf{D}} (1 - |z|^2)^\alpha |Tf_k(z)| + \sum_{\eta \in \mathcal{P}_N} \sup_{z \in U_{\epsilon, \eta}} (1 - |z|^2)^\alpha |Tf_k(z)| \\ &=: I_k + \sum_{\eta \in \mathcal{P}_N} II_k^{\epsilon, \eta}. \end{aligned}$$

一方面, 由于每个 $\varphi_i(r\mathbf{D})$ 包含在 $\mathbf{D}$ 的某个紧集中, 则 f_k 在 $\bigcup_{i=1}^N \varphi_i(r\mathbf{D})$ 上一致收敛于 0. 因此,

$$I_k \rightarrow 0, \quad k \rightarrow \infty. \quad (3.7)$$

另一方面, 令 $\eta \in \mathcal{P}_N$, 则在 $U_{\epsilon, \eta}$ 上 $Q_\eta < \epsilon$. 由引理 3.2 可知, 存在 $\beta > 0$ 和常数 $C > 0$ (与 ϵ 无关), 使得对任意的 k , 有

$$|\sigma_N^\eta| \sup_{z \in U_{\epsilon, \eta}} (1 - |z|^2)^\alpha |T_{\eta_N} f_k(z)| \leq C\epsilon^\beta.$$

由 (2.4) 和引理 3.4 可知, 存在常数 $h_\eta(\epsilon) > 0$, 满足 $h(\epsilon) \rightarrow 0, \epsilon \rightarrow 0$, 使得对于任意的 k , 有

$$\sum_{i=1}^{N-1} |\sigma_i^\eta| \sup_{z \in U_{\epsilon, \eta}} (1 - |z|^2)^\alpha |T_{\eta_i, \eta_{i+1}} f_k(z)| \leq h_\eta(\epsilon).$$

因此, 存在常数 $C > 0$ (与 ϵ 无关), 使得对于任意的 k , 有

$$II_k^{\epsilon, \eta} \leq C[h_\eta(\epsilon) + \epsilon^\beta]. \quad (3.8)$$

结合 (3.7) 和 (3.8), 存在常数 $h(\epsilon) > 0$ 满足 $h(\epsilon) \rightarrow 0, \epsilon \rightarrow 0$, 则有

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} \|Tf_k(z)\|_{-\alpha} \leq h(\epsilon).$$

最后, 取 $\epsilon \rightarrow 0$, 可得 $\|Tf_k\|_{-\alpha} \rightarrow 0, k \rightarrow \infty$, 证毕.

证明 (3) $\Rightarrow$ (4) 假设 (3) 成立. 当 $|z| \rightarrow 1$ 时, 引理 2.3 中的测试函数 τ_z^s ($s \in \mathbb{N}$) 在 $\mathcal{F}_\alpha$ 中有界, 且在 $\mathbf{D}$ 中任意紧子集上一致收敛于 0. 因此由引理 2.2 可得 (4) 成立.

证明 (4) $\Rightarrow$ (2) 假设 (4) 成立, 我们用反证法证明. 如果 (2) 不成立, 下面将分 3 步来完成证明. 设 $J \subset \Lambda_N$, 令

$$T_J := \sum_{i \in J} \lambda_i T_i,$$

则由 (2.4) 可知算子 T_J 可表示为

$$T_J = \sum_{i, j \in J} a_{i, j} T_{i, j} + \left(\sum_{i \in J} \lambda_i \right) T_\ell, \quad (3.9)$$

其中 $\ell \in J$, 系数 $a_{i, j}$ 依赖于 ℓ 和 λ_i ($i \in J$).

第 1 步 由于 (2) 不成立, 则存在序列 $\{z_k\} \subset \mathbf{D}$ 使得 $|z_k| \rightarrow 1$ 且

$$\inf_k Q(z_k) > 0.$$

由于对于任意 $\eta \in \mathcal{P}_N$, 函数 Q_η 在 $\mathbf{D}$ 上都是有界的, 所以对于任意的 $\eta \in \mathcal{P}_N$, 可得

$$\inf_k Q_\eta(z_k) > 0. \quad (3.10)$$

令 $F := \{i \in \Lambda_N : \lim_{k \rightarrow \infty} R_i(z_k) = 0\}$, $F' := \Lambda_N \setminus F$. 不失一般性, 可进一步假设对于任意的 $i \in F'$, 有

$$\inf_k R_i(z_k) > 0. \quad (3.11)$$

第 2 步 证明关于集合 F' 有如下断言成立, 存在互不相交的指标集 $J_1, \dots, J_L$ 以及 $\{z_k\}$ 的子列 (若有必要, 仍记为 $\{z_k\}$) 满足下述性质:

- (i) $F' = \bigcup_{m=1}^L J_m$;
- (ii) $\lim_{k \rightarrow \infty} \rho_{i, j}(z_k) = 0$ 对于任意的 $i, j \in J_m$ ($m = 1, \dots, L$) 成立;
- (iii) 对每个 $m = 1, \dots, L$, 存在 $v_m \in J_m$, 使得对每个 k , 有

$$|\varphi_i(z_k)| \leq |\varphi_{v_m}(z_k)|, \quad \text{其中 } i \in \bigcup_{\ell=m}^L J_\ell;$$

(iv) 对每个 $m = 1, \dots, L$, $\sum_{i \in J_m} \lambda_i = 0$.

性质 (i)–(iii) 可按照文献 [15, 定理 1.1] 中 (2) $\Rightarrow$ (3) 的证明类似可得. 这里仅证明性质 (iv). 我们采用数学归纳法, 首先证明 $m = 1$ 的情形. 令 $s \in \mathbb{N}$, $g_a = g_{a,s} := \tau_a^s$, 其中 $a \in \mathbf{D}$. 对于每个 k , 设 $w_k := \varphi_{v_1}(z_k)$, 则由 (3.11) 可得

$$1 - |z_k|^2 \approx 1 - |w_k|^2, \quad (3.12)$$

因此 $|w_k| \rightarrow 1$. 由 (2.1) 可得, 对于任意的 k 和 $i \in \Lambda_N$, 有

$$\begin{aligned} \left(\frac{1 - |w_k|^2}{|1 - \varphi_i(z_k)\overline{w_k}|} \right)^2 &= (1 - \rho_{v_1,i}^2(z_k)) \frac{1 - |w_k|^2}{1 - |\varphi_i(z_k)|^2} \\ &\lesssim R_i(z_k) \end{aligned} \quad (3.13)$$

以及

$$(1 - |w_k|^2)^\alpha |T_i g_{w_k}(z_k)| = \left(\frac{1 - |w_k|^2}{|1 - \varphi_i(z_k)\overline{w_k}|} \right)^{s+\alpha}. \quad (3.14)$$

由于 (4) 成立, 根据引理 2.3, 可得

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|T g_{w_k}\|_{-\alpha} = 0.$$

因此, 由 (3.12) 可得

$$\lim_{k \rightarrow \infty} (1 - |w_k|^2)^\alpha |T g_{w_k}(z_k)| = 0. \quad (3.15)$$

首先考虑 T_F . 由集合 F 的定义和 (3.13) 可得

$$(1 - |w_k|^2)^\alpha |T_i g_{w_k}(z_k)| \lesssim R_i^{\frac{s+\alpha}{2}}(z_k) \rightarrow 0, \quad i \in F.$$

因此,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} (1 - |w_k|^2)^\alpha |T_F g_{w_k}(z_k)| = 0. \quad (3.16)$$

然后, 考虑 T_{J_t} , $1 < t \leq L$. 假设 $i \in J_t$, $1 < t \leq L$. 由 (2.2) 和 (3.14) 可得, 对于任意的 k , 有

$$(1 - |w_k|^2)^\alpha |T_i g_{w_k}(z_k)| \leq [1 - \rho_{v_1,i}^2(z_k)]^{\frac{s+\alpha}{2}}.$$

所以存在常数 $C = C(N, \lambda_1, \dots, \lambda_N) > 0$ 使得

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} (1 - |w_k|^2)^\alpha \sum_{1 < t \leq L} |T_{J_t} g_{w_k}(z_k)| \leq C(1 - \omega^2)^{\frac{s+\alpha}{2}}, \quad (3.17)$$

其中 $\omega := \min_{i \in \Lambda'} [\lim_{k \rightarrow \infty} \rho_{v_1,i}(z_k)] > 0$, $\Lambda' = \bigcup_{1 < t \leq L} J_t$.

接下来考虑 T_{J_1} . 由引理 3.1 和 3.3 可得, 对于 $i, j \in J_1$, 有

$$(1 - |w_k|^2)^\alpha |T_{i,j} g_{w_k}(z_k)| \lesssim \rho_{i,j}(z_k) \rightarrow 0, \quad k \rightarrow \infty. \quad (3.18)$$

由 (3.14) 可得, 对于任意的 k , 有

$$(1 - |w_k|^2)^\alpha |T_{v_1} g_{w_k}(z_k)| = 1.$$

令 (3.9) 中 J 为 J_1 以及 ℓ 为 v_1 , 可得

$$\lim_{k \rightarrow \infty} (1 - |w_k|^2)^\alpha |T_{J_1} g_{w_k}(z_k)| = \left| \sum_{i \in J_1} \lambda_i \right|. \quad (3.19)$$

由性质 (i) 可得

$$T_{J_1} = T - T_F - \sum_{1 < t \leq L} T_{J_t}.$$

因此, 由 (3.15)–(3.17) 和 (3.19) 可得, 存在常数 $C = C(N, \lambda_1, \dots, \lambda_N) > 0$ 使得

$$\left| \sum_{i \in J_1} \lambda_i \right| \leq C(1 - \omega^2)^{\frac{s+\alpha}{2}}.$$

由于 $s \in \mathbb{N}$ 是任意的, 因此考虑极限 $s \rightarrow \infty$, 可得

$$\sum_{i \in J_1} \lambda_i = 0.$$

从而 $m = 1$ 时 (iv) 成立.

令 $2 \leq m \leq L$ 且假设

$$\sum_{i \in J_1} \lambda_i = \dots = \sum_{i \in J_{m-1}} \lambda_i = 0. \quad (3.20)$$

若能证明 $\sum_{i \in J_m} \lambda_i = 0$, 我们将完成性质 (iv) 的证明. 由于该证明过程与 $m = 1$ 情形的证明完全类似, 故在此略去其证明过程. 由此性质 (iv) 成立, 进而完成该断言的证明.

第 3 步 我们继续 (4) $\Rightarrow$ (2) 的证明. 不妨假设集合 $J_1, \dots, J_L, F$ 都是非空的. 令 $d := |F|$ 为集合 F 中元素的个数. 令 $\mathbb{F} := (i_1, \dots, i_d)$, 其中 $i_1, \dots, i_d$ 为 F 中不同的元素. 令 $\kappa_m := |J_m|$ 为 J_m 中元素的个数且 $\mathbb{J}_m := (i_{m,1}, \dots, i_{m,\kappa_m})$, $m = 1, \dots, L$, 其中 $i_{m,1}, \dots, i_{m,\kappa_m}$ 是 J_m 中不同的元素. 构造

$$\mathcal{G} := (\mathbb{J}_1, \dots, \mathbb{J}_L, \mathbb{F}) \in \mathcal{P}_N,$$

则

$$Q_{\mathcal{G}} = \sum_{i=1}^{N-1} |\sigma_i^{\mathcal{G}}| M_{\mathcal{G}_i, \mathcal{G}_{i+1}} + |\sigma_N^{\mathcal{G}}| R_{\mathcal{G}_N} =: I_1 + I_2,$$

其中

$$I_1 := \sum_{i=1}^{N-d} |\sigma_i^{\mathcal{G}}| M_{\mathcal{G}_i, \mathcal{G}_{i+1}},$$

$$I_2 := \sum_{i=N-d+1}^{N-1} |\sigma_i^{\mathcal{G}}| M_{\mathcal{G}_i, \mathcal{G}_{i+1}} + |\sigma_N^{\mathcal{G}}| R_{\mathcal{G}_N}.$$

一方面, 有下面的估计:

$$I_2 \leq \sum_{i \in F} c_i R_i,$$

其中 c_i 是非负系数且仅依赖于 $\{\lambda_{i_1}, \dots, \lambda_{i_d}\}$. 由集合 F 的定义, 可得

$$\lim_{k \rightarrow \infty} I_2(z_k) = 0. \quad (3.21)$$

另一方面, 应用第 2 步中断言的性质 (iv), 可得

$$\sum_{i=1}^{\kappa_1+\cdots+\kappa_m} \lambda_{\mathcal{G}_i} = 0,$$

其中 $m = 1, \dots, L$. 因此, 对于每个 m , 有

$$I_1 = \sum_{m=1}^L \sum_{i,j \in J_m} a_{i,j}^{(m)} M_{i,j},$$

其中 $a_{i,j}^{(m)}$ 是非负系数, 依赖于 $\{\lambda_\ell : \ell \in J_m\}$. 因此, 根据第 2 步中断言的性质 (ii) 可得 $\lim_{k \rightarrow \infty} I_1(z_k) = 0$. 再结合 (3.21) 可得 $\lim_{k \rightarrow \infty} Q_{\mathcal{G}}(z_k) = 0$ 与 (3.10) 矛盾. 证毕.

定理 3.1 证毕. $\square$

注 3.1 定理 3.1 一方面表明了从 Cauchy 变换型空间 $\mathcal{F}_\alpha$ 到 Korenblum 空间 $\mathcal{A}^{-\alpha}$ 上复合算子线性组合的紧性与参数 α 无关, 另一方面揭示了该紧性与加权 Bergman 空间 A_γ^p ($\gamma > -1$) 上复合算子线性组合的紧性是等价的, 从而空间 A_γ^p ($\gamma > -1$) 上关于复合算子线性组合紧性的诸如 Carleson 型测度特征 (参见文献 [15, 定理 1.3]) 等也自然适用于从 Cauchy 变换型空间到 Korenblum 空间上复合算子的线性组合的情形.

参考文献

- 1 Cowen C, MacCluer B. Composition Operators on Spaces of Analytic Functions. Boca Raton: CRC Press, 1995
- 2 Shapiro J. Composition Operators and Classical Function Theory. New York: Springer-Verlag, 1993
- 3 Shapiro J. The essential norm of a composition operator. Ann of Math (2), 1987, 125: 375–404
- 4 Shapiro J, Sundberg C. Isolation amongst the composition operators. Pacific J Math, 1990, 145: 117–152
- 5 Moorhouse J. Compact differences of composition operators. J Funct Anal, 2005, 219: 70–92
- 6 Jiang L, Ouyang C. Compact differences of composition operators on holomorphic function spaces in the unit ball. Acta Math Sci, 2011, 31: 1679–1693
- 7 Hosokawa T, Ohno S. Differences of weighted composition operators acting from Bloch space to H^∞ . Trans Amer Math Soc, 2011, 363: 5321–5340
- 8 Koo H, Wang M. Joint Carleson measure and the difference of composition operators on $A_\alpha^p(B_n)$. J Math Anal Appl, 2014, 419: 1119–1142
- 9 Choe B, Koo H, Smith W. Difference of composition operators over the half-plane. Trans Amer Math Soc, 2017, 369: 3173–3205
- 10 Choe B, Koo H, Wang M. Compact double differences of composition operators on the Bergman spaces. J Funct Anal, 2017, 272: 2273–2307
- 11 Choe B, Choi K, Koo H, et al. Difference of weighted composition operators. J Funct Anal, 2020, 278: 108401
- 12 Izuchi K, Ohno S. Linear combinations of composition operators on H^∞ . J Math Anal Appl, 2008, 338: 820–839
- 13 Cho H, Choe B, Koo H. Linear combinations of composition operators on the Fock-Sobolev spaces. Potential Anal, 2014, 41: 1223–1246
- 14 Choe B, Koo H, Wang M, et al. Compact linear combinations of composition operators induced by linear fractional maps. Math Z, 2015, 280: 807–824
- 15 Choe B, Koo H, Wang M. Compact linear combination of composition operators on Bergman spaces. J Funct Anal, 2020, 278: 108393
- 16 Cima J, Matheson A. Cauchy transforms and composition operators. Illinois J Math, 1998, 42: 58–69
- 17 Guo X, Wang M. Difference of weighted composition operators on the space of Cauchy integral transforms. Taiwanese J Math, 2018, 22: 1435–1450
- 18 Hibscheiler R, MacGregor T. Fractional Cauchy Transforms. Boca Raton: Chapman Hall/CRC, 2006
- 19 Hedenmalm H, Korenblum B, Zhu K. Theory of Bergman Spaces. New York: Springer, 2000

- 20 Dai J, Ouyang C. Differences of weighted composition operators on $H_\alpha^\infty(B_N)$. J Inequal Appl, 2009, 2009: 127431
- 21 Zhu K. Operator Theory in Function Spaces, 2nd ed. Providence: Amer Math Soc, 2007

Linear combination of composition operators on Cauchy transform type spaces

Xin Guo & Maofa Wang

Abstract In this paper, we study the compactness of linear combinations of composition operators from Cauchy transform type spaces to Korenblum spaces. We show that the compactness of linear combinations of composition operators from Cauchy transform type spaces to Korenblum spaces is equivalent to the compactness of those on the weighted Bergman spaces.

Keywords Cauchy transform type space, Korenblum space, linear combination of composition operators

MSC(2010) 47B33, 30H20

doi: 10.1360/SSM-2020-0160