中国科学: 数学 2022 年 第 52 卷 第 4 期: 381～396
SCIENTIA SINICA Mathematica
论 文



# 具非局部扩散 Lotka-Volterra 系统的双稳波速

马满军[1*], 岳缘希[1], 欧春华[2*]

1. 浙江理工大学数学科学系, 杭州 310018;
2. Department of Mathematics and Statistics, Memorial University of Newfoundland, St. John's, NL A1C 5S7, Canada
E-mail: mjunm9@zstu.edu.cn, 201820102025@mails.zstu.edu.cn, ou@mun.ca

收稿日期: 2020-05-28; 接受日期: 2020-08-10; 网络出版日期: 2021-01-12; * 通信作者
国家自然科学基金 (批准号: 11671359 和 12071434) 和加拿大国家自然科学基金 (批准号: RGPIN2016-04709) 资助项目

**摘要** 本文研究具有双稳非线性性质和非局部扩散的 Lotka-Volterra 竞争模型行波解的速度. 首先根据单稳子系统的渐近传播速度得到双稳波速的取值范围. 其次, 不需要对系统参数限定条件, 仅根据双稳行波解在两个稳定平衡点附近的渐近性质证明双稳波速的唯一性. 进一步, 建立双稳波速与波方程特定上下解波速的比较原理. 具体地, 为了确定或者控制双稳波速的符号 (即行波的传播方向), 本文利用驻波或几乎驻波的衰减率构造测试函数, 在给定的系统参数集内使得这些测试函数成为波方程的上下解, 从而确定波速的符号. 本文研究结果深刻地洞察到如何通过调节系统参数去确定或控制双稳波的传播方向, 进而预测或控制生物竞争结果, 使得波的传播现象研究具有重要的生物学意义.

**关键词** 波速符号 双稳行波解 非局部扩散 Lotka-Volterra 模型

**MSC (2020) 主题分类** 35K57, 35C07, 35B40, 92D25

## 1 引言

非局部扩散衡量和刻画大区域的扩散或传播效应, 而扩散只描述邻近区域的平均扩散效果, 因此, 非局部扩散方程有时比扩散方程更能准确地模拟现实场景 (参见文献 [1–3]). 在过去的二十多年里, 非局部扩散方程出现在各个学科领域, 如种群生物学、流行病学、相变和神经网络中的信号传播等 (参见文献 [4–11]). 在种群生物学中 [3], 假设 $I(t,x)$ 是时间 $t$ 和位置 $x$ 处物种的密度, 而 $J(x-y)$ 是物种从位置 $y$ 到位置 $x$ 的概率分布, 则卷积 $(J*I)(t,x)=\int_{\mathbb{R}^N}J(x-y)I(t,y)dy$ ($N$ 是一个正整数) 表示物种个体从所有其他地方到达位置 $x$ 的比率. 同样, $-I(t,x)=-\int_{\mathbb{R}^N}J(y-x)I(t,x)dy$ 是它们离开位置 $x$ 前往所有其他位置的比率. 因此, 表达式 $J*I-I$ 表示物种密度通过非局部扩散方式增加的净增长率, 该表达式还可以基于随机运动和相变理论推导出来 (参见文献 [1,12]).

英文引用格式: Ma M J, Yue Y X, Ou C. Bistable wave speed of a Lotka-Volterra system with nonlocal dispersal (in Chinese). Sci Sin Math, 2022, 52: 381–396, doi: 10.1360/SCM-2020-0457

考虑下面的非局部扩散 Lotka-Volterra 竞争模型:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u(t,x)}{\partial t}=d_1[(J_1*u)(t,x)-u(t,x)]+r_1u(t,x)[1-u(t,x)-a_1v(t,x)],\\ \dfrac{\partial v(t,x)}{\partial t}=d_2[(J_2*v)(t,x)-v(t,x)]+r_2v(t,x)[1-v(t,x)-a_2u(t,x)].\end{cases}\tag{1.1}$$

该模型被用于描述具有空间各向同性非局部扩散并争夺相同资源的两个物种的增长, 参见文献 [13–16]. 这里, $u(t,x)$ 和 $v(t,x)$ 分别是 $u$ 和 $v$ 在时间 $t$ 和位置 $x\in\mathbb{R}$ 处的种群密度. 参数 $d_i$ 是扩散系数, $r_i$ 是固有出生率, $a_i$ 是竞争系数, $i=1,2$, 且所有参数都取正值. 非局部扩散项 $J_i*I$ 的表达式为

$$(J_i*I)(t,x)=\int_{\mathbb{R}}J_i(y)I(x-y,t)dy,\quad i=1,2,\quad \text{其中 } J_i:\mathbb{R}\to\mathbb{R}.$$

对于单稳情形, 即 $a_1<1<a_2$, 系统 (1.1) 已经被广泛研究. 例如, 文献 [17–22] 研究了行波解的存在性、稳定性、单调性和最小波速, 文献 [23,24] 研究了行波解的传播速度, 文献 [20] 研究了入侵整体解. 对于双稳情形, 即

$$a_1>1,\quad a_2>1,\tag{1.2}$$

目前研究并不多, 主要是由于双稳非线性性质和非局部扩散共存给研究带来许多困难. 但是, 对于经典的双稳反应扩散 Lotka-Volterra 系统, 有许多研究成果, 可参见文献 [25–31]. 在条件 (1.2) 下, 系统 (1.1) 有 4 个常数平衡点

$$\boldsymbol{e}_0=(0,0),\quad e_1=(0,1),\quad e_2=(1,0),\quad e_3=\left(\frac{a_1-1}{a_1a_2-1},\frac{a_2-1}{a_1a_2-1}\right).\tag{1.3}$$

它们作为 (1.1) 的动力学系统

$$\begin{cases}u_t=r_1u(1-u-a_1v),\\ v_t=r_2v(1-v-a_2u)\end{cases}\tag{1.4}$$

的平衡点时, 容易验证 $e_1$ 和 $e_2$ 是稳定的, 而 $e_0$ 和 $e_3$ 是不稳定的. 为了简化叙述, 令系统 (1.1) 的参数分别为 $d_1=1$, $d_2=d$, $r_1=1$, $r_2=r$, 从而得到如下形式的模型:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u(t,x)}{\partial t}=[(J_1*u)(t,x)-u(t,x)]+u(t,x)[1-u(t,x)-a_1v(t,x)],\\ \dfrac{\partial v(t,x)}{\partial t}=d[(J_2*v)(t,x)-v(t,x)]+rv(t,x)[1-v(t,x)-a_2u(t,x)].\end{cases}\tag{1.5}$$

再继续使用变换 $\phi=u$, $\psi=1-v$, 将系统 (1.5) 变为合作系统

$$\begin{cases}\dfrac{\partial\phi}{\partial t}=[(J_1*\phi)-\phi]+\phi(1-a_1-\phi+a_1\psi),\\ \dfrac{\partial\psi}{\partial t}=d[(J_2*\psi)-\psi]+r(1-\psi)(a_2\phi-\psi),\end{cases}\tag{1.6}$$

则初始数据为

$$\phi(0,x)=\phi_0(x)=u(0,x),\quad \psi(0,x)=\psi_0(x)=1-v(0,x),\quad \forall\, x\in\mathbb{R}.$$

系统 (1.6) 的动力学系统为

$$\begin{cases}\phi' = \phi(1 - a_1 - \phi + a_1\psi),\\ \psi' = r(1-\psi)(a_2\phi - \psi),\end{cases} \tag{1.7}$$

且 (1.3) 中的 4 个平衡点相应地变为

$$\alpha_1 = (0,1), \quad \boldsymbol{o} = (0,0), \quad \beta = (1,1), \quad \alpha_2 = \left(\frac{a_1 - 1}{a_1a_2 - 1}, \frac{a_2(a_1-1)}{a_1a_2-1}\right),$$

即为系统 (1.6) 的常数定态解.

系统 (1.6) 的双稳行波解是指连接两个稳定的平衡点 $\boldsymbol{o}$ 到 $\beta$ 且具有如下形式的解:

$$(\phi,\psi)(x,t) = (\Phi,\Psi)(z), \quad z = x + ct,$$

其中双稳波速 $c \in \mathbb{R}$, $(\Phi,\Psi)(z)$ 满足

$$\begin{cases}[(J_1 * \Phi) - \Phi] - c\Phi' + \Phi(1 - a_1 - \Phi + a_1\Psi) = 0,\\ d[(J_2 * \Psi) - \Psi] - c\Psi' + r(1-\Psi)(a_2\Phi - \Psi) = 0\end{cases} \tag{1.8}$$

和边界条件

$$(\Phi,\Psi)(-\infty) = \boldsymbol{o}, \quad (\Phi,\Psi)(\infty) = \beta. \tag{1.9}$$

本文总是假定 (1.2) 成立, 这意味着 (1.6) 是双稳系统. 令内核函数 $J_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ $(i = 1,2)$ 满足下面假设:

($\mathrm{A}_1$) $J_i \in C(\mathbb{R})$, 对于 $x \in \mathbb{R}$, $J_i(x) = J_i(-x)$, 且 $\int_{\mathbb{R}} J_i(y)dy = 1$;

($\mathrm{A}_2$) 对于任意的 $\lambda \in \mathbb{R}$, 有 $\int_{\mathbb{R}} J_i(y)\mathrm{e}^{\lambda y}dy < \infty$.

Zhang 等 [16] 研究了具有非零波速的双稳行波 (如果存在) 的渐近性质, 并证明了非零波速的唯一性. 本文的目的是, 证明双稳行波解的存在性; 确立双稳行波解的夹逼定理, 并用其对 (1.6) Cauchy 问题的解进行估计; 证明双稳波速的唯一性及其取值区间; 最重要的是确定双稳波速的符号. 双稳波速符号科学地表示了双稳行波的传播方向, 进而揭示了两个稳定平衡态的竞争结果. 本文完成后不久, Zhang 和 Zhao 新发表的论文 [32] 研究了初值问题解的适定性和传播性质, 以及双稳行波解的存在性、全局稳定性和唯一性. 本文原稿中关于双稳行波的存在性和夹逼定理的证明与文献 [32] 的证明相似, 因此删除这部分的证明并直接引用他们的结果. 但是, 对于双稳波速的唯一性证明, 本文给出了更好的思路, 以至于可以去掉文献 [32] 中需要的条件 ($\mathrm{H}_2$), 即

($\mathrm{H}_2$) $d_1 > r_1 + \frac{1}{2}(r_1a_1 + r_2a_2)$ 和 $d_2 > r_2 + \frac{1}{2}(r_1a_1 + r_2a_2)$ (参见文献 [32, 推论 3.9]).

本文还建立了双稳波速取值的区间估计. 除此之外, 本文解决了极具挑战性的问题—如何确定双稳波速符号. 结果表明, 要确定或控制行波传播方向, 可以使用几乎驻波 (速度几乎为 0 的波) 的衰减率来构造测试函数, 通过调整系统参数使该函数成为系统的上解或下解即可. 由于测试函数的选择非常灵活, 使得本文的方法易应用于确定动力学系统中两个双稳态的竞争结果, 进而预测两个物种中哪个更具有竞争优势.

本文余下内容的组织如下: 第 2 节给出需要用到的符号、定义和引理, 并确定双稳波速的取值范围. 第 3 节首先研究双稳行波解的渐近性质, 然后用它来证明双稳波速的唯一性, 并且给出双稳波速和波方程特定上下解波速之间的比较原理. 第 4 节给出确定双稳波速取得正号或负号的充分条件. 总结和讨论放在第 5 节.

## 2 双稳波速取值区间

首先定义集合和运算符号, 令 $\chi=\mathbb{R}^2$, $\mathcal{M}$ 为所有从 $\mathbb{R}$ 到 $\chi$ 的单调非减函数集, $\mathcal{C}=BC(\mathbb{R},\chi)$ 是所有从 $\mathbb{R}$ 到 $\chi$ 的有界连续函数空间且范数为 $|\cdot|_{\mathcal{C}}=\|\cdot\|_\infty$, $\mathcal{C}_+=\{(\phi_1,\phi_2)\in\mathcal{C}:\phi_i(x)\geqslant 0,\forall x\in\mathbb{R},i=1,2\}$. 对于任意的 $\varphi_1,\varphi_2\in\mathcal{C}$, 若 $\varphi_2-\varphi_1\in\mathcal{C}_+$, 则记 $\varphi_1\leqslant\varphi_2$; 若 $\varphi_2-\varphi_1\in\mathcal{C}_+\backslash\{0\}$, 则记 $\varphi_1<\varphi_2$; 若 $\varphi_2-\varphi_1\in\mathtt{Int}(\mathcal{C}_+)$, 则记 $\varphi_1\ll\varphi_2$. 定义 $\mathcal{C}_{[\alpha,\beta]}=[\alpha,\beta]_{\mathcal{C}}=\{\varphi\in\mathcal{C}:\alpha\leqslant\varphi\leqslant\beta\}$. 通常将 $\mathcal{C}_{[\boldsymbol{o},\beta]}$ 简单地表示为 $\mathcal{C}_\beta$.

令 $\{Q_t\}_{t\geqslant 0}$ 表示定义在 $\mathcal{C}_+$ 上的系统 (1.6) 的解半流, 即

$$Q_t[\varphi](x)=w(t,x,\varphi),\quad \forall\,\varphi\in BC(\mathbb{R},\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}_+),\quad x\in\mathbb{R},\quad t\geqslant 0,$$

其中 $w(t,x,\varphi)=(\phi(t,x,\varphi),\psi(t,x,\varphi))$ 是系统 (1.6) 满足 $w(0,\cdot,\varphi)=\varphi$ 的唯一解. 易知 $Q_t[\varphi]$ 关于 $\varphi$ 单调. 将 $Q_t$ $(t\geqslant 0)$ 在 $\chi$ 中所有不动点的集合记为 $E$, 于是, $E=\{\boldsymbol{o},\alpha_1,\alpha_2,\beta\}$. 下面引入两个定义.

**定义 2.1** [33] 对于映射 $Q:\chi_\beta\to\chi_\beta$, 如果存在数 $\delta>0$ 和单位向量 $e\in\mathrm{Int}(\chi^+)$, 使得不等式

$$Q[\alpha+\eta e]\ll\alpha+\eta e,\quad \eta\in(0,\delta]$$

成立, 则称不动点 $\alpha$ 是上强稳的. 类似地, 当 $\eta\in[-\delta,0)$ 且将上面全部不等式反号, 则可得 $\beta$ 下强稳的定义.

**定义 2.2** 如果一对连续函数 $(\Phi(z),\Psi(z))$ 在 $\mathbb{R}$ 上除了有限个点 $z_i$ $(i=1,\dots,n)$ 外都可微并且满足

$$\begin{cases}[(J_1*\Phi)-\Phi]-c\Phi'+\Phi(1-a_1-\Phi+a_1\Psi)\leqslant 0,\quad \Phi(-\infty)\geqslant 0,\quad \Phi(\infty)\geqslant 1,\\ d[(J_2*\Psi)-\Psi]-c\Psi'+r(1-\Psi)(a_2\Phi-\Psi)\leqslant 0,\quad \Psi(-\infty)\geqslant 0,\quad \Psi(\infty)\geqslant 1,\end{cases}\tag{2.1}$$

则称 $(\Phi(z),\Psi(z))$ 是系统 (1.8) 的上解. 把上面所有不等式反号则可得下解定义.

下面的引理给出了双稳行波解的存在性和单调性.

**引理 2.1** (参见文献 [32, 定理 3.1]) 假定 $(\mathrm{A}_1)$ 和 $(\mathrm{A}_2)$ 成立, 则存在 $c\in\mathbb{R}$ 和连接 $\boldsymbol{o}$ 到 $\beta$ 的 $W\in\mathcal{M}_\beta$ 满足 $Q_t[W](x)=W(x+ct)$, $x\in\mathbb{R}$, 即系统 (1.6) 有连接 $\boldsymbol{o}$ 到 $\beta$ 的非减行波解 $W(x+ct)$ $=(\Phi(x+ct),\Psi(x+ct))$, 而且 $W(x+ct)$ 是严格递增的古典解.

文献 [16, 定理 2.4] 证明了上述行波解 $W(x+ct)$ 关于波变量 $z$ 的导数为正, 即下面的引理.

**引理 2.2** (参见文献 [16, 定理 2.4]) 假定 $(\mathrm{A}_1)$ 成立且核函数 $J_i(x)$ $(i=1,2)$ 是紧支的, 则引理 2.1 中的行波解 $(\Phi,\Psi)(z)$ 满足 $\Phi'(z)>0$, $\Psi'(z)>0$.

由引理 2.1 和 2.2, 可以构造 (1.6) 的行波解形式的上下解而得到夹逼定理, 进而可以对 (1.6) 的 Cauchy 问题的解进行估计.

假设 $p^+$ 和 $p^-$ 是两个强正向量且 (1.6) 的解半流 $\{Q_t\}_{t\geqslant 0}$ 的不动点 $\beta=(1,1)$ 和 $\boldsymbol{o}=(0,0)$ 分别沿 $p^+$ 和 $p^-$ 是上下强稳的. $p^+$ 和 $p^-$ 的选择是可行的 (参见文献 [32, (3.4)]). 通过缩放, 可以假定 $p^-\leqslant p^+$. 进一步, 定义转移向量函数 $p(z)$ 如下: 令 $z_1$ 和 $z_2$ 是两个固定常数, 当 $z>z_1>0$ 时, $p(z)=p^+$; 当 $z<z_2<0$ 时, $p(z)=p^-$; 当 $z\in[z_1,z_2]$ 时, $p(z)$ 是光滑函数. 现在根据文献 [32, 引理 3.2 和 3.5], 可以得到下面的夹逼定理.

**引理 2.3** (夹逼定理, 参见文献 [32, 引理 3.2 和 3.5]) 假设 $(\mathrm{A}_1)$ 成立且核函数 $J_i(x)$ $(i=1,2)$ 有紧支集, 则下面的结论成立:

(i) 定义

$$w^{\pm}(t,x)=W(x+ct+\zeta^{\pm}\pm\sigma\delta(1-\mathrm{e}^{-\rho t}))\pm\delta p(x+ct+\zeta^{\pm})\mathrm{e}^{-\rho t},$$

其中 $W(z)=(\Phi,\Psi)(z)$ 是 (1.6) 的双稳行波解, 则存在正常数 $\delta_0$, 使得对于 $\delta\in(0,\delta_0)$、任意正常数 $\sigma$ 和 $\rho$ 及任意实数 $\zeta^+$ 和 $\zeta^-$, 函数 $w^{\pm}(t,x)$ 分别是 (1.6) 的上下解;

(ii) 令 $w^{\pm}(t,x)$ 为 (i) 中给定的上下解, 当初始数据 $w_0=(\phi_0,\psi_0)$ 满足 $w^-(0,x)\leqslant(\phi_0(x),\psi_0(x))\leqslant w^+(0,x)$ $(x\in\mathbb{R})$ 时, 系统 (1.6) 的解 $(\phi(t,x,w_0),\psi(t,x,w_0))$ 满足

$$w^-(t,x)\leqslant(\phi(t,x,w_0),\psi(t,x,w_0))\leqslant w^+(t,x),\quad t\geqslant 0,\quad x\in\mathbb{R}.$$

下面叙述本节的主要结论.

**定理 2.1**　假设 $(\mathrm{A}_1)$ 成立且核函数 $J_i(x)$ $(i=1,2)$ 有紧支集, 则系统 (1.8) 的波速 $c$ 满足

$$-c_+^*(\boldsymbol{o},\alpha_i)\leqslant c\leqslant c_-^*(\alpha_i,\beta),\quad i=1,2. \tag{2.2}$$

特别地, 当 $i=1$ 时, 有

$$-\inf_{0<\tau<\infty}\frac{r-d+d\int_{\mathbb{R}}J_2\mathrm{e}^{-\tau y}dy}{\tau}\leqslant c\leqslant\inf_{0<\tau<\infty}\frac{\int_{\mathbb{R}}J_1\mathrm{e}^{\tau y}dy}{\tau}. \tag{2.3}$$

**证明**　对于 (2.2), 只证明 $i=1$ 时右边的不等式, 其余结论均可以用相同的方法证明. 令 $(\Phi_1,\Psi_1)(z)$ 为 (1.8) 的解且满足边界条件

$$(\Phi_1,\Psi_1)(-\infty)=\alpha_1,\quad(\Phi_1,\Psi_1)(\infty)=\beta,$$

其中, 波速 $c=c_-^*(\alpha_1,\beta)$, 即 $(\Phi_1,\Psi_1)(x+c_-^*(\alpha_1,\beta)t)$ 是系统 (1.6) 的以 $(\Phi_1,\Psi_1)(x)$ 为初始数据的单稳行波解. 如果选择 (1.6) 的另外一对连续非减初始函数 $w_0=(\phi_0,\psi_0)=(\phi(0,x),\psi(0,x))$ 为

$$\phi(0,x)=\psi(0,x)=0,\quad x<-L,\quad\phi(0,x)=\psi(0,x)=1-\varepsilon,\quad x>L,$$

其中 $L$ 是正常数且 $\varepsilon\in(0,1)$ 是很小的参数, 则由引理 2.1 证明的双稳行波的单调性, 可以 (或通过平移) 得到

$$(\Phi_1,\Psi_1)(x)\geqslant(\phi(0,x),\psi(0,x)),\quad x\in\mathbb{R}.$$

根据比较原理, 可得

$$(\Phi_1,\Psi_1)(x+c_-^*(\alpha_1,\beta)t)\geqslant(\phi,\psi)(t,x,w_0),\quad t\geqslant 0. \tag{2.4}$$

再由引理 2.3 可知, 存在正常数 $\zeta^-$、$\sigma$、$\delta$ 和 $\rho$ 使得

$$(\phi,\psi)(t,x)\geqslant W(x+ct+\zeta^--\sigma\delta(1-\mathrm{e}^{-\rho t}))-\delta p(x+ct+\zeta^-)\mathrm{e}^{-\rho t}. \tag{2.5}$$

由 (2.4) 和 (2.5) 可推出 $c\leqslant c_-^*(\alpha_1,\beta)$. 否则, 反设 $c>c_-^*(\alpha_1,\beta)$. 固定 $\eta$ 使得 $(\Phi_1,\Psi_1)(\eta)<(1,1)$, 则在直线 $x+c_-^*(\alpha_1,\beta)t=\eta$ 上, 有

$$\begin{aligned}(\Phi_1,\Psi_1)(\eta)&=(\Phi_1,\Psi_1)(x+c_-^*(\alpha_1,\beta)t)\\&\geqslant W(x+ct+\zeta^--\sigma\delta(1-\mathrm{e}^{-\rho t}))-\delta p(x+ct+\zeta^-)\mathrm{e}^{-\rho t}\\&\geqslant W(\eta+(c-c_-^*(\alpha_1,\beta))t+\zeta^--\sigma\delta(1-\mathrm{e}^{-\rho t}))\\&\quad-\delta p(\eta+(c-c_-^*(\alpha_1,\beta))t+\zeta^-)\mathrm{e}^{-\rho t}\to(1,1)\quad(\text{当 } t\to\infty \text{ 时}).\end{aligned}$$

显然矛盾. 因此, 反设不成立.

由 (2.2) 和文献 [7, 定理 4.5], 可以直接得到不等式 (2.3). 证毕. □

## 3 唯一性和比较原理

本节致力于证明双稳波速的唯一性以及揭示双稳波速与系统 (1.8) 和 (1.9) 上下解波速之间的关系. 首先研究当 $z\to\mp\infty$ 时 (1.8) 和 (1.9) 的解在平衡点 $\boldsymbol{o}$ 和 $\beta$ 附近的渐近速率. 将系统 (1.8) 在平衡点 $\boldsymbol{o}$ 处线性化, 可得线性化系统为

$$\begin{cases} J_1*\Phi-c\Phi'-a_1\Phi=0,\\ d(J_2*\Psi)-c\Psi'-(d+r)\Psi+ra_2\Phi=0.\end{cases}\tag{3.1}$$

令 $(\xi_1\mathrm{e}^{\mu z},\xi_2\mathrm{e}^{\mu z})$ 为 (3.1) 的解, 则 $(\xi_1,\xi_2)$ 满足

$$\begin{pmatrix} F_1(\mu,c) & 0\\ ra_2 & F_2(\mu,c)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\xi_1\\ \xi_2\end{pmatrix}=0,$$

其中

$$F_1(\mu,c)=\int_{\mathbb{R}}J_1(y)\mathrm{e}^{-\mu y}dy-c\mu-a_1,\quad F_2(\mu,c)=d\int_{\mathbb{R}}J_2(y)\mathrm{e}^{-\mu y}dy-c\mu-d-r.$$

同样地, 将 (1.8) 在 $\beta$ 处线性化, 可得

$$\begin{cases} J_1*\Phi-c\Phi'-2\Phi+a_1\Psi=0,\\ d(J_2*\Psi)-c\Psi'+[r(1-a_2)-d]\Psi=0.\end{cases}\tag{3.2}$$

令 $(\xi_3\mathrm{e}^{-\mu z},\xi_4\mathrm{e}^{-\mu z})$ 为 (3.2) 的解, 则 $(\xi_3,\xi_4)$ 满足

$$\begin{pmatrix} F_3(\mu,c) & a_1\\ 0 & F_4(\mu,c)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\xi_3\\ \xi_4\end{pmatrix}=0,$$

其中

$$F_3(\mu,c)=\int_{\mathbb{R}}J_1(y)\mathrm{e}^{\mu y}dy+c\mu-2,\quad F_4(\mu,c)=d\int_{\mathbb{R}}J_2(y)\mathrm{e}^{\mu y}dy-d+c\mu+r(1-a_2).$$

**引理 3.1** 如果 $c$ 满足 (2.2), 则下述结论成立:

($\mathrm{R}_1$) $F_i(\mu,c)$ 关于 $\mu$ 是凸函数, $\mu\in\mathbb{R}$, $i=1,2,3,4$;

($\mathrm{R}_2$) 特征方程 $F_1(\mu,c)=0$ 有两个根 $\mu_1(c)>0$, $\mu_2(c)<0$;

($\mathrm{R}_3$) 特征方程 $F_4(\mu,c)=0$ 有两个根 $\mu_3(c)<0$, $\mu_4(c)>0$;

($\mathrm{R}_4$) 特征方程 $F_2(\mu,c)=0$ 有两个根 $\mu_5(c)>0$, $\mu_6(c)<0$;

($\mathrm{R}_5$) 特征方程 $F_3(\mu,c)=0$ 有两个根 $\mu_7(c)<0$, $\mu_8(c)>0$;

($\mathrm{R}_6$) 衰减率 $\mu_1(c)$ 和 $\mu_5(c)$ 关于 $c$ 单调递增, $\mu_4(c)$ 和 $\mu_8(c)$ 关于 $c$ 单调递减;

($\mathrm{R}_7$) 如果 $\mu_1(c)<\mu_5(c)$, $\mu_4(c)<\mu_8(c)$, $\mu_1(c)<\mu_4(c)$, 则 $F_2(\mu_1,c)<0$, $F_3(\mu_4,c)<0$, $F_4(\mu_1,c)<0$.

利用常规的理论分析可以得到该引理的结论, 因此省略其证明过程. 下面的定理表明系统 (1.6) 的双稳行波解波速是唯一的.

**定理 3.1** 假设系统 (1.6) 有双稳行波解 $W(z)=(\Phi,\Psi)(z)$, $z=x+c^*t$, 则对于 (1.6) 的任意双稳行波解 $\widetilde{W}(z)=(\widetilde{\Phi},\widetilde{\Psi})(z)$, $z=x+ct$, 有 $c=c^*$.

**证明**　反证法, 假设 $c\neq c^*$. 不失一般性, 令 $c>c^*$. 根据引理 3.1, 可以得出双稳行波 $\widetilde{W}(z)$ 在 $\boldsymbol{o}$ 和 $\beta$ 附近有下列渐近性质:

$$\begin{cases}\widetilde{\Phi}(z)\sim b_{11}\mathrm{e}^{\mu_1(c)z}, & \text{当 } z\to-\infty \text{ 时},\\ \widetilde{\Psi}(z)\sim\begin{cases}b_{12}|z|\mathrm{e}^{\mu_1(c)z}, & \text{如果 } \mu_1(c)=\mu_5(c), \quad \text{当 } z\to-\infty \text{ 时},\\ b_{12}\mathrm{e}^{\min\{\mu_1(c),\mu_5(c)\}z}, & \text{如果 } \mu_1(c)\neq\mu_5(c), \quad \text{当 } z\to-\infty \text{ 时}\end{cases}\end{cases}\tag{3.3}$$

和

$$\begin{cases}\widetilde{\Phi}(z)\sim\begin{cases}1-b_{13}|z|\mathrm{e}^{-\mu_4(c)z}, & \text{如果 } \mu_4(c)=\mu_8(c), \quad \text{当 } z\to\infty \text{ 时},\\ 1-b_{13}\mathrm{e}^{-\min\{\mu_4(c),\mu_8(c)\}z}, & \text{如果 } \mu_4(c)\neq\mu_8(c), \quad \text{当 } z\to\infty \text{ 时},\end{cases}\\ \widetilde{\Psi}(z)\sim 1-b_{14}\mathrm{e}^{-\mu_4(c)z}, \quad \text{当 } z\to\infty \text{ 时},\end{cases}\tag{3.4}$$

其中 $z=x+ct$, $b_{1i}$ $(i=1,2,3,4)$ 是正常数. $W(z)$ 在 $\boldsymbol{o}$ 和 $\beta$ 附近的渐近性质分别为

$$\begin{cases}\Phi(z)\sim b_{21}\mathrm{e}^{\mu_1(c^*)z}, & \text{当 } z\to-\infty \text{ 时},\\ \Psi(z)\sim\begin{cases}b_{22}|z|\mathrm{e}^{\mu_1(c^*)z}, & \text{如果 } \mu_1(c^*)=\mu_5(c^*), \quad \text{当 } z\to-\infty \text{ 时},\\ b_{22}\mathrm{e}^{\min\{\mu_1(c^*),\mu_5(c^*)\}z}, & \text{如果 } \mu_1(c^*)\neq\mu_5(c^*), \quad \text{当 } z\to-\infty \text{ 时}\end{cases}\end{cases}\tag{3.5}$$

和

$$\begin{cases}\Phi(z)\sim\begin{cases}1-b_{23}|z|\mathrm{e}^{-\mu_4(c^*)z}, & \text{如果 } \mu_4(c^*)=\mu_8(c^*), \quad \text{当 } z\to\infty \text{ 时},\\ 1-b_{23}\mathrm{e}^{-\min\{\mu_4(c^*),\mu_8(c^*)\}z}, & \text{如果 } \mu_4(c^*)\neq\mu_8(c^*), \quad \text{当 } z\to\infty \text{ 时},\end{cases}\\ \Psi(z)\sim 1-b_{24}\mathrm{e}^{-\mu_4(c^*)z}, \quad \text{当 } z\to\infty \text{ 时},\end{cases}\tag{3.6}$$

其中 $z=x+c^*t$, $b_{2i}$ $(i=1,2,3,4)$ 是正常数. 根据引理 3.1 的 $(\mathrm{R}_6)$, 有 $\mu_1(c)>\mu_1(c^*)$, $\min\{\mu_1(c),\mu_5(c)\}>\min\{\mu_1(c^*),\mu_5(c^*)\}$, $\mu_4(c)<\mu_4(c^*)$, $\min\{\mu_4(c),\mu_8(c)\}<\min\{\mu_4(c^*),\mu_8(c^*)\}$. 因此, 存在充分大的正常数 $\xi_0$ 使得

$$\widetilde{W}(z-\xi_0)<W(z), \quad \text{对于 } z\in(-\infty,\infty),$$

则可取 $\widetilde{W}(z-\xi_0)$ 和 $W(z)$ 在 $t=0$ 时的初始函数满足

$$\widetilde{W}(x-\xi_0)<W(x), \quad \text{对于 } x\in(-\infty,\infty).$$

根据比较原理, 可得 $Q_t[\widetilde{W}](x-\xi_0)\leqslant Q_t[W](x)$, 即

$$\widetilde{W}(x+ct-\xi_0)\leqslant W(x+c^*t).$$

固定 $\rho=x+c^*t$ 使得 $W(\rho)=\beta/3$. 由假设可以得到

$$\begin{aligned}\frac{\beta}{3}&=W(\rho)\geqslant\widetilde{W}(x+ct-\xi_0)\\&=\widetilde{W}(\rho+(c-c^*)t-\xi_0)\\&\to\beta, \quad \text{当 } t\to\infty \text{ 时}.\end{aligned}$$

显然矛盾. 因此 $c\leqslant c^*$. 同样地, 可以证明 $c\geqslant c^*$. 证毕. □

此后, 总是用 $c^*$ 表示双稳波速. 接下来给出关于双稳波速的比较原理.

**定理 3.2** 如果系统 (1.8) 和 (1.9) 存在一个波速为 $\bar{c}$ 的非负上解 $(\overline{\Phi},\overline{\Psi})(z)$, 关于 $z$ 非减并且满足

$$(\overline{\Phi},\overline{\Psi})(-\infty)<(1,1),\quad (\overline{\Phi},\overline{\Psi})(\infty)\geqslant(1,1),\tag{3.7}$$

则 (1.6) 的双稳波速满足

$$c^*\leqslant\bar{c}.\tag{3.8}$$

特别地, 如果 $\bar{c}<0$, 则 $c^*$ 是负的.

**证明** 取 (1.6) 的连续非减初始函数 $(\phi(0,x),\psi(0,x))$ 满足

$$\phi(0,x)=\psi(0,x)=0,\quad x<-L,\quad \phi(0,x)=\psi(0,x)=1-\varepsilon,\quad x>L,$$

其中 $L$ 是正常数且 $\varepsilon\in(0,1)$ 是很小的参数. 由 (3.7), 通过平移可得

$$(\overline{\Phi},\overline{\Psi})(x)\geqslant(\phi(0,x),\psi(0,x)),\quad x\in\mathbb{R}.$$

由比较原理, 有

$$(\overline{\Phi},\overline{\Psi})(x+\bar{c}t)\geqslant(\phi(t,x),\psi(t,x)),\quad x\in\mathbb{R},\quad t\geqslant 0.$$

运用引理 2.3, 其中的波速 $c$ 用 $c^*$ 代替, 再通过与定理 2.1 证明过程同样的分析, 可以推出 $c^*\leqslant\bar{c}$. 证毕. □

**定理 3.3** 假设系统 (1.8) 和 (1.9) 有波速为 $\underline{c}$ 的非负下解 $(\underline{\Phi},\underline{\Psi})(z)$, 关于 $z$ 非减并且满足

$$(\underline{\Phi},\underline{\Psi})(-\infty)=(0,0)<(\underline{\Phi},\underline{\Psi})(\infty)\leqslant(1,1),$$

则 (1.6) 的双稳波速满足

$$c^*\geqslant\underline{c}.\tag{3.9}$$

特别地, 如果 $\underline{c}>0$, 则 $c^*$ 是正的.

该定理的证明与定理 3.2 类似, 因此省略.

**注 3.1** (双稳波速可为 0) 对于充分小的 $\varepsilon$, 如果系统 (1.8) 和 (1.9) 存在一个波速为 $\bar{c}=-\varepsilon$ 的非负上解 $(\overline{\Phi},\overline{\Psi})(z)$ 和一个波速为 $\underline{c}=\varepsilon$ 的非负下解 $(\underline{\Phi},\underline{\Psi})(z)$, 则系统波速 $c^*$ 等于 0.

## 4 波速符号选择条件

本节将根据前面几节的结果, 通过给定系统 (1.8) 和 (1.9) 的波速接近于 0 的上下解, 获得确定其双稳波速符号的条件. 以下假设定理 4.1 中 $J_2$ 不对称、定理 4.2 和 4.4 中 $J_1$ 不对称且双稳行波解存在.

**定理 4.1** 令系统参数 $d$、$a_1$、$a_2$ 和 $r$ 固定. 假设不等式

$$0<\frac{-ra_2}{F_2(\mu_1,0)}<\frac{1}{a_1}\tag{4.1}$$

成立, 其中 $F_2(\mu_1,0)=d\int_{\mathbb{R}}J_2(y)\mathrm{e}^{-\mu_1(0)y}dy-d-r$ 且 $\mu_1(0)$ 满足

$$\int_{\mathbb{R}}J_1(y)\mathrm{e}^{-\mu_1(0)y}dy-a_1=0,$$

则双稳波速 $c^*$ 为负.

**证明**　定义一对连续函数 $(\overline{\Phi},\overline{\Psi})(z)$ 为

$$\overline{\Phi}(z)=\begin{cases}\mathrm{e}^{\mu_1(\bar{c})z}, & z\leqslant 0,\\ 1, & z>0,\end{cases}\quad \overline{\Psi}(z)=\begin{cases}k_1\mathrm{e}^{\mu_1(\bar{c})z}, & z\leqslant z_1,\\ 1, & z>z_1,\end{cases}$$

其中 $\bar{c}=-\varepsilon$, $0<\varepsilon\ll 1$, $k_1\mathrm{e}^{\mu_1(\bar{c})z_1}=1$ 且 $k_1$ 是待定常数. 根据 (4.1), 可以选择 $k_1$ 满足

$$\frac{-ra_2}{F_2(\mu_1,0)}<k_1<\frac{1}{a_1}<1. \tag{4.2}$$

由此易见 $z_1>0$. 把 $(\overline{\Phi},\overline{\Psi})(z)$ 代入 (1.8) 中两个方程的左边, 对于 $z\in(-\infty,0]$, 由 (4.2), 有

$$\begin{aligned}&\int_{\mathbb{R}}J_1\overline{\Phi}dy-\overline{\Phi}-\bar{c}\overline{\Phi}'+\overline{\Phi}(1-a_1-\overline{\Phi}+a_1\overline{\Psi})=\mathrm{e}^{2\mu_1(\bar{c})z}(a_1k_1-1)\leqslant 0,\\ &d\left(\int_{\mathbb{R}}J_2\overline{\Psi}dy-\overline{\Psi}\right)-\bar{c}\overline{\Psi}'+r(1-\overline{\Psi})(a_2\overline{\Phi}-\overline{\Psi})\\ &\quad=\mathrm{e}^{\mu_1(-\varepsilon)z}[k_1F_2(\mu_1(-\varepsilon),-\varepsilon)+ra_2+r\mathrm{e}^{\mu_1(-\varepsilon)z}k_1(k_1-a_2)]\\ &\quad\to\mathrm{e}^{\mu_1(0)z}[k_1F_2(\mu_1,0)+ra_2+r\mathrm{e}^{\mu_1(0)z}k_1(k_1-a_2)]\leqslant 0\quad (当\ \varepsilon\to 0\ 时).\end{aligned}$$

显然, 当 $\varepsilon$ 充分小时, 可得

$$d\left(\int_{\mathbb{R}}J_2\overline{\Psi}dy-\overline{\Psi}\right)-\bar{c}\overline{\Psi}'+r(1-\overline{\Psi})(a_2\overline{\Phi}-\overline{\Psi})\leqslant 0.$$

对于 $z\in(0,z_1]$, 由 (4.2), 有

$$\begin{aligned}&\int_{\mathbb{R}}J_1\overline{\Phi}dy-\overline{\Phi}-\bar{c}\overline{\Phi}'+\overline{\Phi}(1-a_1-\overline{\Phi}+a_1\overline{\Psi})=a_1(k_1\mathrm{e}^{\mu_1(-\varepsilon)z}-1)\leqslant 0,\\ &d\left(\int_{\mathbb{R}}J_2\overline{\Psi}dy-\overline{\Psi}\right)-\bar{c}\overline{\Psi}'+r(1-\overline{\Psi})(a_2\overline{\Phi}-\overline{\Psi})\\ &\quad\leqslant\mathrm{e}^{\mu_1(-\varepsilon)z}\big[k_1F_2(\mu_1(-\varepsilon),-\varepsilon)+a_2r-a_2rk_1+rk_1\big]\\ &\quad\to\mathrm{e}^{\mu_1(0)z}\big[k_1F_2(\mu_1,0)+a_2r-a_2rk_1+rk_1\big]\leqslant 0\quad (当\ \varepsilon\to 0\ 时).\end{aligned}$$

因此, 当 $\varepsilon$ 充分小时, 有

$$d\left(\int_{\mathbb{R}}J_2\overline{\Psi}dy-\overline{\Psi}\right)-\bar{c}\overline{\Psi}'+r(1-\overline{\Psi})(a_2\overline{\Phi}-\overline{\Psi})\leqslant 0.$$

对于 $z\in(z_1,\infty)$, 同样的不等式符号显然成立. 因此, 根据定义 2.2, $(\overline{\Phi},\overline{\Psi})(z)$ 是系统 (1.8) 和 (1.9) 的上解. 由定理 3.2 知, 定理 4.1 得证. □

**定理 4.2**　令系统参数 $d$、$a_1$、$a_2$ 和 $r$ 固定. 如果不等式

$$0<\frac{-a_1}{F_3(\mu_4,0)}<\frac{1}{a_2} \tag{4.3}$$

成立, 其中 $F_3(\mu_4,0)=\int_{\mathbb{R}}J_1(y)\mathrm{e}^{\mu_4(0)y}dy-2$ 且 $\mu_4(0)$ 满足

$$d\int_{\mathbb{R}}J_2(y)\mathrm{e}^{\mu_4(0)y}dy-d+r(1-a_2)=0,$$

则双稳波速 $c^*$ 为正.

**证明** 定义一对连续函数 $(\underline{\Phi},\underline{\Psi})(z)$ 为

$$\underline{\Psi}(z)=\begin{cases}0, & z\leqslant 0,\\ 1-\mathrm{e}^{-\mu_4(\underline{c})z}, & z>0,\end{cases}\quad \underline{\Phi}(z)=\begin{cases}0, & z\leqslant z_2,\\ 1-k_2\mathrm{e}^{-\mu_4(\underline{c})z}, & z>z_2,\end{cases}$$

其中 $\underline{c}=\varepsilon$, $0<\varepsilon\ll 1$, $k_2\mathrm{e}^{-\mu_4(\underline{c})z_2}=1$ 且 $k_2$ 是待定常数. 由 (4.3), 可以取 $k_2$ 满足

$$\frac{-a_1}{F_3(\mu_4,0)}<k_2<\frac{1}{a_2}, \tag{4.4}$$

这意味着 $z_2<0$. 如果能证明 $(\underline{\Phi},\underline{\Psi})(z)$ 为 (1.8) 和 (1.9) 的下解, 则由定理 3.3 知结论成立.

为了这个目的, 将 $(\underline{\Phi},\underline{\Psi})(z)$ 代入 (1.8) 两个方程的左边, 对于 $z\in(0,\infty)$, 由 (4.4), 有

$$d\bigg(\int_{\mathbb{R}}J_2\underline{\Psi}dy-\underline{\Psi}\bigg)-\underline{c}\underline{\Psi}'+r(1-\underline{\Psi})(a_2\underline{\Phi}-\underline{\Psi})=r\mathrm{e}^{-2\mu_4(\varepsilon)z}(1-a_2k_2)\geqslant 0, \tag{4.5}$$

$$\begin{aligned}&\int_{\mathbb{R}}J_1\underline{\Phi}dy-\underline{\Phi}-\underline{c}\underline{\Phi}'+\underline{\Phi}(1-a_1-\underline{\Phi}+a_1\underline{\Psi})\\ &\quad=-\mathrm{e}^{-\mu_4(\varepsilon)z}[k_2F_3(\mu_4(\varepsilon),\varepsilon)+a_1+\mathrm{e}^{-\mu_4(\varepsilon)z}k_2(k_2-a_1)]\\ &\quad\to-\mathrm{e}^{-\mu_4(0)z}[k_2F_3(\mu_4,0)+a_1+\mathrm{e}^{-\mu_4(0)z}k_2(k_2-a_1)]\geqslant 0\quad(\text{当 }\varepsilon\to 0\text{ 时}),\end{aligned}$$

则当 $\varepsilon$ 充分小时, 有

$$\int_{\mathbb{R}}J_1\underline{\Phi}dy-\underline{\Phi}-\underline{c}\underline{\Phi}'+\underline{\Phi}(1-a_1-\underline{\Phi}+a_1\underline{\Psi})\geqslant 0.$$

对于 $z\in(z_2,0]$, 有

$$\begin{aligned}&d\bigg(\int_{\mathbb{R}}J_2\underline{\Psi}dy-\underline{\Psi}\bigg)-\underline{c}\underline{\Psi}'+r(1-\underline{\Psi})(a_2\underline{\Phi}-\underline{\Psi})=ra_2(1-k_2\mathrm{e}^{-\mu_4(\varepsilon)z})\geqslant 0,\\ &\int_{\mathbb{R}}J_1\underline{\Phi}dy-\underline{\Phi}-\underline{c}\underline{\Phi}'+\underline{\Phi}(1-a_1-\underline{\Phi}+a_1\underline{\Psi})\\ &\quad\geqslant\mathrm{e}^{-\mu_4(\varepsilon)z}[-k_2F_3(\mu_4(\varepsilon),\varepsilon)-a_1+k_2(a_1-1)]\\ &\quad\to\mathrm{e}^{-\mu_4(0)z}[-k_2F_3(\mu_4,0)-a_1+k_2(a_1-1)]\geqslant 0\quad(\text{当 }\varepsilon\to 0\text{ 时}),\end{aligned}$$

即当 $\varepsilon$ 充分小时, 可得

$$\int_{\mathbb{R}}J_1\underline{\Phi}dy-\underline{\Phi}-\underline{c}\underline{\Phi}'+\underline{\Phi}(1-a_1-\underline{\Phi}+a_1\underline{\Psi})\geqslant 0.$$

对于 $z\in(-\infty,z_2)$, 同样的不等式符号显然成立. 综上可知, $(\underline{\Phi},\underline{\Psi})(z)$ 是 (1.8) 和 (1.9) 的下解. 证毕. □

**定理 4.3** 假设对任给系统参数 $d$、$a_1$、$a_2$ 和 $r$ 都成立

$$0<\frac{-ra_2}{F_2(\mu_1,0)}<\frac{\int_0^\infty J_1(y)(\mathrm{e}^{\mu_1(0)y}+\mathrm{e}^{-\mu_1(0)y}-2)(\mathrm{e}^{-\mu_1(0)y}+1)dy}{a_1}, \tag{4.6}$$

其中 $F_2(\mu_1,0)$ 和 $\mu_1(0)$ 定义同定理 4.1, 则双稳波速 $c^*$ 为负.

**证明**　令

$$\overline{\Phi}(z)=\frac{1}{1+\mathrm{e}^{-\mu_1(\bar{c})z}},\quad \overline{\Psi}(z)=\begin{cases}k_3\overline{\Phi}(z), & z\leqslant z_3,\\ 1, & z>z_3,\end{cases}$$

其中 $\bar{c}=-\varepsilon$, $0<\varepsilon\ll 1$, $k_3\overline{\Phi}(z_3)=1$ 且 $k_3$ 是待定常数. 由定理 3.2 知, 只需要证明, 在条件 (4.6) 下, $(\overline{\Phi},\overline{\Psi})(z)$ 是 (1.8) 和 (1.9) 的上解, 则结论成立.

根据 (4.6), 可选择 $k_3$ 满足

$$\frac{-ra_2}{F_2(\mu_1,0)}<k_3<\frac{\int_0^\infty J_1(y)(\mathrm{e}^{\mu_1(0)y}+\mathrm{e}^{-\mu_1(0)y}-2)(\mathrm{e}^{-\mu_1(0)y}+1)dy}{a_1}. \tag{4.7}$$

将 $(\overline{\Phi},\overline{\Psi})(z)$ 代入 (1.8) 两个方程的左边, 对于 (1.8) 的第一个方程, 有

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}}J_1\overline{\Phi}dy-\overline{\Phi}-\bar{c}\overline{\Phi}'+\overline{\Phi}(1-a_1-\overline{\Phi}+a_1\overline{\Psi})\\
&\quad\leqslant\overline{\Phi}^2(1-\overline{\Phi})\bigg\{\int_{-\infty}^0 J_1(y)[2-\mathrm{e}^{\mu_1(-\varepsilon)y}-\mathrm{e}^{-\mu_1(-\varepsilon)y}]dy\\
&\qquad+\int_0^\infty J_1(y)[2-\mathrm{e}^{\mu_1(-\varepsilon)y}-\mathrm{e}^{-\mu_1(-\varepsilon)y}]\mathrm{e}^{-\mu_1(-\varepsilon)y}dy+a_1\frac{\overline{\Psi}-\overline{\Phi}}{\overline{\Phi}(1-\overline{\Phi})}\bigg\}\\
&\quad=\overline{\Phi}^2(1-\overline{\Phi})\bigg\{\int_0^\infty J_1(y)[2-\mathrm{e}^{\mu_1(-\varepsilon)y}-\mathrm{e}^{-\mu_1(-\varepsilon)y}](\mathrm{e}^{-\mu_1(-\varepsilon)y}+1)dy+a_1\frac{\overline{\Psi}-\overline{\Phi}}{\overline{\Phi}(1-\overline{\Phi})}\bigg\}\\
&\quad\to\overline{\Phi}^2(1-\overline{\Phi})\bigg\{\int_0^\infty J_1(y)[2-\mathrm{e}^{\mu_1(0)y}-\mathrm{e}^{-\mu_1(0)y}](\mathrm{e}^{-\mu_1(0)y}+1)dy+a_1\frac{\overline{\Psi}-\overline{\Phi}}{\overline{\Phi}(1-\overline{\Phi})}\bigg\}\quad(\text{当 }\varepsilon\to 0\text{ 时}).
\end{aligned}$$

很容易验证

$$\frac{\overline{\Psi}-\overline{\Phi}}{\overline{\Phi}(1-\overline{\Phi})}=\begin{cases}\dfrac{k_3-1}{1-\overline{\Phi}}\leqslant k_3, & z\leqslant z_3,\\ \dfrac{1}{\overline{\Phi}}\leqslant k_3, & z>z_3.\end{cases}$$

由此及 (4.7), 当 $\varepsilon$ 充分小时, 可得

$$\int_{\mathbb{R}}J_1\overline{\Phi}dy-\overline{\Phi}-\bar{c}\overline{\Phi}'+\overline{\Phi}(1-a_1-\overline{\Phi}+a_1\overline{\Psi})\leqslant 0,\quad \text{对于所有的 } z\in(-\infty,\infty).$$

对于 (1.8) 的第二个方程, 当 $z\leqslant z_3$ 时, 有

$$\begin{aligned}
&d\bigg(\int_{\mathbb{R}}J_2\overline{\Psi}dy-\overline{\Psi}\bigg)-\bar{c}\overline{\Psi}'+r(1-\overline{\Psi})(a_2\overline{\Phi}-\overline{\Psi})\\
&\quad\leqslant d\int_{\mathbb{R}}J_2k_3\overline{\Phi}dy-dk_3\overline{\Phi}-\bar{c}\mu_1k_3\overline{\Phi}(1-\overline{\Phi})+r(1-\overline{\Phi})(a_2\overline{\Phi}-k_3\overline{\Phi})\\
&\quad=k_3\overline{\Phi}(1-\overline{\Phi})\bigg\{d\int_{\mathbb{R}}J_2\bigg(1-\mathrm{e}^{\mu_1(-\varepsilon)y}+\frac{(1-\mathrm{e}^{\mu_1(-\varepsilon)y})^2}{\mathrm{e}^{\mu_1(-\varepsilon)z}+\mathrm{e}^{\mu_1(-\varepsilon)y}}\bigg)dy+\varepsilon\mu_1(-\varepsilon)-r+\frac{a_2r}{k_3}\bigg\}\\
&\quad\leqslant k_3\overline{\Phi}(1-\overline{\Phi})\bigg\{d\int_{\mathbb{R}}J_2\mathrm{e}^{-\mu_1(-\varepsilon)y}dy-d+\varepsilon\mu_1(-\varepsilon)-r+\frac{a_2r}{k_3}\bigg\}\\
&\quad=k_3\overline{\Phi}(1-\overline{\Phi})\bigg[F_2(\mu_1,-\varepsilon)+\frac{a_2r}{k_3}\bigg]\\
&\quad\to k_3\overline{\Phi}(1-\overline{\Phi})\bigg[F_2(\mu_1,0)+\frac{a_2r}{k_3}\bigg]\leqslant 0\quad(\text{当 }\varepsilon\to 0\text{ 时}).
\end{aligned}$$

条件 (4.7) 使得上面最后一个不等式成立. 对于 $z > z_3$, 显然有

$$d\left(\int_{\mathbb{R}} J_2\overline{\Psi}dy - \overline{\Psi}\right) - \overline{c}\overline{\Psi}' + r(1-\overline{\Psi})(a_2\overline{\Phi} - \overline{\Psi}) \leqslant 0.$$

综上可知, $(\overline{\Phi},\overline{\Psi})(z)$ 是 (1.8) 和 (1.9) 的上解. 证毕. □

**定理 4.4** 如果任给系统参数 $d$、$a_1$、$a_2$ 和 $r$ 都成立

$$\begin{aligned}0 &< \frac{-a_1}{F_3(\mu_4,0)}\\ &< \min\left\{\frac{d\int_{-\infty}^{0} J_2(y)[\mathrm{e}^{\mu_4(0)y}+\mathrm{e}^{-\mu_4(0)y}-2]\mathrm{e}^{\mu_4(0)y}dy+d\int_0^{\infty} J_2(y)[\mathrm{e}^{\mu_4(0)y}+\mathrm{e}^{-\mu_4(0)y}-2]dy}{ra_2}, a_1\right\},\end{aligned} \tag{4.8}$$

其中 $F_3(\mu_4,0)$ 和 $\mu_4(0)$ 定义同定理 4.2, 则双稳波速 $c^*$ 为正.

**证明** 定义一对连续函数 $(\underline{\Psi},\underline{\Phi})(z)$ 为

$$\underline{\Psi}(z) = \frac{1}{1+\mathrm{e}^{-\mu_4(\underline{c})z}}, \quad \underline{\Phi}(z) = \begin{cases}0, & z \leqslant z_4,\\ 1-k_4\underline{\Psi}(-z), & z > z_4,\end{cases}$$

其中 $\underline{c} = \varepsilon$, $0 < \varepsilon \ll 1$, $k_4\underline{\Psi}(-z_4) = 1$ 且 $k_4$ 是待定常数. 显然有 $\underline{\Psi}(z) = 1 - \underline{\Psi}(-z)$.

由 (4.8), 可选择 $k_4$ 满足

$$\begin{aligned}&\frac{-a_1}{F_3(\mu_4,0)}\\ &\quad< k_4\\ &\quad< \min\left\{\frac{d\int_{-\infty}^{0} J_2(y)[\mathrm{e}^{\mu_4(0)y}+\mathrm{e}^{-\mu_4(0)y}-2]\mathrm{e}^{\mu_4(0)y}dy+d\int_0^{\infty} J_2(y)[\mathrm{e}^{\mu_4(0)y}+\mathrm{e}^{-\mu_4(0)y}-2]dy}{ra_2}, a_1\right\}.\end{aligned} \tag{4.9}$$

对于 (1.8) 的第二个方程, 有

$$\begin{aligned}&d\left(\int_{\mathbb{R}} J_2\underline{\Psi}dy - \underline{\Psi}\right) - \underline{c}\underline{\Psi}' + r(1-\underline{\Psi})(a_2\underline{\Phi} - \underline{\Psi})\\ &\quad\geqslant \underline{\Psi}(1-\underline{\Psi})^2\left\{d\int_{-\infty}^{0} J_2(y)[\mathrm{e}^{\mu_4(\varepsilon)y} + \mathrm{e}^{-\mu_4(\varepsilon)y} - 2]\mathrm{e}^{\mu_4(\varepsilon)y}dy\right.\\ &\qquad\left.+ d\int_0^{\infty} J_2(y)[\mathrm{e}^{\mu_4(\varepsilon)y} + \mathrm{e}^{-\mu_4(\varepsilon)y} - 2]dy + ra_2\frac{\underline{\Phi}-\underline{\Psi}}{\underline{\Psi}(1-\underline{\Psi})}\right\}\\ &\quad\to \underline{\Psi}(1-\underline{\Psi})^2\left\{d\int_{-\infty}^{0} J_2(y)[\mathrm{e}^{\mu_4(0)y} + \mathrm{e}^{-\mu_4(0)y} - 2]\mathrm{e}^{\mu_4(0)y}dy + d\int_0^{\infty} J_2(y)[\mathrm{e}^{\mu_4(0)y} + \mathrm{e}^{-\mu_4(0)y} - 2]dy\right.\\ &\qquad\left.+ ra_2\frac{\underline{\Phi}-\underline{\Psi}}{\underline{\Psi}(1-\underline{\Psi})}\right\} \quad (\text{当 } \varepsilon \to 0 \text{ 时}).\end{aligned}$$

通过简单的计算, 可得

$$\frac{\underline{\Phi}-\underline{\Psi}}{\underline{\Psi}(1-\underline{\Psi})} = \begin{cases}-\dfrac{1}{1-\underline{\Psi}} \geqslant -k_4, & z \leqslant z_4,\\ \dfrac{1-k_4}{\underline{\Psi}} \geqslant -k_4, & z > z_4.\end{cases}$$

由此及 (4.9), 当 $\varepsilon$ 充分小时, 有

$$d\left(\int_{\mathbb{R}} J_2\underline{\Psi}dy - \underline{\Psi}\right) - \underline{c}\underline{\Psi}' + r(1-\underline{\Psi})(a_2\underline{\Phi} - \underline{\Psi}) \geqslant 0, \quad \text{对于所有的 } z \in (-\infty,\infty).$$

对于 (1.8) 的第一个方程, 当 $z > z_4$ 时, 由 (4.9), 有

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}} J_1\underline{\Phi}dy - \underline{\Phi} - \underline{c}\underline{\Phi}' + \underline{\Phi}(1 - a_1 - \underline{\Phi} + a_1\underline{\Psi}) \\
&\quad \geqslant \int_{\mathbb{R}} J_1(k_4\underline{\Psi} - k_4)dy - (k_4\underline{\Psi} - k_4) - \underline{c}\mu_4 k_4\underline{\Psi}(1 - \underline{\Psi}) + (k_4 - a_1)\underline{\Psi}(1 - \underline{\Psi}) \\
&\quad = k_4\underline{\Psi}(1 - \underline{\Psi})\bigg\{\int_{\mathbb{R}} J_1\bigg[1 - \mathrm{e}^{\mu_4(\varepsilon)y} + \frac{(1 - \mathrm{e}^{\mu_4(\varepsilon)y})^2}{\mathrm{e}^{\mu_4(\varepsilon)z} + \mathrm{e}^{\mu_4(\varepsilon)y}}\bigg]dy - \varepsilon\mu_4(\varepsilon) + 1 - \frac{a_1}{k_4}\bigg\} \\
&\quad \geqslant k_4\underline{\Psi}(1 - \underline{\Psi})\bigg\{1 - \int_{\mathbb{R}} J_1\mathrm{e}^{\mu_4(\varepsilon)y}dy - \varepsilon\mu_4(\varepsilon) + 1 - \frac{a_1}{k_4}\bigg\} \\
&\quad = k_4\underline{\Psi}(1 - \underline{\Psi})\bigg[-F_3(\mu_4(\varepsilon), \varepsilon) - \frac{a_1}{k_4}\bigg] \\
&\quad \to k_4\underline{\Psi}(1 - \underline{\Psi})\bigg[-F_3(\mu_4, 0) - \frac{a_1}{k_4}\bigg] \geqslant 0 \quad (\text{当 } \varepsilon \to 0 \text{ 时}).
\end{aligned}$$

这意味着对于充分小的 $\varepsilon$, 有

$$\int_{\mathbb{R}} J_1\underline{\Phi}dy - \underline{\Phi} - \underline{c}\underline{\Phi}' + \underline{\Phi}(1 - a_1 - \underline{\Phi} + a_1\underline{\Psi}) \geqslant 0.$$

当 $z \leqslant z_4$ 时, 上面的不等式显然成立. 因此, $(\underline{\Phi}, \underline{\Psi})(z)$ 是 (1.8) 和 (1.9) 的下解. 由定理 3.3 可知, 结论成立. □

**定理 4.5** 如果给定的系统参数 $d$、$a_1$、$a_2$ 和 $r$ 使得不等式

$$\frac{F_4(\mu_1, 0)}{ra_2} < \int_{-\infty}^{0} J_1(y)(2 - \mathrm{e}^{\mu_1(0)y} - \mathrm{e}^{-\mu_1(0)y})(\mathrm{e}^{-\mu_1(0)y} + 1)dy \tag{4.10}$$

成立, 其中 $F_4(\mu_1, 0) = d\int_{\mathbb{R}} J_2(y)\mathrm{e}^{\mu_1(0)y}dy - d + r(1 - a_2)$ 且 $\mu_1(0)$ 满足 $\int_{\mathbb{R}} J_1(y)\mathrm{e}^{-\mu_1(0)y}dy - a_1 = 0$, 则双稳波速 $c^*$ 为正.

**证明** 定义一对连续函数 $(\underline{\Phi}, \underline{\Psi})(z)$ 如下:

$$\underline{\Phi}(z) = \frac{k_5}{1 + \mathrm{e}^{-\mu_1(\underline{c})z}}, \quad \underline{\Psi}(z) = \frac{\underline{\Phi}}{k_5},$$

其中 $\underline{c} = \varepsilon$, $0 < \varepsilon \ll 1$ 且 $k_5$ 是待定常数. 由定理 3.3, 只需要证明 $(\underline{\Phi}, \underline{\Psi})(z)$ 是系统 (1.8) 和 (1.9) 的下解即可.

由 (4.10) 可知, $F_4(\mu_1, 0) < 0$ 且可选择 $k_5$ 满足

$$\frac{ra_2 + F_4(\mu_1, 0)}{ra_2} < k_5 < \int_{-\infty}^{0} J_1(y)(2 - \mathrm{e}^{\mu_1(0)y} - \mathrm{e}^{-\mu_1(0)y})(\mathrm{e}^{-\mu_1(0)y} + 1)dy + 1. \tag{4.11}$$

将 $(\underline{\Phi}, \underline{\Psi})(z)$ 代入 (1.8), 则 (1.8) 第一个方程左边为

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}} J_1\underline{\Phi}dy - \underline{\Phi} - \underline{c}\underline{\Phi}' + \underline{\Phi}(1 - a_1 - \underline{\Phi} + a_1\underline{\Psi}) \\
&\quad \geqslant \frac{\underline{\Phi}^2}{k_5}\bigg(1 - \frac{\underline{\Phi}}{k_5}\bigg)\bigg\{\int_{-\infty}^{0} J_1(y)(2 - \mathrm{e}^{\mu_1(\varepsilon)y} - \mathrm{e}^{-\mu_1(\varepsilon)y})\mathrm{e}^{-\mu_1(\varepsilon)y}dy \\
&\qquad + \int_{0}^{\infty} J_1(y)(2 - \mathrm{e}^{\mu_1(\varepsilon)y} - \mathrm{e}^{-\mu_1(\varepsilon)y})dy + \frac{a_1\underline{\Psi} - (1 + \frac{a_1 - 1}{k_5})\underline{\Phi}}{\frac{\underline{\Phi}}{k_5}(1 - \frac{\underline{\Phi}}{k_5})}\bigg\}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{\underline{\Phi}^2}{k_5}\left(1-\frac{\underline{\Phi}}{k_5}\right)\left\{\int_{-\infty}^{0} J_1(y)(2-\mathrm{e}^{\mu_1(\varepsilon)y}-\mathrm{e}^{-\mu_1(\varepsilon)y})(\mathrm{e}^{-\mu_1(\varepsilon)y}+1)dy+\frac{a_1\underline{\Psi}-(1+\frac{a_1-1}{k_5})\underline{\Phi}}{\frac{\underline{\Phi}}{k_5}(1-\frac{\underline{\Phi}}{k_5})}\right\}\\
&\to \frac{\underline{\Phi}^2}{k_5}\left(1-\frac{\underline{\Phi}}{k_5}\right)\left\{\int_{-\infty}^{0} J_1(y)(2-\mathrm{e}^{\mu_1(0)y}-\mathrm{e}^{-\mu_1(0)y})(\mathrm{e}^{-\mu_1(0)y}+1)dy\right.\\
&\quad \left.+\frac{a_1\underline{\Psi}-(1+\frac{a_1-1}{k_5})\underline{\Phi}}{\frac{\underline{\Phi}}{k_5}(1-\frac{\underline{\Phi}}{k_5})}\right\} \quad (\text{当 } \varepsilon\to 0 \text{ 时}).
\end{aligned}
$$

很容易验证

$$
\frac{a_1\underline{\Psi}-(1+\frac{a_1-1}{k_5})\underline{\Phi}}{\frac{\underline{\Phi}}{k_5}(1-\frac{\underline{\Phi}}{k_5})}=\frac{1-k_5}{1-\frac{\underline{\Phi}}{k_5}}\geqslant 1-k_5.
$$

由此及 (4.11), 当 $\varepsilon$ 充分小时, 有

$$
\int_{\mathbb{R}} J_1\underline{\Phi}dy-\underline{\Phi}-\underline{c}\underline{\Phi}'+\underline{\Phi}(1-a_1-\underline{\Phi}+a_1\underline{\Psi})\geqslant 0,\quad \text{对于所有的 } z\in(-\infty,\infty).
$$

系统 (1.8) 第二个方程的左边为

$$
\begin{aligned}
&d\left(\int_{\mathbb{R}} J_2\underline{\Psi}dy-\underline{\Psi}\right)-\underline{c}\underline{\Psi}'+r(1-\underline{\Psi})(a_2\underline{\Phi}-\underline{\Psi})\\
&\geqslant \underline{\Psi}(1-\underline{\Psi})\left\{d-d\int_{\mathbb{R}} J_2\mathrm{e}^{\mu_1(\varepsilon)y}dy-\varepsilon\mu_1(\varepsilon)-r+a_2rk_5\right\}\\
&=\underline{\Psi}(1-\underline{\Psi})(-F_4(\mu_1,\varepsilon)-a_2r+a_2rk_5)\\
&\to \underline{\Psi}(1-\underline{\Psi})(-F_4(\mu_1,0)-a_2r+a_2rk_5)\geqslant 0\quad (\text{当 } \varepsilon\to 0 \text{ 时}).
\end{aligned}
$$

上式最后一个不等式由 (4.11) 得到. 显然, 当 $\varepsilon$ 充分小时, 有

$$
d\left(\int_{\mathbb{R}} J_2\underline{\Psi}dy-\underline{\Psi}\right)-\underline{c}\underline{\Psi}'+r(1-\underline{\Psi})(a_2\underline{\Phi}-\underline{\Psi})\geqslant 0,\quad z\in(-\infty,\infty),
$$

即 $(\underline{\Phi},\underline{\Psi})(z)$ 是 (1.8) 和 (1.9) 的下解. 证毕. □

## 5 结论与讨论

本文主要研究了非局部扩散 Lotka-Volterra 竞争模型的双稳行波波速; 开创了证明双稳波速的唯一性的新思路, 从而使得该结论在比文献 [32] 中的条件更弱的情形 (即只要满足 $(A_1)$ 和 $(A_2)$) 下成立; 首次确立了该模型双稳波速的取值范围和比较原理, 以此为基础, 通过巧妙地构造波方程的上下解, 获得了波速为正的 3 个条件 (即定理 4.2、4.4 和 4.5) 和波速为负的两个条件 (即定理 4.1 和 4.3).

基于本文所得结论, 当给定内核函数 $J_i(x)$ $(i=1,2)$ 的具体形式时, 可以得到确定双稳波速符号 (即双稳行波传播方向) 的显式条件. 从而能够有效分析非局部扩散、出生率和竞争强度对两个物种竞争结果的影响, 通过这些分析结果, 深入了解种群生物学中的物种入侵或材料科学中的相变现象等学科领域的相关问题. 此外, 应该指出的一点是, 本文中作为上下解的测试函数的选择均是构造性的, 不是最佳选择. 也不能根据系统参数 $d$、$r$、$a_1$ 和 $a_2$ 给出波速符号的完整分类, 即确定速度符号的充要条件. 因此, 从生物学或物理学的实际背景或实验现象中获得启发与灵感, 寻找其他类型的新颖上下解, 以改进本文条件, 应该是非常有意义的进一步的研究方向.

## 参考文献


1 Bates P W, Fife P C, Ren X, et al. Traveling waves in a convolution model for phase transitions. Arch Ration Mech Anal, 1997, 138: 105–136
2 Bates P W, Fife P C, Ren X, et al. On some nonlocal evolution equations arising in materials science. In: Nonlinear Dynamics and Evolution Equations. Providence: Amer Math Soc, 2006, 13–52
3 Fife P C. Some nonclassical trends in parabolic and parabolic-like evolutions. In: Trends in Nonlinear Analysis. Berlin-Heidelberg: Springer, 2003, 153–191
4 Ermentrout G B, McLeod J B. Existence and uniqueness of traveling waves for a neural network. Proc Roy Soc Edinburgh Sect A, 1993, 123: 461–478
5 Hetzer G, Nguyen T, Shen W. Coexistence and extinction in the Volterra-Lotka competition model with nonlocal dispersal. Commun Pure Appl Anal, 2012, 11: 1699–1722
6 Hutson V, Martinez S, Mischaikow K, et al. The evolution of dispersal. J Math Biol, 2003, 47: 483–517
7 Jin Y, Zhao X-Q. Spatial dynamics of a periodic population model with dispersal. Nonlinearity, 2009, 22: 1167–1189
8 Rodríguez N. On an integro-differential model for pest control in a heterogeneous environment. J Math Biol, 2015, 70: 1177–1206
9 Sun Y J, Li W T, Wang Z C. Traveling waves for a nonlocal anisotropic dispersal equation with monostable nonlinearity. Nonlinear Anal, 2011, 74: 814–826
10 Yagisita H. Existence and nonexistence of traveling waves for a nonlocal monostable equation. Publ Res Inst Math Sci, 2009, 45: 925–953
11 Yang F Y, Li Y, Li W T, et al. Traveling waves in a nonlocal dispersal Kermack-Mckendrick epidemic model. Discrete Contin Dyn Syst Ser B, 2013, 18: 1969–1993
12 Chasseigne E, Chaves M, Rossi J D. Asymptotic behavior for nonlocal diffusion equations. J Math Pures Appl (9), 2006, 86: 271–291
13 Carr J, Chmaj A. Uniqueness of travelling waves for nonlocal monostable equations. Proc Amer Math Soc, 2004, 132: 2433–2439
14 Hou X, Wang B, Zhang Z. Mutual inclusion in a nonlocal competitive Lotka Volterra system. Jpn J Indust Appl Math, 2014, 31: 87–110
15 Yu Z X, Yuan R. Travelling wave solutions in nonlocal reaction-diffusion systems with delays and applications. ANZIAM J, 2009, 51: 49–66
16 Zhang G B, Ma R, Li X S. Traveling waves of a Lotka-Volterra strong competition system with nonlocal dispersal. Discrete Contin Dyn Syst Ser B, 2018, 23: 587–608
17 Ahmad S, Lazer A C, Tineo A. Traveling waves for a system of equations. Nonlinear Anal, 2008, 68: 3909–3912
18 Gourley S A, Ruan S. Convergence and travelling fronts in functional differential equations with nonlocal terms: A competition model. SIAM J Math Anal, 2003, 35: 806–822
19 Guo J S, Liang X. The minimal speed of traveling fronts for the Lotka-Volterra competition system. J Dynam Differential Equations, 2011, 23: 353–363
20 Li W T, Zhang L, Zhang G B. Invasion entire solutions in a competition system with nonlocal dispersal. Discrete Contin Dyn Syst, 2015, 35: 1531–1560
21 Yu Z X, Xu F, Zhang W G. Stability of invasion traveling waves for a competition system with nonlocal dispersals. Appl Anal, 2017, 96: 1107–1125
22 Zhang L, Li B T. Traveling wave solutions in an integro-differential competition model. Discrete Contin Dyn Syst Ser B, 2012, 17: 417–428
23 Fang J, Zhao X-Q. Traveling waves for monotone semiflows with weak compactness. SIAM J Math Anal, 2014, 46: 3678–3704
24 Lewis M A, Li B, Weinberger H F. Spreading speed and linear determinacy for two-species competition models. J Math Biol, 2002, 45: 219–233
25 Conley C, Gardner R. An application of the generalized Morse index to traveling wave solutions of a competitive reaction-diffusion model. Indiana Univ Math J, 1984, 33: 319–343
26 Gardner R A. Existence and stability of traveling wave solutions of competition models: A degree theoretic approach. J Differential Equations, 1982, 44: 343–364
27 Girardin L, Nadin G. Travelling waves for diffusive and strongly competitive systems: Relative motility and invasion speed. European J Appl Math, 2015, 26: 521–534
28 Huang W. Uniqueness of the bistable traveling wave for mutualist species. J Dynam Differential Equations, 2001, 13: 147–183

29 Huang W, Han M. Non-linear determinacy of minimum wave speed for a Lotka-Volterra competition model. J Differential Equations, 2011, 251: 1549–1561
30 Kan-on Y. Parameter dependence of propagation speed of traveling waves for competition-diffusion equations. SIAM J Math Anal, 1995, 26: 340–363
31 Ma M, Huang Z, Ou C. Speed of the traveling wave for the bistable Lotka-Volterra competition model. Nonlinearity, 2019, 32: 3143–3162
32 Zhang G B, Zhao X-Q. Propagation phenomena for a two-species Lotka-Volterra strong competition system with nonlocal dispersal. Calc Var Partial Differential Equations, 2020, 59: 10
33 Fang J, Zhao X-Q. Bistable traveling waves for monotone semiflows with applications. J Eur Math Soc (JEMS), 2015, 17: 2243–2288

# Bistable wave speed of a Lotka-Volterra system with nonlocal dispersal

Manjun Ma, Yuanxi Yue & Chunhua Ou

**Abstract** This paper is devoted to investigating the speed of traveling wave solutions to a nonlocal dispersal Lotka-Volterra competition model with bistable nonlinearity. Firstly, we establish the value range of the bistable wave speed in terms of spreading speeds of monostable traveling waves in the system. Without any extra requirement on the system parameters, we prove that the bistable wave speed is unique by means of the asymptotic behaviors of the waves near the two stable equilibria. Moreover, comparison principles on wave speeds are established as long as we can find an upper or lower solution with a specific speed. Practically, to find or control the speed sign of the propagation (i.e., the moving direction), we utilize the decay rate of the standing wave (or almost standing wave) to construct test functions so that these functions become upper or lower solutions with the almost zero speed for the given parameter sets. Naturally, this provides an insight to obtain (or control) the propagation direction by adjusting the parameter values, which is biologically significant in the study of wave propagation phenomena.

**Keywords** **speed sign, bistable traveling wave, nonlocal dispersal, Lotka-Volterra model**

**MSC(2020)** **35K57, 35C07, 35B40, 92D25**

**doi: 10.1360/SCM-2020-0457**