

解分数阶 Endolymph 微分方程的一些技巧

尹翠影¹, 刘发旺^{2*}

(1. 厦门大学数学科学学院, 福建 厦门 361005;

2. 澳大利亚昆士兰理工大学数学科学学院, 布里斯本, 昆士兰 4001, 澳大利亚)

摘要: 考虑分数阶 Endolymph 微分方程, 证明了其解的存在性与惟一性. 利用拉普拉斯变换及其逆变换求出了用格林函数表示分数阶 Endolymph 微分方程的解析解. 作者提出一种计算有效的方法, 即预估校正方法, 可求出它的数值解. 最后给出了数值例子来说明这个预估校正方法是模拟分数阶 Endolymph 微分方程解性态的计算有效的方法. 这个数值技巧可以应用于模拟其它分数阶的常微分方程.

关键词: 分数阶 Endolymph 微分方程; 存在性与惟一性; 预估校正法

中图分类号: O 241.82

文献标识码: A

文章编号: 0438-0479(2007)02-0170-05

在医学上, 前庭器官是一个平衡感应器, 它由颞骨远端的骨小管与腔性结构组成, 称之为骨迷路, 在其内是由膜性组织形成的膜迷路, 它是前庭器官的功能部分. 膜迷路主要有耳蜗、三个半规管及两个大的腔: 椭圆囊和球囊组成^[1]. 三个半规管分别是前半规管、后半规管和水平半规管, 它们分布在三个成直角的平面上, 每个半规管的末端都有一膨大部分形成壶腹, 半规管内充满一种粘性液体——内淋巴液, 壶腹内有一与内淋巴液密度一致的胶质性的隔, 称之为壶腹嵴. 当头突然旋转时, 由于内淋巴液的惯性作用, 它的运动将晚于半规管本身的运动, 即半规管随头部运动开始旋转时, 内淋巴液仍是静止的, 这样形成了内淋巴液的相对运动, 这种相对流动持续几秒钟, 其方向与头部旋转方向相反, 数秒钟后这种液体的相对运动激活半规管内的受体, 然后人体(大脑)便收到这种加速度的刺激; 当旋转突然停止时, 发生相反的效应, 即半规管突然停止运动时, 内淋巴液在惯性作用下继续运动, 半规管内的受体从相反的方向上被激活, 随后大脑便接收到这一信息^[1]. 我们主要的工作就是研究这种现象的数学模型并获得这种运动方程的一些解题技巧.

关于半规管内的淋巴液对于角加速度的反应, 比较热门的模型还是 Wilhelm Steinhausen 提出的方程形式:

$$\theta'' + \frac{B}{J}\theta' + \frac{K}{J}\theta = -\alpha(t),$$

这里 θ , θ' 和 θ'' 分别表示内淋巴相对于导管的平均角度转位、平均速度和平均加速度, 系数 J 是惯性项——内淋巴的质量和分布, 阻尼系数 B 记为粘性力对于内淋巴平均角速度的扭矩的比率, K 表示壶腹嵴内液体的稠密性.

在近几年, 在数学模型中利用分数阶的微分和积分算子已相当普遍. 象 De Vries^[2] 假定的那样, 基于半规管的兼具黏着性与伸缩性的本质特性, 因此当内淋巴液做相对运动时会受到胶状层里粘力的阻扰. 所有以前的工作大都忽略了这些力的存在. 我们知道分数阶导数是一个有力的工具来模仿这种带有阻尼物资的系统, 用分数阶导数模型来表示这种阻尼特性在文献[3]已经提到, 但是它只给出了分数阶为 $1/2$ 的情况, 即分数阶 Endolymph 微分方程^[3]:

$$D_t^2 x(t) + aD_t x(t) + bD_t^{1/2} x(t) + cx(t) = -\alpha(t),$$

$$0 < t < T$$

其中 a, b, c 分别表示常数项系数, $-\alpha(t)$ 表示角形加速度, 线性算子 $D_t^{1/2}$ 被定义为:

$$D_t^{1/2} x(t) = \frac{1}{\Gamma(1/2)} \frac{d}{dt} \int_0^t \frac{x(u)}{(t-u)^{1/2}} du$$

方程(1)的精确解在参考文献[3]中已给出. 在这篇文章中, 我们考虑分数阶 Endolymph 微分方程的一般形式:

$$D_t^\beta x(t) + aD_t x(t) + bD_t^\beta x(t) + cx(t) = -\alpha(t),$$

$$0 < t < T$$

及初值条件:

$$x(0) = x_0^{(0)}, x'(0) = x_0^{(1)}$$

这里 D_t^β 是 Riemann-Liouville 的分数阶导数, 且 $0 < \beta < 1$.

定义 (Riemann-Liouville 定义) 的分数阶导

收稿日期: 2006-02-20

基金项目: 国家自然科学基金(10271098), 澳大利亚国家基金(LP0348653)资助

* 通讯作者: fwliu@xmu.edu.cn

数)^[4]:

$${}_a D_t^p f(t) = \begin{cases} \frac{d^n}{dt^n} \frac{1}{\Gamma(n-p)} \int_a^t \frac{f(\tau)}{(t-\tau)^{p-n+1}} d\tau, \\ 0 \leq n-1 < p < n, \\ \frac{d^n f}{dt^n}, p = n \in N \end{cases} \quad (5)$$

类似的 Riemann Liouville 定义的分數阶积分为:

$${}_0 D_t^p f(t) = \frac{1}{\Gamma(p)} \int_0^t (t-\tau)^{p-1} f(\tau) d\tau, p > 0 \quad (6)$$

首先证明分数阶 Endolymph 微分方程的一般形式解的存在性与惟一性, 导出分数阶 Endolymph 微分方程一般形式的解析解, 并提出一种计算有效的方法, 即预估-校正方法, 可求出它的数值解, 最后给出数值例子给以验证.

1 分数阶 Endolymph 微分方程的解析解

为求分数阶 Endolymph 微分方程(3)及初值条件(4)的解析解, 首先要证明它的解的存在性与惟一性. 下面先看两个引理.

引理1 如果 $f(t) \in L_1(0, T)$, 那么方程:

$$y''(t) = f(t) \quad (7)$$

有惟一的解 $y(t) \in L_1(0, T)$, 且满足初值条件:

$$y(0) = y^{(0)}, y'(0) = y^{(1)} \quad (8)$$

对于分数阶 Endolymph 微分方程:

$$D_t^2 x(t) + a D_t^\beta x(t) + b D_t^\beta x(t) + c x(t) = -\alpha(t), \quad 0 < t < T \quad (9)$$

及初值条件:

$$x(0) = x^{(0)}, x'(0) = x^{(1)} \quad (10)$$

这里 a, b, c 是不为零的常数, $-\alpha(t) \in L_1(0, T)$, 即:

$$\int_0^T |-\alpha(t)| dt < \infty.$$

为了简单起见, 以下假设当 $t > T$ 时, $-\alpha(t) \equiv 0$.

定理1 如果 $-\alpha(t) \in L_1(0, T)$, 那么方程(9)有惟一解 $x(t) \in L_1(0, T)$, 且满足初值条件(10).

证明 首先假设方程(1)及初值条件(2)有一个解 $x(t)$, 且可记为:

$$D_t^2 x(t) = \varphi(t) \quad (11)$$

这里:

$$\varphi(t) = -\alpha(t) - a D_t^\beta x(t) - b D_t^\beta x(t) - c x(t).$$

利用引理1可得:

$$x(t) = D_t^{-2} \varphi(t) = \int_0^t (t-\tau) \varphi(\tau) d\tau \quad (12)$$

将方程(11)代入到方程(9)得到

$$\varphi(t) + a D_t (D_t^{-2} \varphi(t)) + b D_t^\beta (D_t^{-2} \varphi(t)) + c D_t^{-2} \varphi(t) = -\alpha(t) \quad (13)$$

因为 $0 < \beta < 1$, 所以式(12)又可以化为:

$$\varphi(t) + a D_t^{-1} \varphi(t) + b D_t^{\beta-2} \varphi(t) + c D_t^{-2} \varphi(t) = -\alpha(t),$$

即:

$$\begin{aligned} & \varphi(t) + a \int_0^t \varphi(\tau) d\tau + \\ & b \frac{1}{\Gamma(2-\beta)} \int_0^t (t-\tau)^{1-\beta} \varphi(\tau) d\tau + \\ & c \int_0^t (t-\tau) \varphi(\tau) d\tau = -\alpha(t). \end{aligned}$$

由此得到函数 $\varphi(t)$ 的第二类 Volterra 积分方程:

$$\varphi(t) + \int_0^t K(t, \tau) \varphi(\tau) d\tau = -\alpha(t) \quad (14)$$

这里:

$$K(t, \tau) = a + b \frac{(t-\tau)^{1-\beta}}{\Gamma(2-\beta)} + c(t-\tau).$$

此时核函数 $K(t, \tau)$ 可以写成弱奇异核函数的形式:

$$K(t, \tau) = \frac{K^*(t, \tau)}{(t-\tau)^{1-\mu}} \quad (15)$$

这里当 $0 \leq t < T, 0 \leq \tau < T, 0 < \beta < 1$ 时, $K^*(t, \tau)$ 是连续的, 且 $\mu = \min\{2, 1-\beta\}$. 显然, $0 < \mu < 1$. 由文献[5]可知, 具有弱奇异核函数(14)及右端项 $-\alpha(t) \in L_1(0, T)$ 的方程(9)及其初值条件(10)有惟一解 $\varphi(t) \in L_1(0, T)$. 因此由引理1可以得到问题(9)及其初值条件(10)有惟一解 $x(t) \in L_1(0, T)$, 同时这解可用公式(11)来决定. 即定理1得证.

分数阶 Endolymph 微分方程(1)的精确解在文献[3]中已经提出, 下面用另一种方法来求分数阶 Endolymph 微分方程的一般形式(3)及初值条件(4)的解析解. 这种方法就是利用常系数四项分数阶微分方程的格林函数^[1]来表示它的解析解, 类似于沈和翔^[6]求解分数阶 Bagley-Torvik 方程的解析解.

对方程(3)进行拉普拉斯变换, 由 $L(D_t^\beta x(t)) = s^\beta \bar{X}(s)$ 得:

$$s^2 \bar{X}(s) + a s \bar{X}(s) + b s^\beta \bar{X}(s) + c \bar{X}(s) = -\bar{\alpha}(s) \quad (16)$$

得:

$$\bar{X}(s) = \frac{-\bar{\alpha}(s)}{s^2 + a s + b s^\beta + c} \quad (17)$$

令 $g^4(s) = \frac{1}{s^2 + a s + b s^\beta + c}$, $g^4(s)$ 又可以被写成如下形式:

$$\begin{aligned} g^4(s) &= \frac{1}{s^2 + a s} \frac{1}{1 + \frac{b s^\beta + c}{s^2 + a s}} = \\ &= \frac{s^{-1}}{s + a} \frac{1}{1 + \frac{b s^{\beta-1} + c s^{-1}}{s + a}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{s^{-1}}{(s+a)^{m+1}} (bs^{\beta-1} + cs^{-1})^m = \\ & \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{s^{-1}}{(s+a)^{m+1}} \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} b^k c^{m-k} s^{\beta k - m} = \\ & \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m c^m \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} \left(\frac{b}{c}\right)^k \frac{s^{\beta k - m - 1}}{(s+a)^{m+1}} \quad (18) \end{aligned}$$

基于拉普拉斯变换的一般展开定理^[7], 逐项求拉普拉斯的逆变换, 可以得到公式(18)的拉普拉斯逆变换:

$$G_4(t) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} (-c)^m \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} \left(\frac{b}{c}\right)^k t^{2(m+1) - \beta k - 1} E_{1, 2, m - \beta k}^{(m)}(-at),$$

这里 $E_{\lambda, \mu}^{(k)}(y)$ 是带有两个参数的 Mittag-Leffler 函数:

$$E_{\lambda, \mu}^{(k)}(y) \equiv \frac{d^k}{dy^k} E_{\lambda, \mu}(y) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(j+k)! y^j}{j! \Gamma(\lambda + \mu + j)}, \quad (k = 0, 1, 2, \dots) \quad (19)$$

因此式(17)的右边可以视为卷积 $G_4(t) * [-\alpha(t)]$ 的拉普拉斯变换, 那么可以得到:

$$\begin{aligned} x(t) &= G_4(t) * [-\alpha(t)] = \\ &= \int_0^t G_4(t-\tau) \alpha(\tau) d\tau \quad (20) \end{aligned}$$

显然式(20)就是分数阶 Endolymph 微分方程的一般形式(3)及初值条件(4)的解析解。

2 分数阶 Endolymph 微分方程的预估-校正方法

分数阶 Endolymph 微分方程一般形式(3)及初值条件(4)的精确解, 数值求解相当困难. 为此, 那么将提出一种有效的求解分数阶 Endolymph 微分方程一般形式(3)~(4)的数值方法: 分数阶预估-校正方法, 以便和上面解出的它的解析解作比较. 分数阶预估-校正法求解一般的多项分数阶微分方程已经提出, 并应用于求解分数阶的控制系统^[8]. 下面将利用这种方法来求解分数阶 Endolymph 微分方程.

把分数阶 Endolymph 微分方程(3)及初值条件(4)化为一般的多项分数阶微分方程形式:

$$\begin{aligned} D^{\beta} x(t) + 0 \cdot D^{\gamma} x(t) + a D^{\alpha} x(t) + b D^{\beta} x(t) + \\ cx(t) = -\alpha(t), \quad 0 < t \leq T \quad (21) \end{aligned}$$

及初值条件:

$$x(0) = x_0^{(0)}, \quad x'(0) = x_0^{(1)} \quad (22)$$

其中 $0 < \beta < 1, 1 < \gamma < 2$.

为了方便把区间 $[0, T]$ M 等分: $t_j = j\tau, j = 0, 1, \dots, N, Nh = T$. 令 $x_1(t) = x(t)$, 可以把方程(26)和初

值条件(27)转化为如下形式的分数阶微分方程组:

$$\begin{cases} {}^0D_t^{\alpha_1} x_1(t) = {}^0D_t^{\beta_1} x_1(t) = x_2(t) \\ {}^0D_t^{\alpha_2} x_2(t) = {}^0D_t^{1-\beta_1} x_2(t) = x_3(t) \\ {}^0D_t^{\alpha_3} x_3(t) = {}^0D_t^{\alpha_1} x_3(t) = x_4(t) \\ {}^0D_t^{\alpha_4} x_1(t) = {}^0D_t^{2-\alpha_1} x_4(t) = -\alpha(t) - \\ \quad cx_1(t) - bx_2(t) - ax_3(t) - 0 \cdot x_4(t) \end{cases} \quad (23)$$

和初值条件:

$$\begin{aligned} x_1(0) &= x_0^{(1)} = x_0^{(0)}, \quad x_2(0) = 0, \quad x_3(0) = x_0^{(1)}, \\ x_4(0) &= 0 \quad (24) \end{aligned}$$

易知分数阶微分方程(3)及初值条件(4)与分数阶微分方程组(23)及初值条件(24)是等价的^[9].

因此, 可直接得到了下面解分数阶微分方程组(23)及初值条件(24)的数值解, 分数阶预估公式:

$$x_{i, k+1}^P = x_0^{(i)} + \frac{1}{\Gamma(\alpha_i)} \sum_{j=0}^k b_{j, k+1}^{\alpha_i} x_{i+1, j}, \quad (i = 1, 2, 3) \quad (25)$$

$$\begin{aligned} x_{4, k+1}^P &= x_0^{(4)} + \frac{1}{\Gamma(\alpha_4)} \sum_{j=0}^k b_{j, k+1}^{\alpha_4} [-\alpha(t_j) - \\ &\quad cx_{1, j} - bx_{2, j} - ax_{3, j} - 0 \cdot x_{4, j}] \quad (26) \end{aligned}$$

分数阶校正公式:

$$\begin{aligned} x_{i, k+1} &= x_0^{(i)} + \frac{1}{\Gamma(\alpha_i)} \left(\sum_{j=0}^k a_{j, k+1}^{\alpha_i} x_{i+1, j} + \right. \\ &\quad \left. a_{k+1, k+1}^{\alpha_i} x_{i+1, k+1}^P \right), \quad (i = 1, 2, 3) \quad (27) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_{4, k+1} &= x_0^{(4)} + \frac{1}{\Gamma(\alpha_4)} \{ \sum_{j=0}^k a_{j, k+1}^{\alpha_4} [-\alpha(t_j) - \\ &\quad cx_{1, j} - bx_{2, j} - ax_{3, j} - 0 \cdot x_{4, j}] + \\ &\quad a_{k+1, k+1}^{\alpha_4} [-\alpha(t_{k+1}) - cx_{1, k+1}^P - b \cdot x_{2, k+1}^P - \\ &\quad a \cdot x_{3, k+1}^P - 0 \cdot x_{4, k+1}^P] \} \quad (28) \end{aligned}$$

这里:

$$b_{j, k+1}^{\alpha_i} = \frac{h^{\alpha_i}}{\alpha_i} \left[(k+1-j)^{\alpha_i} - (k-j)^{\alpha_i} \right] \quad (29)$$

$$\begin{aligned} a_{j, k+1}^{\alpha_i} &= \frac{h^{\alpha_i}}{\alpha_i \left(\alpha_i + 1 \right)} \left\{ \begin{aligned} & k^{\alpha_i+1} - (k-\alpha_i) \left[(k+1)^{\alpha_i} - (k-j)^{\alpha_i+1} \right], \quad j=0 \\ & \left[(k-j+2)^{\alpha_i+1} + (k-j)^{\alpha_i+1} - \right. \\ & \quad \left. 2(k-j+1)^{\alpha_i+1} \right], \quad 1 \leq j \leq k \\ & 1, \quad j = k+1 \end{aligned} \right. \quad (30) \end{aligned}$$

由文献[9], 可得出用分数阶预估-校正方法解分数阶 Endolymph 微分方程的误差阶:

$$\max_{0 \leq j \leq M, 1 \leq i \leq 4} |x_i(t_j) - x_{i, j}| = o(h^q) \quad (31)$$

这里 $q = 1 + \min_{1 \leq i \leq 4} \alpha_i$.

3 数值例子

这节中, 介绍数值例子来说明这些方法的有效性.

考虑下列分数阶 Endolymph 微分方程^[1]:

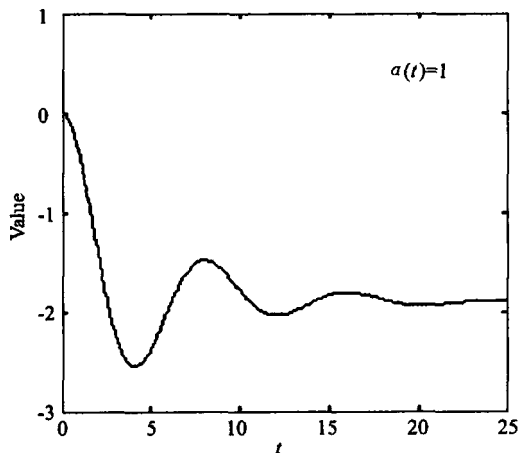


图 1 当 $\beta = \frac{1}{2}$, $\alpha(t) = 1$ 时, 分数阶 Endolymph 微分方程的解析解

Fig. 1 When $\beta = \frac{1}{2}$, $\alpha(t) = 1$, it shows the analytical solution

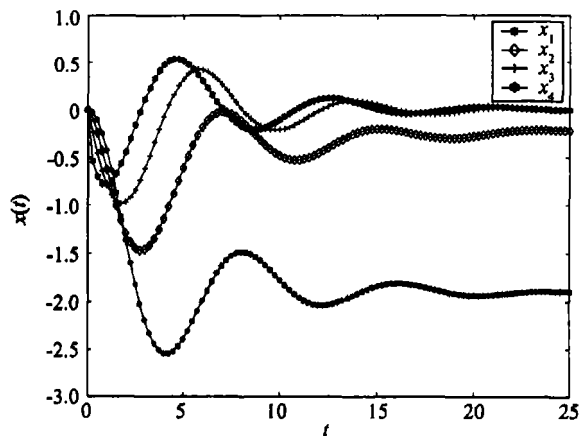


图 2 当 $\beta = \frac{1}{2}$, $\alpha(t) = 1$ 时, 分数阶 Endolymph 微分方程的数值解

Fig. 2 When $\beta = \frac{1}{2}$, $\alpha(t) = 1$, it shows the numerical solution

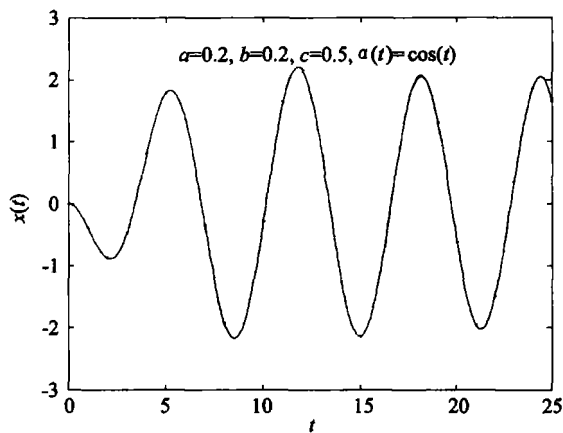


图 3 当 $\beta = \frac{1}{2}$, $\alpha(t) = \cos t$ 时, 分数阶 Endolymph 微分方程的解析解

Fig. 3 when $\beta = \frac{1}{2}$, $\alpha(t) = \cos t$, it shows the analytical solution

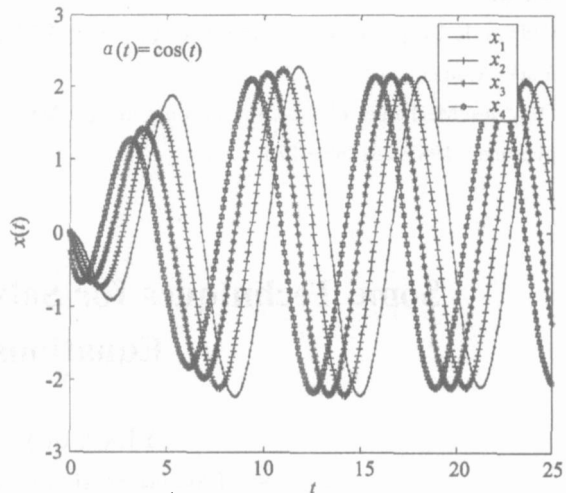


图 4 当 $\beta = \frac{1}{2}$, $\alpha(t) = \cos t$ 时, 分数阶 Endolymph 微分方程的数值解

Fig. 4 When $\beta = \frac{1}{2}$, $\alpha(t) = \cos t$, it shows the numerical solution

$$D_{ix}^2(t) + 0.2D_{ix}(t) + 0.2D_{ix}^{\beta}(t) + 0.5x(t) = -\alpha \quad (32)$$

和初值条件:

$$x(0) = 0, x'(0) = 0 \quad (33)$$

例 1 取 $\beta = \frac{1}{2}$, $\alpha = 1$. 解析解和利用分数阶预估-校正法得到的数值解分别显示在图 1 和图 2 的 x_1 . 从图 1, 2 可以看出, 数值解 x_1 和解析解完全吻合. 图 2 还显示了 $\frac{1}{2}$, 1, $\frac{3}{2}$ 阶导数的性态.

例 2 取 $\beta = \frac{1}{2}$, $\alpha = \cos t$. 解析解和利用分数阶预

估-校正法得到的数值解分别显示在图 3 和图 4 的 x_1 . 从图 3, 4 可以看出, 数值解 x_1 和解析解完全吻合. 图 4 还显示了 $\frac{1}{2}$, 1, $\frac{3}{2}$ 阶导数的性态.

例 3 取 $0 < \beta \leq 1$, $\alpha = 1$. 利用分数阶预估-校正法得到的数值解 x_1 显示在图 5. 从图 5 可以看出, 数值解 x_1 的解性态依赖于分数阶导数 β .

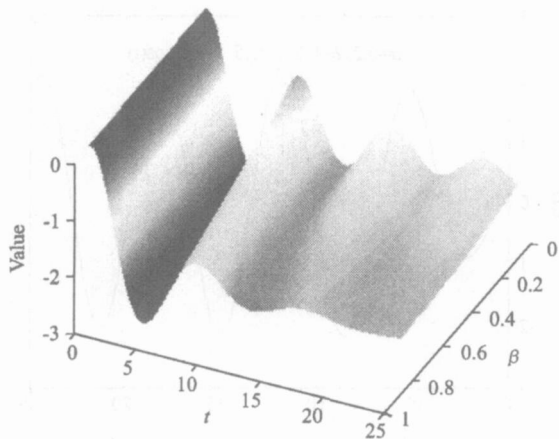


图5 $\alpha(t) = 1$, β 从 0 到 1 变化时, 分数阶 Endolymph 微分方程解的性态

Fig. 5 It shows the solution behaviour of the fractional Endolymph equation

参考文献:

- [1] Oldham K B, Spanier J. The fractional calculus [M]. New York: Academic, 1974.
- [2] De Vries. Mechanics of the Labyrinth organs [J]. Acta Otolaryngol, 1987, 38: 262–273.
- [3] Elshehawey E F, Elbary Afifi N A S, ElShahed M. On the solution of Endolymph equation using fractional calculus [J]. Applied Mathematics and Computation, 2001, 124: 337–341.
- [4] Podlubny I. Fractional differential equations [M]. New York: Academic Press, 1999.
- [5] Rektory K. Handbook of applied mathematics [M]. Vols. I, II. Prague: SNTL, 1988 (in Czech).
- [6] 沈淑君, 刘发旺. 解分数阶 Bagley-Torvik 方程的一种计算有效的数值方法 [J]. 厦门大学学报: 自然科学版, 2004, 43(3): 306–311.
- [7] Doetsch. Anleitung zum praktischen gebrauch der Laplace transformation, oldenbourg [M]. German: Munich, 1956 (Russian translation, Moscow: Fizmatgiz, 1958).
- [8] Luchko Yu, Gorenflo R. An operational method for solving fractional differential equations with the Caputo derivatives [J]. ACTA Math Vietnamica, 1999, 24(2): 207–233.
- [9] Yang C, Liu F. A computationally effective predictor corrector method for simulating fractional order dynamical control system [J]. Anziam J, 2006, 47: 168–184.

Some Techniques for Solving the Fractional Differential Equations of Endolymph

YIN Cui ying¹, LIU Fa wang^{2*}

(1. School of Mathematical Science, Xiamen University, Xiamen 361005, China;

2. School of Mathematical Sciences, Queensland University of Technology,

GPO Box 2434, Brisbane, Qld. 4001, Australia)

Abstract: The fractional differential equations of Endolymph is considered. The existence and uniqueness of solution for the fractional differential equations of Endolymph is proved. Using Laplace and its inverse transformation, the analytical solution of the fractional differential equations of Endolymph is derived by the corresponding Green's function. A computationally effective method, Predictor Corrector method, is proposed for solving the fractional differential equations of Endolymph for its numerical solutions. Finally, we give some numerical examples to show that the Predictor Corrector method provides a computational effective method for simulating the behavior of the solution of the fractional differential equations of Endolymph. This numerical technique can be applied to simulate other fractional ordinary differential equations.

Key words: fractional differential Endolymph equation; existence and uniqueness; predictor corrector method