



圈量子宇宙学的新进展

马永革*

北京师范大学物理学系, 北京 100875

*E-mail: mayg@bnu.edu.cn

收稿日期: 2011-09-07; 接受日期: 2011-10-26; 网络出版日期: 2011-11-25

国家自然科学基金 (批准号: 10975017) 和中央高校基本科研业务费专项资金资助项目

摘要 圈量子宇宙学在国际引力和宇宙学界日益成为一个热门的研究领域. 本文将介绍圈量子引力理论的基本想法及其对称约化模型 - 圈量子宇宙学的基本结构与最新进展. 新进展侧重于圈量子宇宙学的动力学构造及其有效理论的研究.

关键词 圈量子引力, 圈量子宇宙学, 联络, 哈密顿约束

PACS: 04.60.Kz, 04.60.Pp, 98.80.Qc

1 圈量子引力简介

从 20 个世纪初开始, 物理学的两个基本理论 - 量子力学和广义相对论的矛盾性日益突出, 集中表现在经典时空理论 (广义相对论) 与量子物质场理论 (量子场论) 的不自洽性. 与此同时, 广义相对论和量子场论本身也各自存在着奇异性或发散的问题. 人们期待着用某个更基本的量子引力理论来同时解决上述不自洽和发散的问题. 与通常的微扰量子引力中直接将量子场论的方法应用于引力理论的方案不同, 圈量子引力理论试图将广义相对论的原理与量子力学的原理有机地结合起来^[1~4], 其核心思想在于构建一个不依赖于背景 (时空) 的量子引力理论. 将这个物理思想与精确的现代数学理论相结合, 引力理论的联络所对应的和乐 (Holonomy) 在圈量子引力的非微扰量子化方案中扮演了最基本的角色. 粗略地说, 和乐是联络的线积分的指数化. 它所体现的观念在于, 最根本的变量应该是空间点与点之间的关系, 而不是单个的空间点本身. 广义相对论的联络动力

学理论的提出为在引力量子化中采用和乐变量奠定了坚实的理论基础^[5,6], 在该经典理论的哈密顿形式下, 基本的位形变量是 $su(2)$ 联络 A_a^i , 动量变量则是密度化的 3- 标架 E_i^a , 哈氏密度可以表达为第一类约束的线性组合. 这些约束有标量 (哈密顿) 约束、矢量 (微分同胚) 约束和高斯约束.

受狄拉克的约束系统正则量子化方案的启发, 结合代数表示论和泛函分析等有力的数学工具, 研究者们发展出一套 “精致” (Refined) 代数量子化方法, 严格地构建出圈量子引力的运动学希尔伯特空间 $\mathcal{H}_{\text{kin}} = L^2(\overline{\mathcal{A}}, d\mu^0)$. 在一定程度上, 以 A_a^i 的和乐和 E_i^a 在 2 维面上的通量构成的 C^* 代数在 $\mathcal{H}_{\text{kin}}$ 上有唯一的 $SU(2)$ 规范不变且微分同胚不变的表示. 在 $\mathcal{H}_{\text{kin}}$ 上可以完好地定义面积^[7]、体积^[8]、长度^[9,10]、度规分量^[11]等几何算符, 一个重要的物理结果是这些几何算符具有离散的本征值. 在量子层次上, 可以得到高斯约束和微分同胚约束的解, 即得到 $SU(2)$ 规范和微分同胚不变的希尔伯特空间 $\mathcal{H}_{\text{Diff}}$. 作为一个全约束系统, 广义相对论的动力学体现在哈密顿约束中. 在 $\mathcal{H}_{\text{kin}}$ 上

引用格式: 马永革. 圈量子宇宙学的新进展. 中国科学: 物理学 力学 天文学, 2011, 41: 1409–1413

Ma Y G. Recent advances in loop quantum cosmology (in Chinese). Sci Sin Phys Mech Astron, 2010, 41: 1409–1413, doi: 10.1360/132011-975

可以构造定义完好的哈密顿约束算符. 尽管该哈密顿约束算符难以直接定义在 $\mathcal{H}_{\text{Diff}}$ 上, 可以用定义主 (Master) 约束算符的方法^[12,13], 在 $\mathcal{H}_{\text{Diff}}$ 中获得物理态. 综上所述, 圈量子引力的正则理论已取得了前所未有的成就.

2 圈量子宇宙学的基本结构

作为圈量子引力论的对称约化模型, 圈量子宇宙学考虑的是均匀 (且各向同性) 的宇宙学模型, 因而是有限自由度的量子力学系统. 其不同于一般量子宇宙学的特点在于它继承了圈量子引力的核心观念, 即将和乐而不是联络本身作为最基本的变量^[14]. 因此, 作为一种简化模型, 圈量子宇宙学是实践和检验圈量子引力的想法和技术的理想平台^[15].

我们以空间平坦的 Friedmann-Robertson-Walker 宇宙为例, 来介绍圈量子宇宙学的基本结构. 此模型的空间流形为 $\mathbb{R}^3$, 等度规群为 3 维欧几里德群. 由于宇宙的空间是无限的, 我们需要引入一个基本元胞 $\mathcal{V}$ 来代替空间, 并将计算中的所有的积分都限制在 $\mathcal{V}$ 上. 指定一个基准的平坦的空间 3 度规 ${}^o q_{ab}$, $\mathcal{V}$ 在此度规下的体积记为 V_o . 通过对称约化, 引力的相空间的基本变量可以表示为^[16]

$$A_a^i = c V_o^{-(1/3)} {}^o \omega_a^i, \quad E_i^a = p V_o^{-(2/3)} \sqrt{{}^o q} {}^o e_i^a, \quad (1)$$

其中, $({}^o \omega_a^i, {}^o e_i^a)$ 分别是与 ${}^o q_{ab}$ 一致的对偶标架和 3 标架, 并且与 $\mathcal{V}$ 相适配. 可见此模型的动力学变量为 (c, p) , 其中 p 与尺度因子 a 的关系为: $|p| = V_o^{2/3} a^2$. 基本正则变量之间的泊松括号是: $\{c, p\} = \kappa \gamma / 3$, 其中 $\kappa = 8\pi G$. 高斯约束和微分同胚约束都在对称约化中被解掉, 纯引力的哈密顿约束为

$$C_{\text{grav}} = -6c^2 \sqrt{|p|} / \gamma^2, \quad (2)$$

其中 γ 称为 Barbero-Immirzi 参数.

模仿圈量子引力的非微扰量子化过程, 可以得到圈量子宇宙学的运动学希尔伯特空间 $\mathcal{H}_{\text{kin}}^{\text{grav}} = L^2(\mathbb{R}_{\text{Bohr}}, d\mu_{\text{Bohr}})$, 其中 $\mathbb{R}_{\text{Bohr}}$ 是实数轴的 Bohr 紧化, $d\mu_{\text{Bohr}}$ 是 $\mathbb{R}_{\text{Bohr}}$ 上的 Haar 测度. 正如圈量子引力那样, 在 $\mathcal{H}_{\text{kin}}^{\text{grav}}$ 上无法定义对应于联络 c 的算符, 但可以定义它的和乐算符. 显然, 上述希尔伯特空间给出的表

示不同于通常的薛定谔表示, 被称为 Polymer-like 表示. 圈量子宇宙学之所以采用 Polymer-like 表示, 就是为了继承圈量子引力的核心观念, 即将和乐而不是联络本身作为最基本的变量. 为了构造哈密顿约束算符的方便, 我们引入一对新的共轭变量^[17,18]:

$$b := \frac{\sqrt{\Delta}}{2} \frac{c}{\sqrt{|p|}}, \quad v := \frac{4}{3\sqrt{\Delta}} \text{sgn}(p) |p|^{\frac{3}{2}},$$

其中 $\Delta (\sim 4\sqrt{3}\pi\gamma l_p^2)$ 是圈量子引力中面积算符的最小本征值^[19]. $\hat{v}$ 的本征态构成了 $\mathcal{H}_{\text{kin}}^{\text{grav}}$ 的正交归一基底: $\langle v_1 | v_2 \rangle = \delta_{v_1, v_2}$. 基本算符对该基矢的作用为

$$\hat{v} |v\rangle = (8\pi\gamma l_p^2 / 3) v |v\rangle, \quad \widehat{e^{ib}} |v\rangle = |v+1\rangle. \quad (3)$$

Ashtekar, Pawłowski, Singh 于 2006 年在圈量子宇宙学的性质下给出了很好的哈密顿约束算符^[20,21], 其纯引力部分的作用形式为

$$\hat{C}_{\text{grav}} |v\rangle = f_+(v) |v+4\rangle + f_o(v) |v\rangle + f_-(v) |v-4\rangle. \quad (4)$$

依据用动力学物质场作为内部时间的设想, 可以引入一个无质量的标量场 ϕ 与引力相耦合. 此标量场的哈密顿密度为 $C_\phi = |p|^{-\frac{3}{2}} p_\phi^2 / 2$, 其中 p_ϕ 代表 ϕ 的共轭动量.

我们认为, 作为圈量子引力的检验模型, 圈量子宇宙学的动力学构造应该尽可能地体现完整圈量子引力理论的特点. 在完整理论中的哈密顿约束含有欧几里德和洛仑兹两项, 两项在量子化处理中并不尽相同. 但在空间平坦的均匀模型中, 两项成正比, 因此 APS 将两项看成一项进行量子化. 很显然, 这种对称条件放进去的越晚越好. 于是, 我们于 2009 年在圈量子宇宙学框架下构造了欧几里德项和洛仑兹项分别处理的完整哈密顿约束算符^[22], 其作用形式为

$$\begin{aligned} \hat{H}_{\text{grav}}^F |v\rangle = & F'_+(v) |v+8\rangle + f'_+(v) |v+4\rangle + (F'_o(v) + f'_o(v)) |v\rangle \\ & + f'_-(v) |v-4\rangle + F'_-(v) |v-8\rangle. \end{aligned} \quad (5)$$

与 APS 哈密顿约束算符比较, 我们建议新哈密顿约束算符含有更多的项, 且作用的差分方程的步长也不同. 这是一个继承了更多圈量子引力特征的更为有趣的哈密顿约束算符.

3 圈量子宇宙学的有效理论

在尺度不是很小 (非高能) 的情况下, 有效理论是研究物理问题的有力工具. 通过用相干态作半经典分析^[18,23], 我们得到了哈密顿约束算符 (5) 对应的包含标量场的有效哈密顿约束^[22]:

$$\mathcal{H}_{\text{eff}}^F = -\frac{3^2 \sqrt{6}}{2^3} \frac{\hbar^{1/2}}{\gamma^{3/2} \kappa^{1/2}} L |v| \times \left(\sin^2(2b) (1 - (1 + \gamma^2) \sin^2(2b)) + 2\varepsilon^2 \right) + \left(\frac{\kappa \gamma \hbar}{6} \right)^{3/2} \frac{|v|}{L} \rho \left(1 + \frac{1}{2|v|^2 \varepsilon^2} + \frac{\hbar^2}{2\sigma^2 p_\phi^2} \right), \quad (6)$$

其中, $\rho = \frac{1}{2} \left(\frac{6}{\kappa \gamma \hbar} \right)^3 \left(\frac{L}{|v|} \right)^2 p_\phi^2$ 是物质场的能量密度, 修正项中的 $\varepsilon^2, 1/v^2 \varepsilon^2, \hbar^2/\sigma^2 p_\phi^2$ 来自于量子涨落. 易见, 当量子修正可忽略时, 有效哈密顿约束 (6) 可回到经典哈密顿约束. 因此, 量子哈密顿约束 (5) 有正确的经典极限. 利用 $\mathcal{H}_{\text{eff}}^F$ 可以导出修改了的有效 Friedmann 方程:

$$H_F^2 = \left(\frac{\dot{v}}{3v} \right)^2 = \frac{\kappa}{3} \frac{\rho_c}{4(1 + \gamma^2)^2} \left(1 - \sqrt{1 - \chi_F} \right) \times \left(1 + 2\gamma^2 + \sqrt{1 - \chi_F} \right) (1 - \chi_F), \quad (7)$$

其中

$$\chi_F = 4(1 + \gamma^2) \left(\frac{\rho}{\rho_c} \left(1 + \frac{1}{2|v|^2 \varepsilon^2} + \frac{\hbar^2}{2\sigma^2 p_\phi^2} \right) - 2\varepsilon^2 \right). \quad (8)$$

由方程 (7) 易见, 在只考虑一阶量子修正的有效理论描述中, 当标量场的能量密度达到临界密度 $\rho_c^F = \rho_c/4(1 + \gamma^2)$ 时, 一个塌缩的 FRW 宇宙将经过反弹, 变成膨胀的宇宙, 从而克服了宇宙大爆炸的奇异性. 由有效 Friedmann 方程 (7) 给出的反弹点附近的宇宙演化见图 1. 该效应已被圈量子宇宙学的哈密顿约束差分方程的数值模拟所证实^[21], 使人们清楚地看到, 圈量子宇宙学是怎样避免了宇宙大爆炸的奇异性. 不仅如此, 在考虑高阶量子修正时, 方程 (8) 中的 ε^2 项前面的负号有可能会与一阶有效理论在定性上不同的描述. 引力的量子涨落 (半经典态高斯波包的宽度) ε 的具体演化形式在此起着关键作用. 一种自然且简单的假设是^[18]: $\varepsilon = \lambda(r)v^{-r(\phi)}$, 其中 $0 \leq r(\phi) \leq 1$, 参数 $\lambda(r)$ 可以随 r 而改变. 对于 $r=0$ 的情况, 除了物质场密度 ρ 增大到普朗克密度时的量子反弹之外, 当

ρ 减小到 $\rho_{\text{coll}}^F \approx 2\varepsilon^2 \rho_c$ 时, 膨胀的宇宙将经历一个塌缩点而收缩回来, 从而形成一个循环的宇宙^[24]. 由有效 Friedmann 方程 (7) 给出的循环宇宙见图 2.

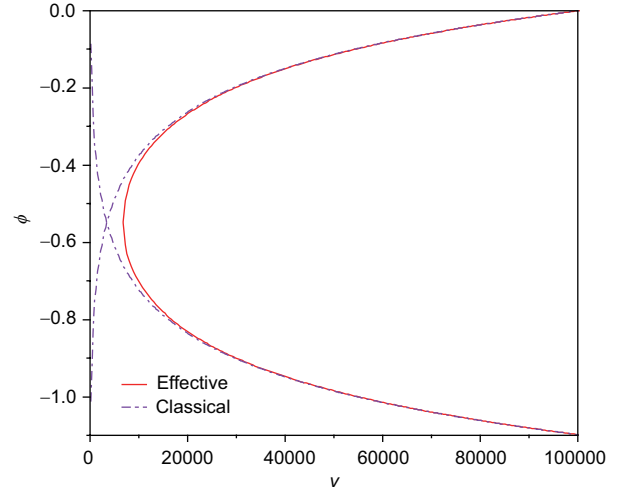


图 1 (网络版彩图) 由可观测量 $v|_\phi$ 所代表的宇宙有效动力学与经典演化轨迹的对比

其中的参数取为: $G = \hbar = 1$, $p_\phi = 10000$, $\varepsilon = 0.001$, $\sigma = 0.01$, 初值取为: $v_o = 100000$

Figure 1 (Color online) The effective dynamics represented by the observable $v|_\phi$ are compared to classical trajectories. In this simulation, the parameters were: $G = \hbar = 1$, $p_\phi = 10000$, $\varepsilon = 0.001$, $\sigma = 0.01$ with initial data $v_o = 100000$.

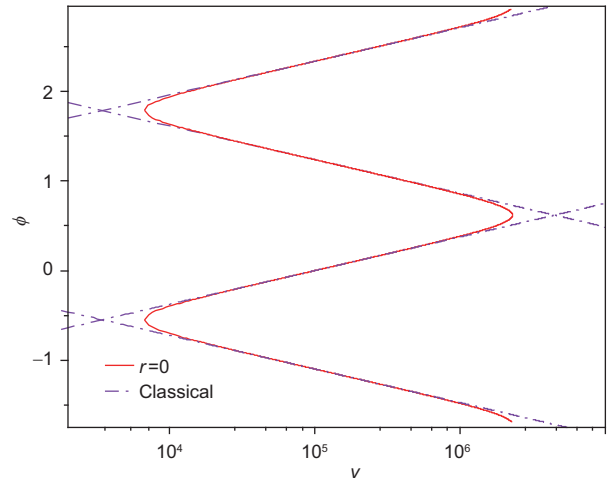


图 2 (网络版彩图) 有效理论的循环宇宙与经典膨胀和收缩宇宙的对比

其中的参数取为: $G = \hbar = 1$, $p_\phi = 10000$, $\varepsilon = 0.001$, $\sigma = 0.01$, 初值取为: $v_o = 100000$

Figure 2 (Color online) The cyclic model is compared with expanding and contracting classical trajectories. In this simulation, the parameters were: $G = \hbar = 1$, $p_\phi = 10000$, $\varepsilon = 0.001$, $\sigma = 0.01$ with initial data $v_o = 100000$.

从方程 (8) 和 (7) 不难看出, 只要引力量子涨落的参数在大尺度极限下满足 $0 \leq r < 1$, 空间平坦的膨胀的 FRW 宇宙就会在未来的某个时刻塌缩回来, 形成一个循环的宇宙. 从参数 r 的取值范围来看, 这种可能性是极其巨大的.

4 圈量子宇宙学的其他进展

除了量子动力学、有效理论的研究和大爆炸奇异性的克服^[18,21,25~27], 圈量子宇宙学的研究在其他方面也有很多进展. 其中令人瞩目的进展之一是能较自然地给出宇宙早期的暴涨^[28,29]. 这是因为, 圈量子宇宙学对 Friedmann 方程的修正导致在量子反弹之后有一个超暴涨 (Super-inflation) 过程, 对于暴涨子 (标

量场) 的相当一大类势函数, 超暴涨都能使暴涨子达到充分暴涨所需要的初始条件. 事实上, 圈量子宇宙学的有效理论为探索宇宙的量子引力现象学提供了很好的素材^[15,19], 由修改 Friedmann 方程所体现的量子宇宙学效应将有可能在对早期宇宙现象的观测中有所表现. 另一方面, 圈量子宇宙学的路径积分形式的研究近年来也逐渐活跃起来^[30,31]. 在某种情况下, 圈量子宇宙学的路径积分的顶角展开是收敛的^[32], 已得到的一些结果明显支持圈量子引力的路径积分形式 - 自旋泡沫模型的算法^[33]. 而且, 正则圈量子宇宙学的有效哈密顿约束还可以在其路径积分的计算中得到印证^[34]. 总之, 作为实践和检验圈量子引力的想法和技术的理想平台, 圈量子宇宙学的研究在理论和实践中正在发挥日益重要的作用.

致谢 感谢 ASHTEKAR Abhay, BOJOWALD Martin, 丁优、邓果、黄海云、秦立、阳劲松等同行的有益讨论与合作.

参考文献

- 1 Rovelli, C. Quantum Gravity. Cambridge: Cambridge University Press, 2004
- 2 Thiemann T. Modern Canonical Quantum General Relativity. Cambridge: Cambridge University Press, 2007
- 3 Ashtekar A, Lewandowski J. Background independent quantum gravity: A status report. Class Quantum Grav, 2004, 21: R53–R152
- 4 Han M, Ma Y, Huang W. Fundamental structure of loop quantum gravity. Int J Mod Phys D, 2007, 16: 1397–1474
- 5 Ashtekar A. New variables for classical and quantum gravity. Phys Rev Lett, 1986, 57: 2244–2247
- 6 Barbero J. Real Ashtekar variables for Lorentzian signature space-times. Phys Rev D, 1995, 51: 5507–5510
- 7 Rovelli C, Smolin L. Discreteness of area and volume in quantum gravity. Nucl Phys B, 1995, 442: 593–619
- 8 Ashtekar A, Lewandowski J. Quantum theory of geometry II: Volume operators. Adv Theor Math Phys, 1998, 1: 388–429
- 9 Thiemann T. A length operator for canonical quantum gravity. J Math Phys, 1998, 39: 3372–3392
- 10 Ma Y, Soo C, Yang J. New length operator for loop quantum gravity. Phys Rev D, 2010, 81: 124026
- 11 Ma Y, Ling Y. $\hat{Q}$ operator for canonical quantum gravity. Phys Rev D, 2000, 62: 104021
- 12 Thiemann T. The phoenix project: Master constraint programme for loop quantum gravity. Class Quantum Grav, 2006, 23: 2211–2247
- 13 Han M, Ma Y. Master constraint operator in loop quantum gravity. Phys Lett B, 2006, 635: 225–231
- 14 Bojowald M. Loop quantum cosmology I: Kinematics. Class Quantum Grav, 2000, 17: 1489–1508
- 15 Bojowald M. Loop quantum cosmology. Living Rev Relat, 2005, 8: 11–141
- 16 Ashtekar A, Bojowald M, Lewandowski J. Mathematical structure of loop quantum cosmology. Adv Theor Math Phys, 2003, 7: 233–268
- 17 Ashtekar A, Corichi A, Singh P. Robustness of key features of loop quantum cosmology. Phys Rev D, 2008, 77: 024046
- 18 Ding Y, Ma Y, Yang J. Effective scenario of loop quantum cosmology. Phys Rev Lett, 2009, 102: 051301
- 19 Ashtekar A. Loop quantum cosmology: An overview. Gen Relat Grav, 2009, 41: 707–741
- 20 Ashtekar A, Powlowski T, Singh P. Quantum nature of the big bang. Phys Rev Lett, 2006, 96: 141301
- 21 Ashtekar A, Powlowski T, Singh P. Quantum nature of the big bang: Improved dynamics. Phys Rev D, 2006, 74: 084003
- 22 Yang J, Ding Y, Ma Y. Alternative quantization of the Hamiltonian in loop quantum cosmology. Phys Lett B, 2009, 682: 1–7
- 23 Ashtekar A, Fairhurst S, Willis J. Quantum gravity, shadow states, and quantum mechanics. Class Quantum Grav, 2003, 20: 1031–1061
- 24 Ma Y. Cyclic universe driven by loop quantum cosmology. J Cosmology, 2011, 13: 4074–4079
- 25 Bojowald M. Absence of singularity in loop quantum cosmology. Phys Rev Lett, 2001, 86: 5227–5230
- 26 Bojowald M. How quantum is the big bang. Phys Rev Lett, 2008, 100: 221301
- 27 Corichi A, Singh P. Quantum bounce and cosmic recall. Phys Rev Lett, 2008, 100: 161302

- 28 Bojowald M. Inflation from quantum geometry. *Phys Rev Lett*, 2002, 89: 261301
- 29 Ashtekar A, Sloan D. Loop quantum cosmology and slow roll inflation. *Phys Lett B*, 2010, 694: 108–112
- 30 Ashtekar A, Campiglia M, Henderson A. Loop quantum cosmology and spin foams. *Phys Lett B*, 2009, 681: 347–352
- 31 Ashtekar A, Campiglia M, Henderson A. Casting loop quantum cosmology in the spin foam paradigm. *Class Quantum Grav*, 2010, 27: 135020
- 32 Henderson A, Rovelli C, Vidotto F, et al. Local spinfoam expansion in loop quantum cosmology. *Class Quantum Grav*, 2011, 28: 025003
- 33 Ashtekar A, Campiglia M, Henderson A. Path integrals and the WKB approximation in loop quantum cosmology. *Phys Rev D*, 2010, 82: 124043
- 34 Huang H, Ma Y, Qin L. Path integral and effective Hamiltonian in loop quantum cosmology. *arXiv*: 1102.4755

Recent advances in loop quantum cosmology

MA YongGe*

Department of Physics, Beijing Normal University, Beijing 100875, China

Loop quantum cosmology has become a rather hot topic recently in the fields of gravity and cosmology. In this paper, we will review the basic ideas of loop quantum gravity and the fundamental structure of its symmetry-reduced models known as loop quantum cosmology, as well as the recent advances of loop quantum cosmology. We will mainly focus on the progress in the quantum dynamics and effective theory.

loop quantum gravity, loop quantum cosmology, connection, Hamiltonian constraint

PACS: 04.60.Kz, 04.60.Pp, 98.80.Qc

doi: 10.1360/132011-975