

低阶矩条件下线性回归 最小二乘估计弱相合的充要条件*

陈希孺

(中国科学技术大学研究生院, 北京 100039)

摘要 考虑线性回归模型 $Y_i = x_i' \beta + e_i$, $1 \leq i \leq n$, $n \geq 1$. 假定误差 e_i 独立, 同分布或不同分布, 其 r ($1 \leq r < 2$) 阶矩有限. 得出了为使 β 或其一线性函数 $c' \beta$ 的最小二乘估计为弱相合, $\{x_i\}$ 所应满足的充要条件.

关键词 线性回归模型 最小二乘估计 弱相合性 r 阶平均相合性

考虑线性回归模型

$$Y_i = x_i' \beta + e_i, \quad 1 \leq i \leq n, \quad n \geq 1, \quad (0.1)$$

这里 $x_1, x_2, \dots$ 是已知的 p 维向量, $e_1, e_2, \dots$ 是随机误差, $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_p)'$ 是未知的参数向量.

记 $S_n = \sum_{i=1}^n x_i x_i'$. 设 n 足够大时 S_n^{-1} 存在. 令 $Y_{(n)} = (Y_1, \dots, Y_n)'$, $e_{(n)} = (e_1, \dots, e_n)'$, 及

$$U_n = S_n^{-1} \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ \vdots \\ x_n' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{n11} & u_{n12} & \cdots & u_{n1n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ u_{np1} & u_{np2} & \cdots & u_{npn} \end{pmatrix}, \quad (0.2)$$

则 β 的最小二乘 (LS) 估计为

$$\hat{\beta}_n = (\hat{\beta}_{n1}, \dots, \hat{\beta}_{np})' = U_n Y_{(n)} = \beta + U_n e_{(n)}. \quad (0.3)$$

故 $\hat{\beta}_n$ 在指定意义下的相合性, 等价于 $U_n e_{(n)}$ 在该意义下收敛于 0. 例如, $\hat{\beta}_{nj}$ 的弱相合性等价于

$$\sum_{i=1}^n u_{nji} e_i \xrightarrow{P} 0. \quad (0.4)$$

自 60 年代以来, LS 估计的相合性问题引起了许多学者的兴趣, 到 70 年代末完满地解决了误差 e_i 有二阶矩的情况^[1~3]. 此后注意力转向于误差 e_i 只有较低阶矩时的情况, 这种研究有重要意义. 因为均值回归的定义只要求误差有一阶矩, 且 LS 估计作为线性估计, 从其形式和统计背景看, 其相合性问题应视为大数律的延伸, 不应只局限在二阶矩有限的假定下去处理. 同时, 通过研究 LS 估计在误差只有低阶矩时的表现, 可以揭示这一极重要方法的一些前所未有的性质.

部分地由于二阶矩有限时的结果的影响, 早先关于低阶矩条件下 LS 估计相合性的工

作,多把注意力集中在相合性与 S_n^{-1} 收敛于 0 的速度的关系上^[4~6]. 结果表明,循着这一途径只能获得一些充分条件,它们表面上看改进余地不大,其实与必要条件相去甚远(参见本文定理 3). 到 1989 年,朱力行^[7]在这方面做出了本质的推进,他考虑了在误差 $e=(e_1, e_2, \dots)$ 的分布属于类

$$\mathcal{F}_r' = \left\{ (F_1 \times F_2 \times \dots) : \int_{|x|<\infty} x dF_i = 0, \lim_{a \rightarrow \infty} \left[\sup_{|x|>a} \int_{|x|>a} |x|^r dF_i \right] = 0 \right\} \quad (0.5)$$

($1 \leq r < 2$) 的情况下 $\hat{\beta}_n$ 的一个分量 $\hat{\beta}_{nj}$ 的相合问题,得到了 $\hat{\beta}_{nj}$ r 阶平均相合的充要条件. 这是在低阶矩条件下首次在一种相合意义下得到充要条件,是值得一提的.

在往下讨论之前要明确一下此处及本文以下所指的“充要条件”的含义. 记 $x=(x_1, x_2, \dots)$, $\mathcal{S}=(\mathbb{R}^r)^\infty$. 设给定了误差 $e=(e_1, e_2, \dots)$ 的一个分布类 $\mathcal{F}$, 例如 (0.5), 及某种相合性意义 C (例如弱相合 W , r 阶平均相合 M_r , 强相合 S), 则有两种可以考虑的“充要条件”含义:

1° 称条件 A 为 $\hat{\beta}_{nj}$ C 相合的充要条件,若当 x 满足条件 A 时,只要 e 的分布属于 $\mathcal{F}$, 就有 $\hat{\beta}_{nj}$ 按意义 C 收敛于 β_j . 反之,若 x 不满足条件 A , 则这一断言不真: 即至少存在一个分布 $F \in \mathcal{F}$, 使当 e 有分布 F 时, $\hat{\beta}_{nj}$ 不依意义 C 收敛于 β_j . 暂把这种充要条件称为 I 型的.

2° 称条件 A 为 $\hat{\beta}_{nj}$ C 相合的充要条件,若 x 满足条件 A , 则与 1° 同. 反之,若 x 不满足条件 A , 则不论 e 的分布是 $\mathcal{F}$ 中的那一个, $\hat{\beta}_{nj}$ 都不按意义 C 收敛于 β_j . 把这种充要条件称为 II 型的.

显然, II 型充要条件优于 I 型. 可惜的是, II 型条件往往不存在, 而 I 型条件则总是存在的, 这容易从以下的推理中看出, 固定 $F \in \mathcal{F}$, 它相应于 $\mathcal{S}$ 的一子集 $A_j(F, C)$: 若误差 e 有分布 F , 则当且仅当 $x \in A_j(F, C)$ 时 $\hat{\beta}_{nj}$ 依意义 C 收敛于 β_j . 记 $\underline{A}_j(\mathcal{F}, C) = \bigcap_{F \in \mathcal{F}} A_j(F, C)$, $\overline{A}_j(\mathcal{F}, C) = \bigcup_{F \in \mathcal{F}} A_j(F, C)$. 显然, $\{x \in \underline{A}_j(\mathcal{F}, C)\}$ 是 $\hat{\beta}_{nj}$ C 相合的 I 型充要条件. 但当且仅当 $\underline{A}_j(\mathcal{F}, C) = \overline{A}_j(\mathcal{F}, C)$ 时, II 型充要条件才存在, 与 I 型条件同. 这等于要求 $A_j(F, C)$ 与 F 无关, 因而更多地出于例外而非常有. 以下将指出, 对误差只有低于二阶矩的情形, II 型充要条件不存在. 这实在是 LS 估计表现的一个特异性质. 因如所周知, 当误差有二阶矩时, II 型充要条件是存在的.

文献[7]也致力于解决在误差分布类 $\mathcal{F}_r'$ 之下 LS 估计弱相合的条件问题, 得到了比前人工作有改进的充分条件和必要条件, 但未能得出充要条件, 还有一点: 它没有研究从统计的观点看最有兴趣的 i. i. d. 情形, 即误差 e 有分布类

$$\mathcal{F}_r = \left\{ (F \times F \times \dots) : \int_{|x|<\infty} x dF = 0, \int_{|x|<\infty} |x|^r dF < \infty \right\} \quad (0.6)$$

的情形. 固然, 由于 $\mathcal{F}_r \subset \mathcal{F}_r'$, 对 $\mathcal{F}_r'$ 定出的充要条件对 $\mathcal{F}_r$ 仍为充分, 但不一定必要. 事实的确如此.

1 主要结果

先引进一些记号. 以下总把 u_{nji} 简化为 u_{ni} . 将 $|u_{n1}|, \dots, |u_{nn}|$ 排序为 $u_{n(1)} \geq \dots \geq u_{n(n)}$. 记 $W_r(n) = \max_{1 \leq i \leq n} i u_{n(i)}^r$, $V(n, j) = \sum_{i=1}^n u_{ni} I(|u_{ni}| \geq u_{n(j)})$, I 为指示函数, $V(n) = \max_{1 \leq j \leq n} |V(n, j)|$.

定理 1 设模型 (0.1) 中误差分布类为 $\mathcal{F}_r$, 若 $1 < r < 2$, 则 $\hat{\beta}_{nj}$ 弱相合的充要条件 (I 型, 下同) 为

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n^{-1}(j) = 0 \quad (1.1)$$

和

$$W_r(n) = O(1) \quad (1.2)$$

同时成立, 若 $r=1$, 则充要条件为 (1.1) 式及

$$W_1(n) = O(1) \quad (1.3)$$

和

$$V(n) = O(1) \quad (1.4)$$

同时成立, II 型充要条件不存在.

定理 2 设模型 (0.1) 中误差分布类为 $\mathcal{F}_r$, $1 \leq r < 2$, 则 $\hat{\beta}_{nj}$ 弱相合的充要条件为 (1.1) 式及

$$\sum_{i=1}^n |u_{ni}|^r = O(1) \quad (1.5)$$

同时成立, II 型充要条件不存在.

II 型充要条件的不存在容易证明, 取分布类

$$\mathcal{F}_2 = \left\{ (F \times F \times \cdots): \int_{|x| < \infty} x dF = 0, 0 < \int_{|x| < \infty} x^2 dF < \infty \right\}. \quad (1.6)$$

则 $\mathcal{F}_2 \subset \mathcal{F}_r$, $1 \leq r < 2$, 据文献[2], 有 $\underline{A}_j(\mathcal{F}_2, W) = \overline{A}_j(\mathcal{F}_2, W) = \{(1.1) \text{ 式} \}$ (W 表弱相合). 由此并结合定理 1, 2, 即知

$$\overline{A}_j(\mathcal{F}_r, W) = \overline{A}_j(\mathcal{F}_r', W) = \{(1.1) \text{ 式} \}, 1 \leq r < 2.$$

但由 (1.1) 式推不出 (1.2) 或 (1.3) ~ (1.5) 式 (见注 1), 故 $\underline{A}_j(\mathcal{F}_r, W)$ 和 $\underline{A}_j(\mathcal{F}_r', W)$ 分别是 $\overline{A}_j(\mathcal{F}_r, W)$ 和 $\overline{A}_j(\mathcal{F}_r', W)$ 的真子集, 因而 II 型充要条件不存在.

在证明定理之前先作一些注解.

注 1 定理中的条件没有多余的, 即任一部分都不能推出其余部分, 这一点有必要验明, 因为 $\{u_{ni}, 1 \leq i \leq n\}$ 并非可任意取值, 而是受到 (0.2) 式的结构的制约, 为了验证需构造反例: 在模型

型 (0.1) 中取 $p=1$, 这时有 $u_{ni} = x_i / \sum_{i=1}^n x_i^2$, $1 \leq i \leq n$, $S_n^{-1} = \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \right)^{-1}$.

1° (1.1) 式推不出 (1.2) 式: 取 $x_i = 1/\sqrt{i}$, $i \geq 1$.

2° (1.2) 式推不出 (1.1) 式: 取 $x_i = 1/i$, $i \geq 1$.

3° (1.3) 式 + (1.4) 式推不出 (1.1) 式: 取 $x_i = 1/i^2$, $i \geq 1$.

4° (1.1) 式 + (1.4) 式推不出 (1.3) 式: 取

$$x_1 = 1, x_2 = -1, x_3 = 1/\sqrt{2}, x_4 = -1/\sqrt{2}, \cdots, x_{2n-1} = 1/\sqrt{n}, x_{2n} = -1/\sqrt{n}, \cdots.$$

5° (1.1) 式 + (1.3) 式推不出 (1.4) 式, 取

$$x_1 = 1, x_2 = 1, x_3 = 1/2, \cdots, x_{k(k-1)/2+1} = 1, x_{k(k-1)/2+2} = 1/2, \cdots, x_{k(k+1)/2} = 1/k, \cdots.$$

6° (1.1) 式推不出 (1.5) 式, 取 x_i 与 1° 同.

7° (1.5) 式推不出 (1.1) 式, 取 x_i 与 3° 同.

注 2 易见当 $1 < r < 2$ 时, (1.5) 式 $\Rightarrow$ (1.2) 式但其逆不真; 当 $r=1$ 时 (1.5) 式 $\Rightarrow$ (1.3) 式 +

(1.4) 式但其逆不真. 反例如下: 取模型 (0.1) 中 $p=1$. 找一串自然数 $n_1 < n_2 < \dots$ 满足条件 $\lim_{k \rightarrow \infty} k'/\log n_k = 0$, 而后令 $x_1, x_2, \dots$ 依次等于下述序列中的相应项:

$$1, -2^{-1/r}, 3^{-1/r}, \dots, (-1)^{n_1-1} n_1^{-1/r}, \dots, 1, -2^{-1/r}, 3^{1/r}, \dots, (-1)^{n_k-1} n_k^{-1/r}, \dots,$$

由此看出: 在 e_i 只有 r 阶矩而 $r < 2$ 时, 同分布下 LS 估计弱相合的充要条件, 比不同分布之下的充要条件要宽一些, 这也与二阶矩有限时的结果不同.

注 3 定理 2 确定的条件与文献[7]中定理 2.2.1 所给出的在分布类 $\mathcal{F}_r'$ 之下 $\hat{\beta}_{n_j}$ r 阶平均相合的充要条件相同. 由此推出一个有趣的结果: 尽管对 $\mathcal{F}_r'$ 中一个具体分布而言, $\hat{\beta}_{n_j}$ 的弱相合与 r 阶平均相合不一定等价 (反例见文献[3]), 但从分布类 $\mathcal{F}_r'$ 的整体看二者却是等价的.

注 4 注意到文献[7]定理 2.2.1 的必要部分证明中, 所构造的反例内 e_i 为 i.i.d., 从而得出结论: 在误差分布类为 $\mathcal{F}_r$ ($1 \leq r < 2$) 时, $\hat{\beta}_{n_j}$ r 阶平均相合的充要条件也是 (1.1) 式及 (1.5) 式, 与 $\mathcal{F}_r'$ 同, 这样, 文献[7]和本文结果结合, 彻底解决了在误差只有低于 2 阶的矩时, LS 估计 $\hat{\beta}_{n_j}$ 的弱相合与 r 阶平均相合的条件问题, 有趣的是: 对 i.i.d. 情况 $\mathcal{F}_r$, r 阶平均相合的条件严于弱相合的条件, 而在非 i.i.d. 情况 $\mathcal{F}_r'$, 二者却一致.

注 5 定理的结论也可用于任一线性函数 $c'\beta$ 的 LS 估计 $c'\hat{\beta}_n$, 只需将 (1.1) 式改为 $c'S_n^{-1}c \rightarrow 0$, 而在 (1.2) ~ (1.5) 式中, 用 $c'U_n$ 代替 $(u_{n1}, \dots, u_{nn})$.

2 定理的证明

先证明一个预备事实. 记

$$V_r(n, j) = \sum_{i=1}^n u_{ni} I(|u_{ni}| \geq u_{n(j)}) u_{n(j)}^{-1}, \quad V_r(n) = \max_{1 \leq j \leq n} |V_r(n, j)|.$$

注意当 $r=1$ 时, $V_r(n, j)$ 和 $V_r(n)$ 就是前面定义过的 $V(n, j)$ 和 $V(n)$. 令 $B(n, j) = \{i: 1 \leq i \leq n, 2^{-j} < |u_{ni}|^r \leq 2^{-j+1}\}$, 及

$$Z_r(n, j) = \sum_{i \in B(n, j)} |u_{ni}|^r, \quad Z_r(n) = \sup_{j \geq 1} Z_r(n, j).$$

引理 1 设 $1 \leq r < 2$, 则

$$\{W_r(n) = O(1)\} \Rightarrow \{Z_r(n) = O(1)\}; \quad (2.1)$$

若 $1 < r < 2$, 则

$$\{W_r(n) = O(1)\} \Rightarrow \{V_r(n) = O(1)\}. \quad (2.2)$$

证 先证 (2.1) 式. 用反证法, 设 $Z_r(n) = O(1)$ 不对, 则必要时取子列, 可设存在自然数 j_n , 致 $Z_r(n, j_n) \rightarrow \infty$. 以 t_n 记集合 $B(n, j_n)$ 中所含元素个数, 则有 $Z_r(n, j_n) \leq t_n 2^{-j_n+1}$, 故 $t_n 2^{-j_n} \rightarrow \infty$. 对每个 $i \in B(n, j_n)$ 定出自然数 m_i , 使 $|u_{ni}| = u_{n(m_i)}$. 记 $m = \max_{i \in B(n, j_n)} m_i$, 则 $m \geq t_n$, 所以

$$W_r(n) \geq m u_{n(m)}^r \geq m 2^{-j_n} \geq t_n 2^{-j_n} \rightarrow \infty$$

与 $W_r(n) = O(1)$ 不合. 现证 (2.2) 式. 设 $1 < r < 2$. 由 $W_r(n) = O(1)$ 知存在常数 M , 使 $iu_{n(i)}^r \leq M$, 故 $u_{n(i)} \leq M i^{-1/r}$, $1 \leq i \leq n$, 现有

$$V_r(n, j) = \sum_{i=1}^n u_{ni} I(|u_{ni}| > u_{n(j)}) u_{n(j)}^{-1} + \sum_{i=1}^n u_{ni} I(|u_{ni}| = u_{n(j)}) u_{n(j)}^{-1} \equiv J_1 + J_2. \quad (2.3)$$

因为 $|\sum_{i=1}^n u_{ni} I(|u_{ni}| > u_{n(j)})| \leq \sum_{i=1}^{j-1} u_{n(i)}$, 且 $r > 1$, 故当 $j \rightarrow \infty$ 时,

$$|J_1| \leq M \sum_{i=1}^j i^{-1/r} M^{r-1} j^{-(r-1)/r} = O(j^{1-1/r}) O(j^{-(r-1)/r}) = O(1). \quad (2.4)$$

由此知 $J_1 = O(1)$. 其次, $|J_2| \leq Z_r(n)$. 由 (2.1) 式知 $J_2 = O(1)$. 最后, 由 (2.3) 式得 $V_r(n) = O(1)$. 引理证毕.

从这个引理看出为何定理 1 中 $r=1$ 的情况要单列. 因 $r=1$ 时, (2.4) 式已失效. 确实, 当 $r=1$ 时 (2.2) 式已不成立, 此在注 1 的 5° 已指出过了.

定理 1 的证 充分性. 不失普遍性, 以下总设 $|u_{n1}| \geq \dots \geq |u_{nn}| > 0$, 故 $|u_{ni}| = u_{n(i)}$. 以 F 记 e_i 的公共分布, 有 $\int_{|x| < \infty} x dF = 0$, $\int_{|x| < \infty} |x|^r dF < \infty$.

设 (1.1) 式 + (1.2) 式, 或 (1.1) 式 + (1.3) 式 + (1.4) 式成立, 则据引理 1, 不论 $1 < r < 2$ 或 $r=1$, 总有

$$W_r(n) = O(1), \quad V_r(n) = O(1), \quad Z_r(n) = O(1),$$

因此 $r > 1$ 和 $r=1$ 两种情况可合并处理. 因为

$$S_n^{-1}(j) = \sum_{i=1}^n u_{ni}^2, \quad (2.5)$$

由 (1.1) 式有 $u_{n1} \rightarrow 0$, 再加上 e_i 为 i.i.d., 即知 $\{u_{ni} e_i; 1 \leq i \leq n, n \leq 1\}$ 满足“一致渐近无穷小”条件 (uan 条件^[9]), 于是据中心极限定理, 为证 $\hat{\beta}_{nj}$ 弱相合, 即 (0.4) 式, 需验证以下三条同时成立:

$$\sigma_n^2(1) \equiv \sum_{i=1}^n u_{ni}^2 \int_{|x| < |u_{n1}|^{-1}} x^2 dF \rightarrow 0; \quad (2.6)$$

$$a_n(1) \equiv \sum_{i=1}^n u_{ni} \int_{|x| < |u_{n1}|^{-1}} x dF \rightarrow 0; \quad (2.7)$$

$$p_n(1) \equiv \sum_{i=1}^n \int_{|x| > |u_{nj}|^{-1}} dF \rightarrow 0. \quad (2.8)$$

考虑 (2.6) 式. 由 $Z_r(n, j)$ 的定义及 $u_{n1} \rightarrow 0$, 知存在自然数 $m_n \rightarrow \infty$, 使

$$Z_r(n, j) = 0, \quad 1 \leq j \leq m_n, \quad n \text{ 充分大}. \quad (2.9)$$

定义

$$b(t) = \int_{|x| < t} x^2 dF / t^{2-r}, \quad t > 0, \quad (2.10)$$

$$p_i = \int_{2^{(i-1)/r} \leq |x| < 2^{i/r}} |x|^r dF, \quad i \geq 1. \quad (2.11)$$

则易见

$$b(t_2) \leq 2b(t_1), \quad \text{当 } 0 < t_1/2 \leq t_2 \leq t_1. \quad (2.12)$$

$$M \equiv \sum_{i=1}^{\infty} p_i = \int_{|x| < \infty} |x|^r dF < \infty. \quad (2.13)$$

现有

$$\sigma_n^2(1) = \sum_{i=1}^n |u_{ni}|^r b(|u_{ni}|^{-1}) = \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{i \in B(n, j)} |u_{ni}|^r b(|u_{ni}|^{-1}), \quad (2.14)$$

$$b(2^{j/r}) = 2^{-j(2-r)/r} \int_{|x| < 2^{j/r}} x^2 dF \leq \sum_{i=1}^j 2^{-(j-i)(2-r)/r} p_i. \quad (2.15)$$

由 (2.12), (2.14) 式, 并注意 $Z_r(n, j)$ 的定义, 有

$$\sum_{i \in B(n, j)} |u_{ni}|^r b(|u_{ni}|^{-1}) \leq 2b(2^{j/r}) \sum_{i \in B(n, j)} |u_{ni}|^r = 2b(2^{j/r}) Z_r(n, j).$$

由此式及 (2.9), (2.14), (2.15) 式, 并利用 (2.1) 式, 知存在常数 M_1 , 使当 n 充分大时有

$$\begin{aligned} \sigma_n^2(1) &\leq M_1 \sum_{j=m_n}^{\infty} \sum_{i=1}^j 2^{-(j-i)(2-r)/r} p_i \\ &\leq M_1 \sum_{j=m_n}^{\infty} \sum_{i=1}^c 2^{-(j-i)(2-r)/r} p_i \\ &\quad + M_1 \sum_{j=m_n}^{\infty} \sum_{i=c+1}^j 2^{-(j-i)(2-r)/r} p_i \equiv J_1 + J_2. \end{aligned} \quad (2.16)$$

据 (2.13) 式, 有

$$J_1 \leq M_1 M \sum_{j=m_n}^{\infty} 2^{-(j-c)(2-r)/r} \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty). \quad (2.17)$$

又

$$\begin{aligned} J_2 &= M_1 \sum_{t=c+1}^{\infty} \sum_{j=\max(m_n, t)}^{\infty} 2^{-(j-t)(2-r)/r} p_t \\ &\leq M_1 (1 - 2^{-(2-r)/r})^{-1} \sum_{t=c+1}^{\infty} p_t. \end{aligned}$$

按 (2.13) 式, 有 $\lim_{c \rightarrow \infty} J_2 = 0$. 此与 (2.16), (2.17) 式结合, 即得 (2.6) 式.

为证 (2.7) 式, 令

$$\begin{aligned} q_i &= \int_{|u_{ni}|^{-1} \leq |x| < |u_{n, i+1}|^{-1}} x dF, \quad r_i = \int_{|u_{ni}|^{-1} \leq |x| < |u_{n, i+1}|^{-1}} |x|^r dF, \quad 1 \leq i \leq n-1, \\ q_n &= \int_{|x| \geq |u_{nn}|^{-1}} x dF, \quad r_n = \int_{|x| \geq |u_{nn}|^{-1}} |x|^r dF. \end{aligned}$$

因 $\int_{|x| < \infty} x dF = 0$, 有

$$\begin{aligned} -a_n(1) &= u_{n1}(q_1 + \cdots + q_n) + u_{n2}(q_2 + \cdots + q_n) + \cdots + u_{nn}q_n \\ &= \sum_{i=1}^n (u_{n1} + \cdots + u_{ni}) q_i; \end{aligned}$$

因 $q_i \leq |u_{ni}|^{r-1} r_i = u_{n(i)}^{r-1} r_i$, 有

$$|a_n(1)| \leq \sum_{i=1}^n |(u_{n1} + \cdots + u_{ni}) u_{n(i)}^{(r-1)}| r_i. \quad (2.18)$$

若 $|u_{ni}| > |u_{n(i+1)}|$, 则 $(u_{n1} + \cdots + u_{ni}) u_{n(i)}^{r-1} = V_r(n, i)$. 若 $|u_{ni}| = |u_{n(i+1)}|$, 则 $r_i = 0$. 因此由 (2.18) 式得

$$|a_n(1)| \leq V_r(n)(r_1 + \cdots + r_n) = V_r(n) \int_{|x| \geq |u_{n1}|^{-1}} |x|^r dF. \quad (2.19)$$

由 (2.2) 式及假定 (1.4) 有 $V_r(n) = O(1)$, 又因 $u_{n1} \rightarrow 0$ 以及 $\int_{|x| < \infty} |x|^r dF < \infty$, 由 (2.19) 式知 (2.7) 式成立.

最后证明 (2.8) 式, 令

$$l_i = \int_{|u_{ni}|^{-1} \leq |x| < |u_{n(i+1)}|^{-1}} dF, \quad 1 \leq i \leq n-1, \quad l_n = \int_{|x| \geq |u_{nn}|^{-1}} dF. \quad (2.20)$$

则有

$$p_n(1) = (l_1 + \cdots + l_n) + (l_1 + \cdots + l_n) + \cdots + l_n = l_1 + 2l_2 + \cdots + nl_n. \quad (2.21)$$

由 (1.2), (1.3) 式知存在常数 M , 使 $i \leq M|u_{ni}|^{-r}$, 故由 (2.21) 式,

$$p_n(1) \leq M \sum_{i=1}^n l_i |u_{ni}|^{-r} \leq M \int_{|x| \geq |u_{n1}|^{-1}} |x|^r dF \rightarrow 0,$$

即 (2.8) 式, 充分性证毕.

必要性. (1.1) 式的必要性由 $\mathcal{F}_2 \subset \mathcal{F}_r$ ($\mathcal{F}_2$ 见 (1.6) 式) 及 (1.1) 式对 $\mathcal{F}_2$ 为必要而推出, 事实上, (1.1) 式是 II 型必要条件, 即如在分布类 $\mathcal{F}_r$ 中去掉那些不足道的退化于 0 的情况, 则当 (1.1) 式不成立时, 不论误差 e 取 $\mathcal{F}_r$ 中那一个分布, $\hat{\beta}_{nj}$ 必不弱收敛于 β_j . 这可由文献 [9] 中引理 2 推出.

为证 (1.2) ~ (1.4) 式的必要性, 可设 (1.1) 式成立, 因若不然, 则由上述已知 $\hat{\beta}_{nj}$ 不为弱相合, 无庸另证. 因有 (1.1) 式, 据 (2.5) 式知对 $\{u_{ni} e_i: 1 \leq i \leq n, n \geq 1\}$ uan 条件成立, 故为证 $\hat{\beta}_{nj}$ 不相合, 只需证明存在分布 $F \in \mathcal{F}_r$, 使当误差 $e = (e_1, e_2, \cdots)$ 有分布 F 时, (2.6) ~ (2.8) 式中至少有一条不成立.

先设 (1.2) 或 (1.3) 式不成立, 为避免多重足标, 以 $u(n, i)$ 和 $u(n, (i))$ 分别记 u_{ni} 和 $u_{n(i)}$, 又约定

$$u(n, n+1) = |u(n, n)| / (1 + |u(n, n)|).$$

必要时取子列, 可设存在自然数 $i(n) \leq n$, 使

$$i(n) |u(n, i(n))|^r \rightarrow \infty, \quad |u(n, i(n))| > |u(n, i(n)+1)|.$$

由 $u(n, 1) \rightarrow 0$ 可知 $i(n) \rightarrow \infty$. 故可找到 $\varepsilon(n) \downarrow 0$, 使

$$\varepsilon(n) i(n) \rightarrow \infty, \quad \varepsilon(n) |u(n, i(n))|^{-r} \rightarrow 0.$$

据此可找到自然数子列 $n_1 < n_2 < \cdots$, 使

$$\sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon(n_k) |u(n_k, i(n_k))|^{-r} < \infty, \quad (2.22)$$

$$|u(n_{k+1}, 1)| < |u(n_k, n_k)|, \quad k \geq 1. \quad (2.23)$$

因 $u(n, 1) \rightarrow 0$, 由 (2.22) 式有

$$0 < c \equiv \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon(n_k) < \infty. \quad (2.24)$$

作概率分布 F_0 如下:

$$F_0(\{|u(n_k, i(n_k))|^{-1}\}) = F_0(\{|-|u(n_k, i(n_k))|^{-1}\}) = (2c)^{-1} \varepsilon(n_k), \quad k \geq 1,$$

F_0 是关于 0 对称的分布, 且据 (2.22) 式有 $\int_{|x|<\infty} |x|^r dF_0 < \infty$, 故 $\int_{|x|<\infty} x dF_0$ 存在且等于 0, 因此

无穷维分布 $F = (F_0)^\infty$ 属于分布类 $\mathcal{F}_r$, 取模型 (0.1) 中误差 $e = (e_1, e_2, \dots)$ 的分布为 F , 则据 (2.21) 和 (2.20) 式, 有

$$p_{n_k}(1) \geq i(n_k) l_{i(n_k)} \geq i(n_k) \varepsilon(n_k) / c \rightarrow \infty,$$

即 (2.8) 式不成立, 而 $\hat{\beta}_{n_j}$ 不依概率收敛于 β_j .

剩下要证明当 $r=1$ 时条件 (1.4) 的必要性, 先证明下面的简单引理.

引理 2 令

$$\tilde{V}(n, j) = \sum_{i=1}^n u(n, i) I(|u(n, i)| \leq |u(n, j)|), \quad 1 \leq j \leq n.$$

而 $\tilde{V}(n) = \max_{1 \leq j \leq n} |\tilde{V}(n, j)|$, 则当 (1.4) 式不成立时, 必有

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \tilde{V}(n) = \infty. \quad (2.25)$$

事实上, 若 (2.25) 式不对, 则存在常数 M , 使对一切 n 有 $\tilde{V}(n) \leq M$. 记 $h(n) = \sum_{i=1}^n u(n, i)$, 则 $|h(n)| = |\tilde{V}(n, 1)| \leq \tilde{V}(n) \leq M$. 现任取 $j, 1 \leq j \leq n$. 若 $|u(n, j)| = |u(n, n)|$, 则 $V(n, j) = h(n)$ 因而 $|V(n, j)| \leq M$; 若 $|u(n, j)| > |u(n, n)|$, 则找最小的 j' , 使 $|u(n, j)| > |u(n, j')|$, 有 $V(n, j) = h(n) - \tilde{V}(n, j')$, 因而 $|V(n, j)| \leq 2M$. 这将得出对一切 $n, |V(n)| \leq 2M$, 与 (1.4) 式不成立之假定不合, 引理证毕.

现设 (1.4) 式不成立. 据 (2.25) 式, 必要时取子列, 可设存在自然数 $j(n) \leq n$, 使 $|\tilde{V}(n, j(n))| \rightarrow \infty$, 因此可找到 $\varepsilon(n) \downarrow 0$, 使

$$\varepsilon(n) |\tilde{V}(n, j(n))| \rightarrow \infty. \quad (2.26)$$

约定 $u(n, 0) = 2u(n, 1)$, 定义

$$r(n) = \min\{|u(n, i)| : 0 \leq i \leq n, |u(n, i)| > |u(n, j(n))|\}.$$

找自然数子列 $n_1 < n_2 < \dots$, 满足条件

$$\varepsilon(n_k) \leq 2^{-k}, \quad 2|u(n_k, 1)| < |u(n_{k-1}, n_{k-1})|, \quad k \geq 2. \quad (2.27)$$

由 $\sum \varepsilon(n_k) < \infty$ 及 $u(n, 1) \rightarrow 0$ 因而 $r(n) \rightarrow 0$, 知

$$0 < c \equiv \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon(n_k)(r(n_k) + |u(n_k, n_k)|) < \infty. \quad (2.28)$$

定义分布 F_0 如下:

$$F_0(\{|1/r(n_k)\}) = c^{-1} r(n_k) \varepsilon(n_k), \quad F_0(\{|-1/|u(n_k, n_k)|\}) = c^{-1} \varepsilon(n_k) |u(n_k, n_k)|. \quad (2.29)$$

由 $\sum \varepsilon(n_k) < \infty$ 知 F_0 的期望存在, 此期望为 0, 因按 (2.27) 式和 $r(n)$ 的定义以及 F_0 的定义 (2.29) 式, 易见

$$\int_{|x| \leq |u(n_k, n_k)|^{-1}} x dF_0 = 0, \quad (2.30)$$

此可由 F_0 在区间 $[-|u(n_k, n_k)|^{-1}, |u(n_k, n_k)|^{-1}]$ 上的支撑点集为 $\{1/r(n_i), -|u(n_i, n_i)|^{-1}; 1 \leq i \leq k\}$ 及 (2.29) 式看出, 因为 $u(n_k, n_k) \rightarrow 0$, 在 (2.30) 式左边令 $k \rightarrow \infty$ 即得 $\int_{|x| < \infty} x dF_0 = 0$, 因此, 若记 $F = (F_0)^\infty$, 则 $F_0 \in \mathcal{F}_1$, 现计算

$$a_{n_k}(1) = \sum_{i=1}^{n_k} u(n_k, i) \int_{|x| < |u(n_k, i)|^{-1}} x dF_0. \quad (2.31)$$

按得出 (2.30) 式的类似推理, 易得

$$\int_{|x| < |u(n_k, i)|^{-1}} x dF_0 = \begin{cases} c^{-1}\varepsilon(n_k), & \text{当 } |u(n_k, i)| \leq |u(n_k, j(n_k))|, \\ 0, & \text{当 } |u(n_k, i)| > |u(n_k, j(n_k))|. \end{cases} \quad (2.32)$$

由 (2.31), (2.32) 式, 得

$$\begin{aligned} a_{n_k}(1) &= c^{-1}\varepsilon(n_k) \sum_{i=1}^{n_k} u(n_k, i) I(|u(n_k, i)| \leq |u(n_k, j(n_k))|) \\ &= c^{-1}\varepsilon(n_k) \tilde{V}(n_k, j(n_k)). \end{aligned}$$

由此及 (2.26) 式知 $a_{n_k}(1) \rightarrow \infty$, 即 (2.7) 式不成立, 而 $\hat{\beta}_{n_j}$ 不依概率收敛于 β_p , 定理 1 证毕.

定理 2 的证 充分性部分是文献[7]中定理 2.2.1 的推论, 往证必要性, 可设 (1.1) 式成立, 理由同前, 因此有 $u_{n_1} \rightarrow 0$, 再加上 $\{|e_i|^r, i \geq 1\}$ 一致可积, 不难知道对 $\{u(n, i)e_i; 1 \leq i \leq n, n \geq 1\}$ uan 条件成立, 故为证 $\hat{\beta}_{n_j}$ 不为弱相合, 只需证明存在分布 $F \in \mathcal{F}_r'$, 使当 $(e_1, e_2, \dots)$ 有分布 F 时, (2.6) ~ (2.8) 式中至少有一条不成立, 记 $a^+ = \max(a, 0)$, $a^- = \max(-a, 0)$.

现设 (1.5) 式不成立, 必要时取子列, 可设

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n (u^+(n, i))^r = \infty, \text{ 或 } \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n (u^-(n, i))^r = \infty.$$

为确定计设为前者, 找一串常数 $\{\varepsilon(n)\}$, $1 > \varepsilon(1) > \varepsilon(2) > \dots \downarrow 0$, 使

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \varepsilon(n) \sum_{i=1}^n (u^+(n, i))^r = \infty. \quad (2.33)$$

记

$$P(n) = \{i: 1 \leq i \leq n, u(n, i) > 0\}.$$

用归纳法找一串自然数 $n_1 < n_2 < \dots$ 如下: 首先找 n_1 充分大, 使

$$\varepsilon(n_1) \sum_{i \in P(n_1)} u^r(n_1, i) / 2 \geq 1, |u(n, 1)| < 1, \text{ 当 } n \geq n_1.$$

现设 $n_1, \dots, n_{k-1}$ 已定出, 找 $n_k > n_{k-1}$, 使

$$2^{-1}\varepsilon(n_k) \sum_{i \in P(n_k), i > n_{k-1}} u^r(n_k, i) - \sum_{i=1}^{n_{k-1}} |u(n_k, i)| \geq 1, \quad (2.34)$$

这种 n_k 的存在由 (2.33) 式保证.

现在定一串一维分布 $\{F_i\}$ 如下: 设 $k \geq 2$, $n_{k-1} < i \leq n_k$, $i \in P(n_k)$, 则

$$\begin{aligned} F_i(\{2^{-1}|u(n_k, i)|^{-1}\}) &= u'(n_k, i)\varepsilon(n_k), \quad F_i(\{-2|u(n_k, i)|^{-1}\}) = 4^{-1}u'(n_k, i)\varepsilon(n_k), \\ F_i(\{0\}) &= 1 - 5u'(n_k, i)\varepsilon(n_k)/4. \end{aligned} \quad (2.35)$$

对其他的 $i \geq 1$ 令 $F_i \sim N(0, 1)$, 有 $\int_{|x| < \infty} x dF_i = 0, i \geq 1$, 又若 F_i 按 (2.34) 式定义, 则 $\int_{|x| < \infty} |x|^r dF_i < 2\varepsilon(n_k) \rightarrow 0$. 由此得到 $\lim_{a \rightarrow \infty} \left(\sup_i \int_{|x| \geq a} |x|^r dF_i \right) = 0$. 故若取模型 (0.1) 中误差 $(e_1, e_2, \dots)$ 的分布为 $F = F_1 \times F_2 \times \dots$, 则 $F \in \mathcal{F}_r'$. 但当 $n_{k-1} < i \leq n_k$ 而 $i \in P(n_k)$ 时, 有

$$\int_{|x| < |u(n_k, i)|^{-1}} x dF_i = 2^{-1}u'^{-1}(n_k, i)\varepsilon(n_k);$$

而对其他的 $i \leq n_k$ 则有

$$\int_{|x| < |u(n_k, i)|^{-1}} |x| dF_i \leq \max \left(\sqrt{2\pi} \int_{|x| < \infty} e^{-x^2/2} dx, \varepsilon(m_t)|u(m_t, 1)|^{r-1}, t \leq n_k \right) < 1,$$

由此得出, 对一切 $k \geq 2$,

$$a_{n_k}(1) \geq 2^{-1}\varepsilon(n_k) \sum_{i \in P(n_k), i > n_{k-1}} u'(n_k, i) - \sum_{i=1}^{n_k-1} |u(n_k, i)| \geq 1,$$

因此 (2.7) 式不成立, 定理 2 证毕.

参 考 文 献

- 1 Drygas H. Weak and strong consistency of the least squares estimates in regression model. Z Wahrsh Verw Gebiete, 1976, 34(1): 119 ~ 127
- 2 Lai T L, Robbins H, Wei C Z. Strong consistency of least squares estimates in multiple regression II. J Multivariate Anal, 1979, 9(3): 343 ~ 362
- 3 陈希孺, 陈桂景, 吴启光等. 线性模型参数的估计理论. 北京: 科学出版社, 1985
- 4 白志东. 回归系数最小二乘估计相合性的若干问题. 数学学报, 1984, 27(4): 704 ~ 710
- 5 陈希孺. 再论线性模型中回归系数的最小二乘估计的相合性. 数学学报, 1981, 24(1): 36 ~ 44
- 6 陈桂景. 线性模型回归系数最小二乘估计的平均相合性. 数学年刊, 1983, 4A(4): 657 ~ 664
- 7 Zhu Lixing. On the consistent condition for the least squares estimates in linear models. Kexue Tongbao, 1989, 34(1): 90 ~ 93
- 8 Loeve M. Probability Theory, 2nd ed. New York: van Nostrand, 1960
- 9 陈希孺. 线性估计弱相合性的一个问题. 数学年刊, 1981, 2(1): 131 ~ 137