

任意点到路线中线最短距离的计算

闻道秋

(南京交通高等专科学校 南京 210032)

摘要 在公路设计和勘测过程中,常需确定某一点与线路的关系。本文首先讨论路线在测量坐标系中的数学模型,然后给出了路线上与给定点距离最短的点应满足的条件以及此点桩号和最短距离的计算方法。此法理论严密,编程方便。

关键词 曲线单元 最短距离 切线 法线

Determining the Shortest Distance of One Point to the Route

Wen Daoqiu

(Nanjing College of Communications, Nanjing)

Abstract During highway design and surveying, the relation of one point to the route needs to be determined. This paper first discusses the mathematical model of the route in the coordinate system of surveyy, then presents the conditions for the point on the route should meet, to make the distance from the given point being the shortest, finally gives the method of calculating the stake location and the shortest distance, this method is relatively perfect in the theory and simple in programming.

Key words Curve unit Shortest distance Tangent Normal

随着计算机的发展以及高等级公路对设计要求的提高,许多公路的设计是先把野外地形数字化到计算机中,然后在计算机上进行选线和线路设计。在这个过程中,常需计算某点到线路的距离(最短距离),以便检查某些地物点与线路的关系。如图 1 中,2 层楼房角 P' 对路线有没有影响。另外,在野外线路测设过程中,有时要确定任意点到路线中线距离以及所对应横断面桩号。如图 1 所示,用极坐标法放样, A 、 B 为两导线点,测出了 P'' 点位置,现需判定 P''

点往哪一个方向移动,最快到达路线上 Q 点(即 P'' Q 距离最短),并且要得到 Q 点桩号。

这实际上就是确定 P 点与线路上哪一点(用 Q 表示)的距离最短的问题。

1 路线在导线测量坐标系中的统一数学模型

由于 P 点坐标是在导线测量坐标系中的坐标,所以为了求得路线上 Q 点,必须把路线放在导线测量坐标系中,用一个数学式子表示。

公路中线线型是一条较复杂的曲线,如匝道,回头曲线,卵形曲线等。根据公路设计规范要求,该曲线是一条连续的曲线,并且是可导的,放在导线测量坐标系中可以用下式表示

$$\begin{cases} X_L = F_X(L) \\ Y_L = F_Y(L) \\ T_L = F_T(L) = \frac{\partial F_X}{\partial L} \Big| \frac{\partial F_Y}{\partial L} \end{cases} \quad (1)$$

式中, L ——线路上点的里程;

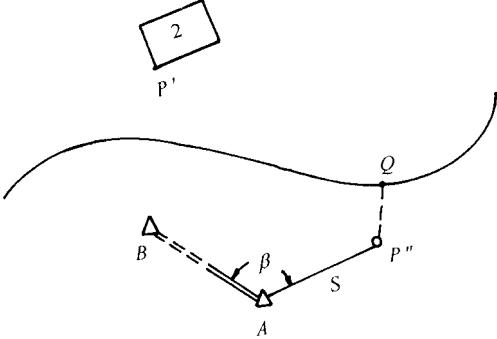


图 1 任意点与线路的关系

T_L ——该点切线方位角。

由于线型的复杂性，上面的函数也是很复杂的，但通过分析，任何线型都是由许多直线段、圆曲线段、缓和曲线段通过不同的组合组成，由于直线是曲线的一种特殊情况。这里把每一段称为曲线单元，即路线是由许多不同的曲线单元组成的。上面 (1) 式是一个参数函数，同时也是一个分段函数，即在不同的区间段里有不同的表达式。这个不同的区间段就是由许多不同的曲线单元组成的。

根据文献 1，只要知道了路线起点在导线测量坐标系中坐标、切线方位角、里程和各曲线单元要素：每个曲线单元起点曲率半径 R_1 、末点曲率半径 R_2 、曲线单元长 S （这些都可以从道路设计文件中得到）。

$R_1 = R_2 = 0$ ，直线单元（半径无穷大用 0 表示）

$R_1 = R_2 \neq 0$ ，圆曲线单元

$R_1 \neq R_2$ 缓和曲线单元（当 $R_1 \neq 0, R_2 \neq 0$ 为不完全缓和曲线）（ $R < 0$ 曲线左偏， $R > 0$ 曲线右偏）

如图 2 所示，就能确定上面的 (1) 式函数，即给定路线任意一点里程 L ，就能得到该点在导线测量坐标系中坐标 (X_L, Y_L) 和切线方位角 T_L 。

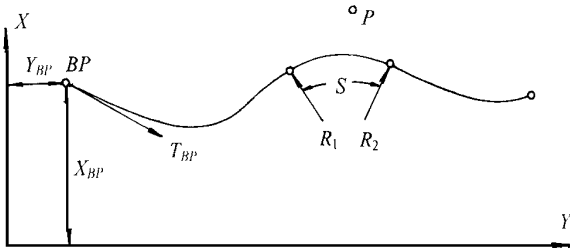


图 2 路线在测量坐标系中的位置

2 路线上到给定点 P 距离最短的点 Q 应满足的条件

2.1 Q 点应满足的必要条件

设路线上 Q 点（里程为 L_Q ）与给定点 $P(X_P, Y_P)$ 之间距离最短，即

根据
$$\begin{cases} \sqrt{(X_Q - X_P)^2 + (Y_Q - Y_P)^2} = \min \\ X = F_X(L) \\ Y = F_Y(L) \end{cases}$$
，消去参数 L ，可得 Y 与 X 之间的函数
$$Y = \varphi_{(X)} \quad (2)$$

线路上任意一点到 P 点距离为

$$D_{(X)} = \sqrt{(\varphi_{(X)} - Y_P)^2 + (X - X_P)^2} \quad (3)$$

求 Q 点实际上就是求上式的极小值。上式对 X 求导并令其等于零得

$$\frac{(\varphi_{(X)} - Y_P) \varphi'_{(X)} + (X - X_P)}{\sqrt{(\varphi_{(X)} - Y_P)^2 + (X - X_P)^2}} = 0 \quad (4)$$

由 (4) 得

$$(\varphi_{(X)} - Y_P) \cdot \varphi'_{(X)} + (X - X_P) = 0$$

即

$$\varphi'_{(X)} \cdot \frac{\varphi_{(X)} - Y_P}{X - X_P} = -1 \quad (5)$$

那么 Q 点要满足

$$\varphi'_{(X_Q)} \cdot \frac{\varphi_{(X_Q)} - Y_P}{X_Q - X_P} = -1$$

而 $\varphi'_{(X_Q)}$ 为 Q 点的切线斜率， $\frac{\varphi_{(X_Q)} - Y_P}{X_Q - X_P}$ 为 PQ 斜率，故 PQ 与 Q 点的切线垂直，即 P 点在 Q 点的法线上，这是 Q 点的必要条件，称为法线条件。

2.2 Q 点应满足的充分条件

若给定一个点 P ，那么满足上述条件的点在哪里呢？另外，由于在一条线路上满足上述条件的点可能不止一个，且满足上述条件的点既可能是极小值，也可能是极大值。由于线路的复杂性， $\varphi_{(X)}$ 是一个分段函数，故 $D_{(X)}$ 也是分段函数，这个分段区间就是各曲线单元。所以我们可以分别判断每个曲线单元上是否有满足上述条件的点，且是极小值点。

路线虽然是由许多曲线单元组成的，但最基本的只有 3 个：直线单元、圆曲线单元、缓和曲线单元。所以只要讨论 P 点对这 3 种基本曲线单元就行了。

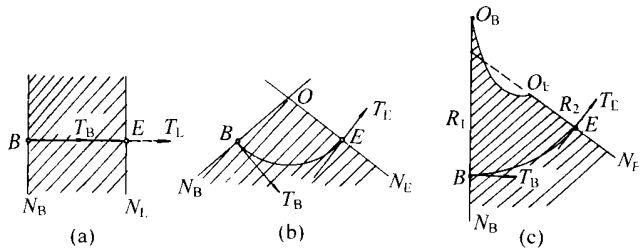


图 3 Q 点所在曲线单元

图 3 所示， B 、 E 为曲线单元起点和末点， T_B 、 T_E 、 N_B 、 N_E 分别为 B 、 E 两点的切线和法线， T_B 、 T_E 的方向指向路线前进方向。从图 3 可以直观地看出：当 P 点处在图中阴影部位中时，该曲线单元上必定有一个满足法线条件且是极小值点 Q （因篇幅限制，证明过程略）。

目前，我国采用的曲线单元都是单一的凹曲线或凸曲线，从图 3 可以看出，一个 P 点对于一个曲线单元在一般情况下只有一个点满足法线条件。只有当 P 点正好处在某两点法线的交点处时，才会有二个点满足法线条件，这时 P 点离线路很远。

由于 $\varphi_{(X)}$ 在曲线单元两端点可导 (有切线), $D_{(X)}$ 在曲线单元两端点也可导, 故 $D_{(X)}$ 在曲线单元上的极小值也是最小值点。

那么如何判定 P 点是否处在图 3 中的阴影区域内呢? 图 3 中直线单元 (a)、圆曲线单元 (b) 的阴影区域边界都是 B 、 E 两点的法线, 且都是直线。而缓和曲线单元 (c) 的阴影区域的一边边界是各点曲率圆心的连线, 是一条曲线。为了统一起见, 给编程带来方便, 把 E 点的法线延长与 B 点法线相交围成一个区域 (当 E 点半径大于 B 点半径时, 就延长 B 点法线), 这样就会把不属于上述阴影的区域包进来, 而把一部分阴影区域舍弃掉了。但从图上可以看出, 无论包进来或舍弃掉, 点到路线的距离都很远, 至少大于 R_B , 而一般线路中的 R 至少大于 400m, 研究离开线路 400m 以外的点就没有多大意义, 在实际中一般是不可能出现的, 这样缓和曲线单元的区域就与圆曲线单元相似了。

设 PB 与 T_B 的夹角为 β_B , PE 与 T_E 的夹角为 β_E , 如图 4 所示。

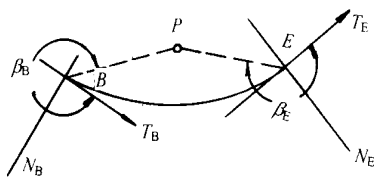


图 4 P 点所在阴影区

$$\beta_B = \alpha_{BP} - T_B \quad \alpha_{BP} = \arctg \frac{Y_P - Y_B}{X_P - X_B}$$

$$\beta_E = \alpha_{EP} - T_E \quad \alpha_{EP} = \arctg \frac{Y_P - Y_E}{X_P - X_E}$$

当 $0^\circ \leq \beta_B \leq 90^\circ$ 或 $270^\circ \leq \beta_B \leq 360^\circ$ 和 $90^\circ \leq \beta_E \leq 270^\circ$ 时, P 点就处在图 3 的阴影区内。

由于 B 、 E 两点里程是已知的, 故 B 、 E 两点的坐标及切线方位角可利用文献 1 的方法求得。

3 Q 点桩号和最短距离的计算

当知道了 Q 点在哪个曲线单元上后, 就可以确定 Q 点的具体位置即桩号。由于曲线单元主要有 3 种基本类型: 直线、圆曲线、缓和曲线, 所以下面分别讨论其计算方法。

3.1 Q 处在直线单元上

如图 5 (a) 所示, Q 点里程为

$$\beta = T_{BP} - T_B$$

$$BQ = BP \cdot \cos \beta$$

$$L_Q = L_B + BQ$$

3.2 Q 点处在圆曲线单元上

如图 5 (b) 所示, 圆心坐标

$$\begin{cases} X_O = X_B + R \cdot \cos \alpha_{BO} \\ Y_O = Y_B + R \cdot \sin \alpha_{BO} \end{cases} \quad (6)$$

$$\alpha_{BO} = T_B \pm 90^\circ \quad (\text{当曲线左偏取一, 右偏取+})$$

$$PO = \sqrt{(X_P - X_O)^2 + (Y_P - Y_O)^2}$$

$$\beta = \arccos \frac{R^2 + PO^2 - BP^2}{2R \cdot PO}$$

$$\text{弧长 } BQ = \frac{\beta \cdot R}{\rho}$$

$$L_Q = L_B + BQ$$

3.3 Q 处在缓和曲线单元上

由于缓和曲线比较复杂, 用一般方法不能求解, 这里采用图形迭代法 (二分法)。如图 5 (c) 所示, 取 BE 的中点 A_1 , 把 BE 分成二段 BA_1 、 A_1E , A_1 点里程为

$$L_{A1} = \frac{L_B + L_E}{2}$$

利用 2.2 中方法, 判断 Q 点在哪一段内, 然后再取 Q 所在一段的中点 A_2 , 把 Q 所在区间分成二段, 再判断 Q 在哪一段内, 一直循环下去, 直到 Q 所在的一段区间长度小于某一限值 (一般取 0.01m), 最后取该区间两端里程的平均值作为 Q 点里程 L_Q 。

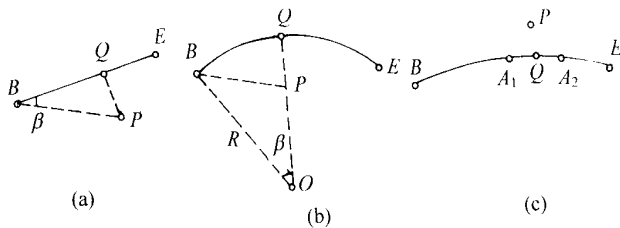


图 5 Q 点桩号及最短距离计算示意图

用上面方法求出 Q 点后, 就可以根据 L_Q 用文献 1 的方法求 Q 点的坐标 (X_Q, Y_Q) 和切线方位角 T_Q , P 、 Q 两点间的距离 (即最短距离) 为

$$PQ = \sqrt{(X_P - X_Q)^2 + (Y_P - Y_Q)^2} \quad (7)$$

P 点在路线的左侧还是右侧, 只要判断 P 点在 Q 点切线的左右侧, 二者是一致的。

在一般情况下, 当 P 点到路线的距离较小时, P 点只对应着一个 Q 点, 但有时会对应着多个 Q 点, 一般是在一个范围, 路线比较曲折, 如匝道或 P 点离路线距离太远, 造成了多解, 如图 6 (a)、(b) 所示, 这时, 只要从中选出一个与 P 点距离最短的一个 Q 点。

在程序设计中, 当给定一个 P 点后, 虽然并不知道 Q 点在哪个曲线单元里, 但可根据实际情况

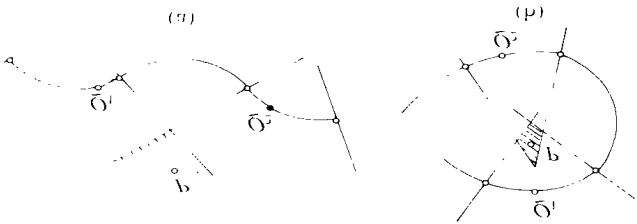


图 6 多个 Q 点情况示意图

知道 Q 点在某里程区间 $[L_M, L_N]$ 内，所以程序只要在此区间内曲线单元上寻求 Q 点，这样就提高了运行速度。

4 程序框图和算例

4.1 程度框图 (图 7)

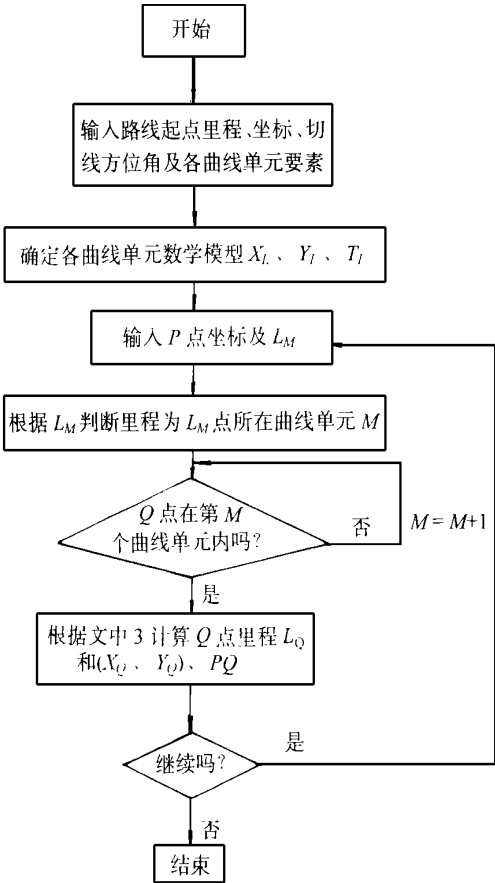


图 7

4.2 算例

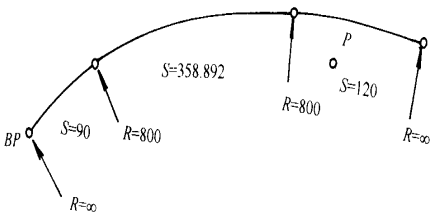


图 8 算例路线图

图 8 中, $BP (5010.258, 6215.300)$
 $L_{BP}=k2+689.280$
 $T_{BP}=30^{\circ}30'18''$
 $P (5356.394, 6612.763)$
通过程序解算得 Q 点的:
里程 $L_Q=k3+231.52$
坐标 $Q (5375.486, 6603.251)$
切线方位角 $T_Q=63^{\circ}31'00.6''$
 $QP=21.33$ (P 点在路线右侧)

参考文献

1 闻道秋. 复合曲线坐标计算及程序设计. 工程勘察, 1992 (2)
2 张廷楷编著. 道路路线设计. 同济大学出版社, 1990-09
3 同济大学数学教研室主编. 高等数学 (第三版). 高等教育出版社

探地雷达似 “B 超仪”

电子部 22 所青岛研究中心开发成功的探地雷达被比作探测地下目标的“B 超仪。”它适合城建、市政、勘测、邮电、电业、公路、铁路、环保、水利、考古以及公安、国防等地下目标的探测，便于安全施工。

探地雷达是一种集现代电磁场理论、电子技术、信号处理技术和图像处理技术与识别等高新技术为一体的高科技产品。对潜层地下各种金属和非金属埋设物体（如管道）或自然形成的构造都能有效地探测。在灰岩地区，探测深度可达近 30m。

国 信