

• 机械工程 •

DOI:10.15961/j.jsuese.201800763

斜齿轮传动的啮合刚度计算及其主共振分析

石慧荣^{1,2}, 赵冬艳¹, 李宗刚¹

(1.兰州交通大学 机电工程学院, 甘肃 兰州 730070; 2.甘肃省轨道交通装备系统动力学与可靠性重点实验室, 甘肃 兰州 730070)

摘 要:斜齿轮是机械装备的重要传动元件,其啮合刚度的准确计算和传动系统的稳定性分析具有重要的实际意义。根据斜齿轮轮齿接触线的变化规律,结合斜齿轮单对齿单位长度啮合刚度变化规律和ISO刚度计算准则,提出一种斜齿轮啮合刚度计算方法,分析了不同参数下斜齿轮传动的啮合刚度波动特性;基于分析所得的啮合刚度变化规律建立了斜齿轮传动的动力学模型,并利用多尺度法对动力学模型进行了求解,研究了外加载荷和啮合刚度波动对斜齿轮传动主共振的影响。结果表明:给出的斜齿轮啮合刚度计算方法能够较快速、准确地获取啮合刚度波动变化规律,将其引入斜齿轮动态特性分析中,能够更加准确地反映斜齿轮啮合刚度波动和载荷波动对系统主共振稳定性的影响规律;在其他条件不变时,斜齿轮主共振稳定性随静载荷和啮合刚度波动增加而增加,但较大静载荷会导致主共振频率增大,而且在高频激励下,即使较小的啮合刚度波动也会触发主共振的不稳定;载荷波动增加会使斜齿轮主共振幅值增大,使系统稳定性变差。

关键词:啮合刚度;斜齿轮;主共振;非线性

中图分类号:TH113.2; TB533.1; O322

文献标志码:A

文章编号:2096-3246(2019)05-0143-06

Meshing Stiffness Calculation and Main Resonance Analysis of Helical Gear Transmission

SHI Huirong^{1,2}, ZHAO Dongyan¹, LI Zonggang¹

(1.School of Mechatronic Eng., Lanzhou Jiaotong Univ., Lanzhou 730070, China; 2. Gansu Provincial Key Lab. of System Dynamics and Reliability of Rail Transport Equipment, Lanzhou 730070, China)

Abstract: Helical gear is an important element of mechanical equipment. The accurate calculation of meshing stiffness and the stability analysis of the transmission system have important practical significance. Based on the change rule of tooth contact line of helical gear, the change law of mesh stiffness about single gear pair in unit length and the ISO calculation method of mesh stiffness, a kind of approximate method was put forward for calculating the mesh stiffness of helical gear and used to study effects of the structural parameters of helical gear on mesh stiffness fluctuation. A dynamic model of helical gear transmission which included the change rule of mesh stiffness obtained from the analysis was established and solved by using multi-scale method. The influence of the loads and meshing stiffness fluctuation of helical gear on the primary resonance was analyzed. The results showed that the calculation method of meshing stiffness could be used to determine the meshing stiffness fluctuation rule of helical gear quickly and accurately. By applying the meshing stiffness fluctuation obtained to study the dynamic characteristics of helical gear transmission, some more accurate variation rules of primary resonance caused by meshing stiffness fluctuations and load fluctuation were gained. When other parameters remained unchanged, the increase of the static load and meshing stiffness fluctuate could improve the primary resonance stability accordingly. But larger static loads resulted in higher primary resonant frequencies and very small meshing stiffness fluctuations could cause the primary resonance unstable under the condition of high-frequency excitation. The amplitude of primary resonance increased with the load fluctuation and the stability of helical gear transmission deteriorates. Through the proposed calculation method of meshing stiffness and the dynamic analysis of helical gear transmission by multi-scale method, the general characteristics of helical gear transmission had been revealed more universally.

Key words: mesh stiffness; helical gear; primary resonance; nonlinear

收稿日期:2018-07-08

基金项目:国家自然科学基金项目(11672121; 11862011); 甘肃省自然科学基金项目(17JR5RA100); 兰州市创新创业人才项目(2014-RC-33); 甘肃省高等学校科研项目(2018D-10)

作者简介:石慧荣(1979—), 男, 副教授, 博士。研究方向:机械振动控制; 机械系统动力学。E-mail: shrz98@aliyun.com

网络出版时间:2019-08-19 13:10:42

网络出版地址: <http://kns.cnki.net/kcms/detail/51.1773.TB.20190819.0856.001.html>

<http://jsuese.ijournals.cn>

<http://jsuese.scu.edu.cn>

斜齿轮具有传动平稳、精度高、可靠性好等特点,在汽车、船舶、航空等领域得到广泛应用,但由于受制造误差和时变啮合刚度的影响,其应用又受到一定限制,而且时变啮合刚度是齿轮振动的一个重要因素。准确计算啮合刚度是齿轮动态特性分析的基础,因此对斜齿轮啮合刚度的研究一直是一个重要课题。Hedlund等^[1]组合结构分析法、接触分析法和有限元法分析了斜齿轮啮合刚度的时域和频域变化特性。Gu等^[2]应用切片法提出一种实体直齿和斜齿轮啮合刚度计算方法,通过数值分析计算比较证实该方法的有效性。Wan等^[3]提出一种利用积分势能法计算斜齿轮啮合刚度的方法,分析了斜齿轮参数与啮合刚度之间的关系。然而这些方法的计算量一般比较大,计算准确性还有待进一步深入研究。

时变啮合刚度作为影响齿轮传动特性的重要因素,一直被广泛关注。Moradi等^[4]利用多尺度法分析了含间隙的直齿圆柱齿轮系统的动力学特性。Lu等^[5]利用数值算法研究了影响直齿圆柱齿轮传动非线性特性的因素。但是很多研究主要针对直齿轮啮合特性,对斜齿轮传动参数激励振动研究还需深入探讨。

目前很多文献将啮合刚度近似为一类谐波形式,而且主要研究了特定参数下斜齿轮传动的动态性能,因此对斜齿轮啮合性能与其动力学行为的关系还有待进一步深入研究。根据斜齿轮接触线变化规律,结合单对齿单位长度啮合刚度变化规律和ISO刚度计算准则,提出一种斜齿轮啮合刚度计算方法,获取不同参数下啮合刚度变化规律,并根据斜齿轮啮合刚度变化机理建立了斜齿轮传动动力学模型,利用多尺度法分析了载荷波动、啮合刚度波动和静载荷对斜齿轮系统主共振稳定性的影响。

1 斜齿轮啮合刚度计算原理

1.1 斜齿轮轮齿接触线变化规律

在斜齿圆柱齿轮啮合过程中,单对轮齿接触线长度从进入到退出啮合先增加而后减小,由于啮合区内通常具有两对或两对以上轮齿同时啮合,轮齿接触线在整个啮合区变化如图1所示。其中, ε_α 为端面重合度, ε_β 为轴面重合度,虚线区域为 $\text{ceil}(\varepsilon_\gamma)$ 对轮齿接触区,实线区域为 $\text{floor}(\varepsilon_\gamma)$ 对轮齿接触区, $\varepsilon_\gamma = \varepsilon_\beta + \varepsilon_\alpha$ 为总的重合度, ceil 为向上取整函数, floor 为向下取整函数, p_{bt} 为端面基圆齿距, B 为齿宽, β_b 为基圆螺旋角, d_i 表示 i 的小数部分 ($i = \varepsilon_\gamma, \varepsilon_\beta, \varepsilon_\alpha$), μ 为啮合过程中轮齿接触线与前端面交点到进入端的距离在基圆的投影。

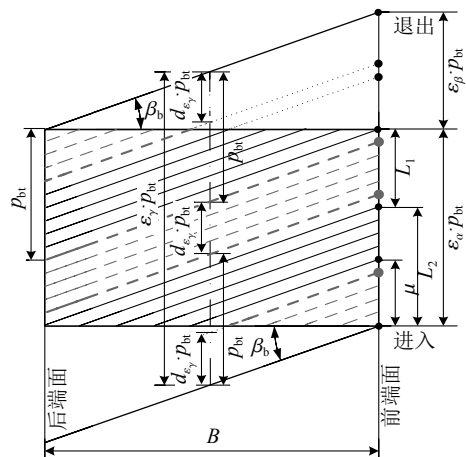


图1 斜齿圆柱齿轮啮合平面

Fig. 1 Meshing plane of helical gear

由图1可知,在一个啮合周期内 μ 由0逐渐增大到 $\varepsilon_\gamma \cdot p_{bt}$ 到后端面退出啮合,由于螺旋角的存在,斜齿轮相对于直齿轮啮合区增加了 $\varepsilon_\beta \cdot p_{bt}$,接触线不再与轴线平行,不同的轮齿宽度引起轴面重合度发生改变,使轮齿接触线分布形式变化比较复杂。当一对轮齿初始进入啮合区时,已有轮齿处于啮合状态,根据传动特点一般在齿顶或齿根啮合时,都有 $\text{ceil}(\varepsilon_\gamma)$ 对轮齿在同时啮合。假定 l 表示单对轮齿接触线的长度,针对不同的端面和轴面重合度关系可以表示为:

当 $\varepsilon_\beta \leq \varepsilon_\alpha$ 时,有:

$$l(\mu) = \begin{cases} \mu / \sin \beta_b, \mu \leq L_2; \\ B / \cos \beta_b, L_2 < \mu \leq \varepsilon_\alpha p_{bt}; \\ (\varepsilon_\gamma p_{bt} - \mu) / \sin \beta_b, \varepsilon_\alpha p_{bt} < \mu \leq \varepsilon_\gamma p_{bt} \end{cases} \quad (1)$$

当 $\varepsilon_\beta \geq \varepsilon_\alpha$ 时,有:

$$l(\mu) = \begin{cases} \mu / \sin \beta_b, \mu \leq \varepsilon_\alpha p_{bt}; \\ \varepsilon_\alpha p_{bt} / \sin \beta_b, \varepsilon_\alpha p_{bt} < \mu \leq \varepsilon_\beta p_{bt}; \\ (\varepsilon_\gamma p_{bt} - \mu) / \sin \beta_b, \varepsilon_\beta p_{bt} < \mu \leq \varepsilon_\gamma p_{bt} \end{cases} \quad (2)$$

式中: $\tan \beta_b = \tan \beta \cos \alpha_t$, $L_1 = \varepsilon_\alpha p_{bt} - L_2$, $p_{bt} = p_t \cos \alpha_t = \frac{\pi m_n}{\cos \beta} \cos \alpha_t$, $\tan \alpha_n = \tan \alpha_t \cos \beta$, $L_2 = B \tan \beta_b$; p_t 为端面分度圆齿距, β 为螺旋角, α_t 为端面压力角, α_n 为法面压力角, m_n 为法面模数。

由于齿轮啮合过程中在 $\mu \in [0, d_{\varepsilon_\gamma} p_{bt}]$ 时,有 $\text{ceil}(\varepsilon_\gamma)$ 对轮齿接触,在 $\mu \in [d_{\varepsilon_\gamma} p_{bt}, p_{bt}]$ 时有 $\text{floor}(\varepsilon_\gamma)$ 对轮齿接触,所以接触线总长以 p_{bt} 为周期不断变化,假定同时啮合的轮齿对数 $n(\mu)$ 为:

$$n(\mu) = \begin{cases} \text{ceil}(\varepsilon_\gamma), \mu \leq d_{\varepsilon_\gamma} p_{bt}; \\ \text{ceil}(\varepsilon_\gamma) - 1, d_{\varepsilon_\gamma} p_{bt} < \mu \leq p_{bt} \end{cases} \quad (3)$$

则在一个基圆齿距内接触线的总长 L_b 可以表示为:

$$L_b(\mu) = \sum_{i=0}^{n-1} l(\mu + i p_{bt}), \mu \in [0, p_{bt}] \quad (4)$$

1.2 轮齿接触线计算验证

轮齿接触线长度与斜齿轮传动的啮合刚度时变特性直接相关, 计算的准确性是保证齿轮传动动态分析的关键。为了验证本文轮齿接触线长度计算的准确性, 利用本文的计算方法针对参考文献[6]中的 H501 和 H951 变位斜齿圆柱齿轮传动进行计算, 在单个轮齿的一个啮合周期内轮齿接触线变化如图 2 所示。由图 2 可知, 本文的计算结果与文献结果完全一致, 由于 H501 和 H951 的重合度 ε_γ 均接近整数 2, 此时总重合度 ε_γ 的小数部分 d_{ε_γ} 近似为 0, 因此啮合刚度最小值处出现尖点。

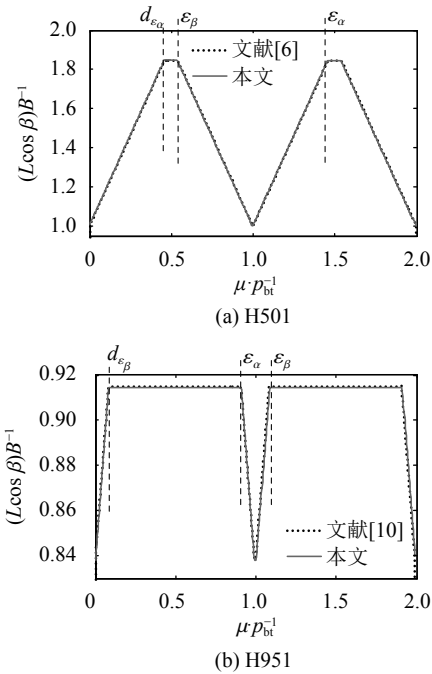


图 2 轮齿接触线变化
Fig. 2 Change of tooth contact line

1.3 斜齿圆柱齿轮的啮合刚度计算

斜齿轮的啮合刚度和轮齿接触线总长成正比, 但在不同接触点又具有不同的啮合刚度, 文献[6–8]分别对直齿和斜齿圆柱齿轮的啮合刚度计算进行了详细分析, 研究表明单对轮齿单位长度啮合刚度可以近似地看作是类抛物线或半正弦波形式变化, 将文献[6–8]中单对齿啮合刚度改写成本文坐标 μ 的形式, 利用 H951 做出的单对齿单位长度啮合刚度 k^u (u 表示文献[6–8]) 近似曲线如图 3 所示。其中: 文献[7]和[8]都是针对直齿轮传动, 最小刚度 $K_{\min}$ 与最大刚度 $K_{\max}$ 比值都近似等于 0.55; 文献[6]主要针对斜齿圆柱齿轮传动, 当 $\alpha_k = \frac{BK_{\min}}{K_{\max} \cos \beta_b} = 0.8$ 时, 其准确性已经进行了论证, 因此本文采用 $k^{[6]}$ 作为单对齿单位长度啮合刚度计算公式。

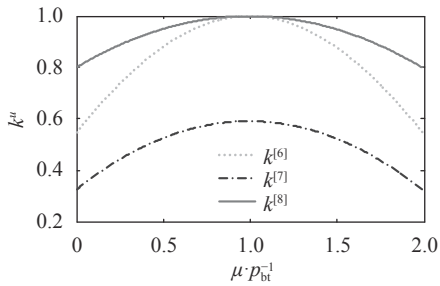


图 3 单对轮齿单位长度啮合刚度
Fig. 3 Meshing stiffness of gear pair in unit length

由于斜齿轮可以看作是由端面上厚度无限小的一系列直齿圆柱齿轮按照特定的转角位错关系堆叠而成, 因此可利用接触线长度和单对齿单位长度啮合刚度求得其啮合刚度。假定轮齿接触线均匀受载, 一个齿距内轮齿接触线长度变化由式(4)计算, 则斜齿轮啮合刚度的计算公式为:

$$K_b(\mu) = K_{\max} \sum_{i=0}^{n-1} l(\mu + ip_{bt}) k_i^u(\mu + ip_{bt}), \mu \in [0, p_{bt}] \quad (5)$$

式中, $k_i^u = k^{[6]}$, 轮齿的最大啮合刚度 $K_{\max}$ 可以根据 ISO 6336—1 标准计算得到。

2 斜齿轮啮合刚度波动影响因素分析

由式(5)可以看出, 当斜齿轮参数变化时, 主要影响端面重合度 ε_α 、轴面重合度 ε_β 和 $K_{\max}$ 的变化, 本节主要考虑重合度对啮合刚度波动的影响, 因此定义啮合刚度变化因子 δ 为:

$$\delta = (K_{\max} - K_{\min}) / K_{\text{ave}} \quad (6)$$

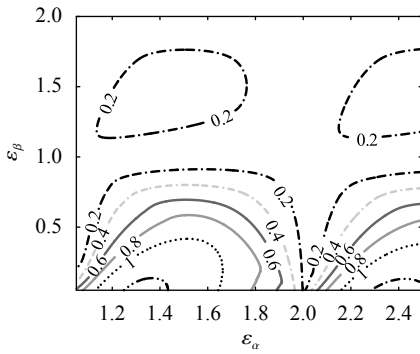
式中, K_{ave} 为齿轮的平均啮合刚度。

针对斜齿轮传动系统, 斜齿轮的弹性模量 $E = 2.11 \times 10^{11}$ Pa, 泊松比 $\nu = 0.33$, 密度 $\rho = 7\,850$ kg/m³。初选传动参数由表 1 给出。

表 1 斜齿轮参数

Tab. 1 Parameters of the helical gear					
参数	参数值	参数	参数值	参数	参数值
z_1	21	$J_1/(\text{kg} \cdot \text{m}^2)$	$1.458\,8 \times 10^{-3}$	b/mm	0.03
z_2	40	$J_2/(\text{kg} \cdot \text{m}^2)$	$4.613\,6 \times 10^{-3}$	ξ_0	0.08
m_1/kg	1.452	r_{b1}/mm	41.68	$k_0/(\text{N} \cdot \text{m}^{-1})$	5.5×10^7
m_2/kg	1.232	r_{b2}/mm	79.39	$T_1/(\text{N} \cdot \text{m})$	80

不同重合度时啮合刚度波动 δ 的变化如图 4 所示。由图 4 可知, 在轴面重合度 ε_β 较小时, 啮合刚度波动较大, 因为螺旋角 β 较小时, 轮齿进入和退出啮合轮齿接触线具有较大变化, 从而导致较大的最大最小啮合刚度差, 使得 δ 较大; 在 ε_α 或 ε_β 接近整数时, 齿轮传动中轮齿啮合对数变化幅度较小, 此时啮合刚度波动 δ 相对较小, 这与文献[2]结果一致。

图 4 δ 随重合度变化的等值线图Fig. 4 Contour map of δ with the contact ratio

3 斜齿轮传动的主共振分析

主要研究齿轮啮合刚度波动、载荷波动和静载荷对系统传动的影响,可以将斜齿轮传动系统简化成一个单自由度系统,假定轴承和轴组合的支撑刚度和阻尼远大于齿轮的啮合刚度,因此可以近似认为齿轮与支座刚性连接,斜齿轮系统仅包含扭转自由度。根据文献[4]的方法,可以将间隙函数 $g_0(x)$ 近似表示为:

$$g_0(x) = d_1x + d_2x^3 = d_1(x + d_0x^3) \quad (7)$$

式中: x 为无量纲化的齿轮动态误差; $d_0 = d_2/d_1$, 当 $d_1 = 0.463$, $d_2 = 0.016\ 04$ 时, 拟合的均方差为0.21, 确定系数为0.989 8, 此时该函数能够较精确地表示齿轮系统的接触、脱齿和齿背冲击现象; 同时考虑轮齿受到的载荷波动, 假定 $f_t = f_0 + f_e$, f_0 为静载荷, 载荷波动 $f_e = f \cos \omega\tau$, 此时系统方程类似于Duffing方程:

$$\ddot{x} + \eta\dot{x} + d_1(1 + \delta \cos \omega\tau)(x + d_0x^3) = f_0 + f \cos \omega\tau \quad (8)$$

式中, η 为阻尼比, ω 为激励频率, τ 为无量纲时间。本文应用多尺度法对系统的振动特性进行分析, 引入高阶小量 ε , $|\varepsilon| \ll 1$, 时间尺度 $T_r = \varepsilon\tau$, 轮齿的啮合频率 $\omega = \omega_0 + \omega_1\varepsilon + \omega_2\varepsilon^2 + \dots$, $\omega_0 = \sqrt{d_1}$ 为无量纲化的系统固有频率。假定方程(8)的解可表示为:

$$x(t) = x_0(T_0, T_1, \dots) + \varepsilon x_1(T_0, T_1, \dots) + \varepsilon^2 x_2(T_0, T_1, \dots) + \dots \quad (9)$$

3.1 主共振的稳态响应

在实际齿轮传动系统中, 当激励频率接近系统固有频率时发生主共振, 此参数激励波动以及激励频率波动均为高阶小量, 因此必须重新标度阻尼、非线性项、激励波动和啮合刚度波动, 令 $\eta = 2\varepsilon\mu$, $\delta = \varepsilon k$, $d_0 = \varepsilon d_0$, $f = \varepsilon f$, 则有:

$$\ddot{x} + 2\varepsilon\mu\dot{x} + d_1(1 + \varepsilon k \cos \omega\tau)(x + \varepsilon d_0x^3) = f_0 + \varepsilon f \cos \omega\tau \quad (10)$$

引入激励频率失调参数 σ 使得 $\omega = \omega_0 + \varepsilon\sigma$, 设导

算子 $D_n = \frac{\partial}{\partial T_n}$, 将近似解式(9)代入齿轮的系统方程(10), 令 ε 同次幂的系数相等可得:

$$\begin{cases} D_0^2 x_0 + \omega_0^2 x_0 = f_0, \\ D_0^2 x_1 + \omega_0^2 x_1 = f \cos \omega\tau - 2D_0 D_1 x_0 - \\ 2\mu D_0 x_0 - d_2 x_0^3 - \omega_0^2 k \cos \omega\tau x_0 \end{cases} \quad (11)$$

假定方程(11)的解为:

$$x_0 = A(T_1, T_2, \dots) e^{i\omega_0 T_0} + \bar{A}(T_1, T_2, \dots) e^{-i\omega_0 T_0} \quad (12)$$

式中, $\bar{A}$ 为 A 的复共轭, 令 $\cos \omega\tau = (e^{i\omega\tau} + e^{-i\omega\tau})/2$, 将式(12)代入式(11)可得:

$$\begin{aligned} D_0^2 x_1 + \omega_0^2 x_1 = & \frac{f e^{i\omega\tau}}{2} - \frac{\omega_0^2 k}{2} [A e^{i(\omega_0 T_0 + \omega\tau)} + f_0 e^{i\omega\tau} + A e^{i(\omega_0 T_0 - \omega\tau)}] - \\ & 2i\omega_0 [D_1 A + \mu A] e^{i\omega_0 T_0} - d_2 [A^3 e^{3i\omega_0 T_0} + \\ & \frac{f_0^3}{2} + 3f_0 A^2 e^{2i\omega_0 T_0} + 3|A|^2 A e^{i\omega_0 T_0} + \\ & 3f_0^2 A e^{i\omega_0 T_0} + 3f_0 |A|^2] + \text{cc} \end{aligned} \quad (13)$$

式中, cc表示前面各项的共轭。设 $A(T_1) = \frac{a(T_1)}{2} e^{i\beta(T_1)}$, 将其代入式(13), 为了消去永年项, 并且分离其实部和虚部, 令 $\varphi = \beta - \sigma T_1$, 可得:

$$\begin{cases} D_1 a = -a\mu + \frac{(f_0 \omega_0^2 k - f)}{2\omega_0} \sin \varphi, \\ a D_1 \varphi = -\sigma a + \frac{(f_0 \omega_0^2 k - f)}{2\omega_0} \cos \varphi + \\ \frac{3d_2 a}{8\omega_0} (a^2 + 4f_0^2) \end{cases} \quad (14)$$

为确定微分系统式(14)对应稳态运动的振幅 $\bar{a}$ 和相位 $\bar{\varphi}$, 令 $D_1 a$ 和 $D_1 \varphi$ 为0, 通过确定自治系统式(14)雅克比矩阵在平衡点的特征值变化, 可以得到系统稳定的条件为:

$$\left[\sigma - \frac{3d_2}{8\omega_0} (3\bar{a}^2 + 4f_0^2) \right] \left[\sigma - \frac{3d_2}{8\omega_0} (\bar{a}^2 + 4f_0^2) \right] + \mu^2 > 0 \quad (15)$$

3.2 主共振的数值分析

在主共振分析中, 斜齿轮传动参数与表1一致, 无量纲化的初始静载荷 $f_0 = 0.215$, 载荷波动幅度 $f = 0.2$, 啮合刚度波动幅度 $k = 0.2$, 啮合阻尼 $\mu = 0.1$, 分析中取小参数 $\varepsilon = 0.02$ 。为了更加全面了解齿轮传动系统的动态特性, 主要探讨载荷波动、啮合刚度波动和静载荷变化对传动的影响, 本文响应曲线的灰色部分为不稳定分支。

3.2.1 外加激励波动对传动的影响

图5(a)为不同载荷波动 f 时主共振的幅频变化曲线, 当 f 逐渐增大时, 主共振稳态幅值和触发主共振不稳定的最小频率增大, 灰色不稳定分支扩展, 主共振稳定性变差, 但只有当 f 增大到一定值后才会导

致主共振稳态振幅的“跳跃”。图5(b)为 f 与振幅 a 的变化关系,当激励频率 ω 小于系统的临界频率时, a 随 f 增大而增大, f 变化不会导致主共振的不稳定;当 ω 大于临界频率后,特定的 f 会导致主共振出现多个振幅分支,同时 a 也大幅增加,从而引起系统的不稳定,这也称为滞后现象;还可以看出随着 ω 的增大, a 增加, f 诱发主共振不稳定的可能性增大。因此,传动载荷波动直接影响斜齿轮传动的稳定性,在 ω_0 附近工作的斜齿轮传动中,较小的 f 都有可能引起系统不稳定,较大的 f 有时甚至可能引起齿轮的破坏。

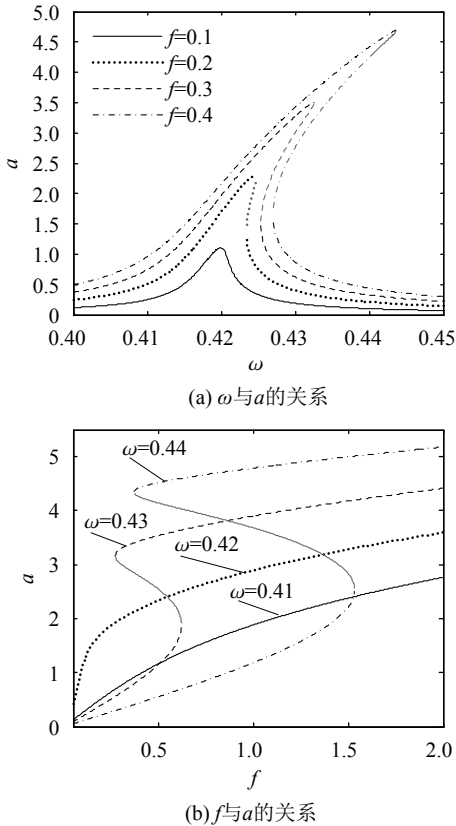


图5 f 对主共振的影响曲线

Fig. 5 Effect curves of f on main resonance

3.2.2 啮合刚度波动对传动的影响

图6(a)分别比较了不同啮合刚度波动 k 时 a 的变化曲线。由图6(a)可知,随着 k 的增加,主共振的最大稳态幅值逐渐减小,不稳定分支也不断缩减,因此一定的 k 可以缩减 a ,有利于主共振的稳定性,但是 k 对主共振的影响较小。图6(b)表明:齿轮系统工作在低于主共振临界频率的工况下, k 的改变不会触发主共振的不稳定, k 的增加会使 a 减小;当 ω 大于临界频率后, ω 越大触发主共振不稳定的最小 k 越小,因此较小的 k 亦可诱发系统高速传动的大幅振动。一般齿轮传动中啮合刚度波动始终存在,当工作在接近主共振频率的不稳定高速传动中时,较小的 k 就会导致齿轮系统主共振的不稳定。

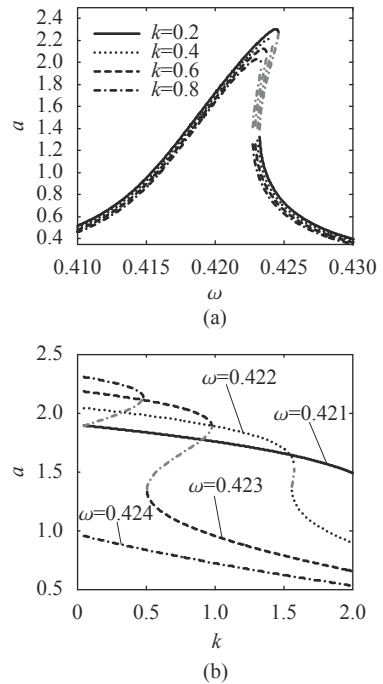


图6 k 对主共振的影响曲线

Fig. 6 Effect curves of k on main resonance

在齿轮结构从参数变化时,斜齿轮的重合度随之改变,从而引起啮合刚度的波动。图7给出斜齿轮重合度变化对主共振稳定性的影响,其中,灰色区域为稳定区域, $\omega=0.424$ 和 0.423 时对应的为不稳定区域。当 ω 大于临界频率处于不稳定区域内时,高频激励作用下,多数斜齿轮传动会出现主共振的不稳定,而且也注意到在 $\varepsilon_\beta < 0.2$, ε_α 在1.4附近时,虽然 k 较大但不会出现主共振的不稳定;当 $\omega=0.422$ 时,在图6(b)中较大的 k 也会导致主共振不稳定,但是在 $0 < \varepsilon_\beta < 2$, $1 < \varepsilon_\alpha < 2.5$ 范围内 $k < 1.5$ 时,也不会引起主共振的不稳定。

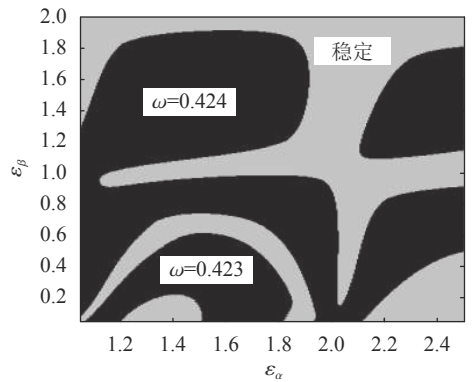


图7 重合度对主共振稳定性的影响

Fig. 7 Effect of contact ratio on main resonance

3.2.3 静载荷变化对主共振的影响

图8(a)为不同静载荷 f_0 时主共振幅频曲线的变化情况。由图8(a)可知, f_0 增大, a 减小,灰色不稳定

分支也逐渐缩短,系统的频率响应曲线右移,主共振峰值频率增大,主共振的稳定性增加。在应用中由于 f_0 增大,轮齿表面形变增加,使得轮齿接触面积增大,而且当 f_0 增加, f 不变时, f 对系统的相对作用下降,因此适当增大外载荷有利于齿轮系统的稳定传动。图8(b)为不同激励频率时静载荷对主共振稳态幅值的影响曲线,当 $\omega=0.423$ 小于临界频率时, f_0 增加, a 减小;当 ω 大于临界频率时, f_0 在一定范围内会引起主共振的不稳定, ω 越小, f_0 引起主共振不稳定的可能性越大,而且主共振稳态峰值随 f_0 的增大逐渐减小,进一步说明在较大载荷传递中的齿轮系统稳定性更好。

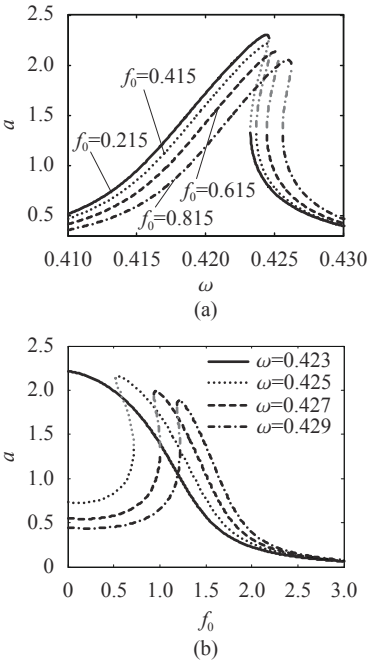


图 8 f_0 对主共振的影响曲线

Fig. 8 Effect curves of f_0 on main resonance

4 结 论

通过对斜齿圆柱齿轮传动特点的分析,得到斜齿轮啮合刚度计算方法,并将啮合刚度变化规律应用于斜齿轮的动力学分析,利用多尺度法获得了斜齿轮主共振的影响因素,主要得到以下结论:

- 1) 本文提出的啮合刚度计算方法能够较快速、准确地确定斜齿轮啮合刚度变化规律。
- 2) 将斜齿轮啮合刚度波动引入斜齿轮的动态特

性分析中,能够更加准确、普遍地反映斜齿轮传动的一般特性。

3) 特定啮合刚度波动时,静载荷增加,斜齿轮传动主共振频率增大,稳定性增加,载荷波动增加,主共振幅值增大,稳定性变差。

4) 外加载荷一定时,啮合刚度波动增加时,主共振幅值有小幅减小,稳定性增加,但随激励频率增加,斜齿轮传动主共振发生不稳定的可能性增加,即使较小的啮合刚度波动也会触发主共振的不稳定。

参考文献:

[1] Hedlund J,Lehtovaara A.A parameterized numerical model for the evaluation of gear mesh stiffness variation of a helical gear pair[J].*Drive System Technique*,2012,222(7):1321–1327.

[2] Gu X,Velex P,Sainsot P,et al.Analytical investigations on the mesh stiffness function of solid spur and helical gears[J].*Journal of Mechanical Design*,2016,137(6):063301.

[3] Wan Z,Cao H,Zi Y,et al.Mesh stiffness calculation using an accumulated integral potential energy method and dynamic analysis of helical gears[J].*Mechanism & Machine Theory*, 2015,92:447–463.

[4] Moradi H,Salarieh H.Analysis of nonlinear oscillations in spur gear pairs with approximated modelling of backlash nonlinearity[J].*Mechanism & Machine Theory*,2012,51(5): 14–31.

[5] Lu J W,Chen H,Zeng F L,et al.Influence of system parameters on dynamic behavior of gear pair with stochastic backlash[J].*Meccanica*,2014,49(2):429–440.

[6] Marques P,Martins R,Seabra J.Analytical load sharing and mesh stiffness model for spur/helical and internal/external gears—Towards constant mesh stiffness gear design[J].*Mechanism & Machine Theory*,2017,113:126–140.

[7] Sánchez M B,Pleguezuelos M,Pedrero J I.Approximate equations for the meshing stiffness and the load sharing ratio of spur gears including hertzian effects[J].*Mechanism & Machine Theory*,2017,109:231–249.

[8] Rincon A F D,Viadero F,Iglesias M,et al.A model for the study of meshing stiffness in spur gear transmissions[J].*Mechanism & Machine Theory*,2013,61:30–58.

(编辑 黄小川)

引用格式: Shi Huirong,Zhao Dongyan,Li Zonggang.Meshing stiffness calculation and main resonance analysis of helical gear transmission[J].*Advanced Engineering Sciences*,2019,51(5):143–148.[石慧荣,赵冬艳,李宗刚.斜齿轮传动的啮合刚度计算及其主共振分析[J].*工程科学与技术*,2019,51(5):143–148.]