对偶化范畴的张量积构造

献给刘绍学教授 90 华诞

韩阳^{1,2*}, 张凝鹏^{1,2}

1. 中国科学院数学与系统科学研究院, 北京 100190;

2. 中国科学院大学数学科学学院, 北京 100049

E-mail: hany@iss.ac.cn, zhang.ningmei@hotmail.com

收稿日期: 2017-08-23; 接受日期: 2018-04-02; 网络出版日期: 2018-09-04; * 通信作者

国家自然科学基金 (批准号: 11571341) 资助项目

摘要 本文证明了一个局部有限箭图的路范畴模一个单项式容许理想所得的剩余范畴与一个对偶化范畴的张量积的加法包的幂等完备是对偶化的. 从而, 此张量积范畴的有限表现函子范畴是对偶化的且有几乎可裂序列. 作为应用, 本文证明了一个对偶化范畴上的有限表现函子范畴的态射范畴与态射合成范畴及各种各样的 n -(循环) 复形范畴有几乎可裂序列.

关键词 对偶化范畴 范畴的张量积 箭图的表示 有限表现函子 几乎可裂序列

MSC (2010) 主题分类 16G70, 16G20, 18A25, 18E10

1 引言

本文中, 总设 k 为一个交换 Artin 环. 记 $\text{Mod } k$ 为 k -模范畴, $\text{mod } k$ 为有限生成 k -模范畴. 设 E 为 $k/\text{rad } k$ 在 $\text{Mod } k$ 中的内射包, $D := \text{Hom}_k(-, E)$. 设 $\mathcal{A}$ 是一个 Hom-有限的 Krull-Schmidt k -范畴, 若对偶 $D : \text{Fun}_k(\mathcal{A}^{\text{op}}, \text{mod } k) \rightarrow \text{Fun}_k(\mathcal{A}, \text{mod } k)$ 可诱导对偶 $D : \text{mod } \mathcal{A} \rightarrow \text{mod } \mathcal{A}^{\text{op}}$, 则称 $\mathcal{A}$ 是一个对偶化 k -范畴或对偶化 k -簇. 对偶化 k -范畴是由 Auslander 和 Reiten 作为 Artin k -代数的推广而引入的 (参见文献 [1]). 众所周知, 在代数表示理论中, 几乎可裂序列的存在性至关重要 (参见文献 [2, 第 2 章]). 而 k -范畴 $\mathcal{A}$ 是对偶化的, 可确保范畴 $\text{Mod } \mathcal{A}$ 中所有有限表现函子构成的满子范畴 $\text{mod } \mathcal{A}$ 有几乎可裂序列 (参见文献 [2, 定理 7.1.3]). 于是对偶化范畴的构造的重要性不言而喻. 由给定的对偶化 k -范畴 $\mathcal{A}$, 我们已知一些构造新的对偶化 k -范畴的方法, 如 $\text{mod } \mathcal{A}$ (参见文献 [1, 命题 2.6])、 $\mathcal{A}$ 的函子有限 Krull-Schmidt 满 k -子范畴 (参见文献 [3, 定理 2.3] 和 [4, 第 9.7 小节, 例 5])、 $\mathcal{A}$ 模由 $\mathcal{A}$ 中一个对象 A 的恒等态射 1_A 生成的理想 (1_A) 所得的剩余范畴 $\mathcal{A}/(1_A)$ (参见文献 [4, 第 9.7 小节, 例 8])、 $\text{mod } \mathcal{A}$ 上的有界复形范畴 $C^b(\text{mod } \mathcal{A})$ (参见文献 [5, 定理 4.3]).

英文引用格式: Han Y, Zhang N M. A construction of dualizing categories by tensor product of categories (in Chinese). Sci Sin Math, 2018, 48: 1699–1716, doi: 10.1360/N012017-00189

本文将提供对偶化 k -范畴的一个新的构造方法—张量积构造. 利用此方法, 可由一个给定的对偶化 k -范畴构造出大量新的对偶化 k -范畴. 本文主要结果如下: 设 $\mathcal{A}$ 为一个对偶化 k -范畴, Q 为一个局部有限箭图, kQ 为 Q 的路 k -范畴, I 为 kQ 的一个单项式容许理想, 即由 Q 中一些路生成的容许理想, $\mathcal{B} := kQ/I$ 为 kQ 模 I 所得的剩余范畴. 我们将证明 k -范畴 $\mathcal{B}$ 与 $\mathcal{A}$ 的张量积 $\mathcal{B} \otimes_k \mathcal{A}$ 的加法包 $\oplus(\mathcal{B} \otimes_k \mathcal{A})$ 的幂等完备 $|\oplus(\mathcal{B} \otimes_k \mathcal{A})$ 为对偶化 k -范畴. 进而证明 $\text{mod}(\mathcal{B} \otimes_k \mathcal{A})$ 为对偶化 k -范畴且有几乎可裂序列, 从而推广了文献 [1, 命题 2.6] 和 [5, 定理 4.3] 等已知结果. 作为本文主要结果的一个应用, 我们证明了对偶化 k -范畴 $\mathcal{A}$ 上的有限表现函子范畴 $\text{mod}\mathcal{A}$ 的态射范畴及态射合成范畴有几乎可裂序列.

1942 年, Mayer^[6] 为创建新的同调理论引入了 n -复形的概念 (参见文献 [7]). 这一广义同调理论有诸多后续研究 (参见文献 [8–12]). 文献 [13, 14] 刻画了 n -复形范畴中的投射对象及内射对象. 文献 [15–18] 研究了 n -复形范畴的同伦范畴及导出范畴. 此外, n -复形也被用于研究广义 Koszul 代数 (参见文献 [19–21]), 而支撑在某一固定区间的复形范畴在代数的导出表示型理论中发挥了重要的作用 (参见文献 [5, 22–24]). 作为本文主要结果的又一个应用, 我们将证明 $\text{mod}\mathcal{A}$ (分别地, 满足 $\text{gl.dim}(\text{mod}\mathcal{A}) < \infty$ 的 $\mathcal{A}$) 上的有界 n -复形范畴 $C_n^b(\text{mod}\mathcal{A})$ (分别地, $C_n^b(\mathcal{A})$), 以及 $\text{mod}\mathcal{A}$ (分别地, $\mathcal{A}$) 上的支撑在区间 $[1, m]$ 中的 n -复形范畴 $C_n^m(\text{mod}\mathcal{A})$ (分别地, $C_n^m(\mathcal{A})$), 有几乎可裂序列. 从而将文献 [5] 中的一些结果由复形情形推广到 n -复形情形.

Peng 和 Xiao 在文献 [25, 第 7 节, 附录] 中引入了 n -循环复形或 n -周期复形, 其被用于实现单 Lie 代数及其量子包络代数 (参见文献 [25–27]). 作为本文主要结果的另一个应用, 我们将证明 $\text{mod}\mathcal{A}$ (分别地, 满足 $\text{gl.dim}(\text{mod}\mathcal{A}) < \infty$ 的 $\mathcal{A}$, 满足 $\text{gl.dim}(\text{mod}\mathcal{A}) \leq 1$ 的 $\mathcal{A}$) 上的 n -循环复形 (分别地, 有界 n -循环复形、 n -循环复形) 范畴 $C_{\mathbb{Z}_n}(\text{mod}\mathcal{A})$ (分别地, $C_{\mathbb{Z}_n}^b(\mathcal{A})$ 、 $C_{\mathbb{Z}_n}(\mathcal{A})$) 有几乎可裂序列. 注意到文献 [27, 28] 中甚至描述了有限维遗传代数 A 上的有限生成投射模范畴 $\text{proj}A$ 上的 n -循环复形范畴 $C_{\mathbb{Z}_n}(\text{proj}A)$ 中的几乎可裂序列.

2 预备知识

本节将介绍关于各种各样的范畴、函子及几乎可裂序列等的记号与术语.

2.1 范畴与函子

若范畴 $\mathcal{C}$ 中的所有对象的同构类构成一个集合, 则称 $\mathcal{C}$ 是骨架小的 (skeletally small). 在文献 [4, 第 2.1 小节] 中, 骨架小范畴被称为苗条 (svelte) 范畴. 对于骨架小范畴 $\mathcal{C}$ 和范畴 $\mathcal{D}$, 记 $\text{Fun}(\mathcal{C}, \mathcal{D})$ 为 $\mathcal{C}$ 到 $\mathcal{D}$ 的函子范畴, 其对象为 $\mathcal{C}$ 到 $\mathcal{D}$ 的所有函子, 其态射为函子间的所有自然变换.

若范畴 $\mathcal{A}$ 的所有态射集均为 k -模且态射的合成是 k -双线性的, 则称 $\mathcal{A}$ 为一个 k -范畴 (参见文献 [4, 第 2.1 小节]). 若 k -范畴 $\mathcal{A}$ 到 k -范畴 $\mathcal{B}$ 的函子 $F: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ 满足: 对任意 $A, A' \in \mathcal{A}$, 映射 $F(A, A'): \mathcal{A}(A, A') \rightarrow \mathcal{B}(FA, FA')$ 都是 k -线性的, 则称 F 为一个 k -函子. 对于骨架小 k -范畴 $\mathcal{A}$ 和 k -范畴 $\mathcal{B}$, 记 $\text{Fun}_k(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ 为 $\mathcal{A}$ 到 $\mathcal{B}$ 的 k -函子范畴, 即由函子范畴 $\text{Fun}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ 中的所有 k -函子组成的满子范畴, 其为一个 k -范畴.

两个 k -范畴 $\mathcal{A}$ 与 $\mathcal{B}$ 的张量积为 k -范畴 $\mathcal{A} \otimes_k \mathcal{B}$, 其对象为所有的对 (A, B) , 其 Hom 集

$$\left(\mathcal{A} \otimes_k \mathcal{B} \right) ((A, B), (A', B')) := \mathcal{A}(A, A') \otimes_k \mathcal{B}(B, B'),$$

其中 $A, A' \in \mathcal{A}$, $B, B' \in \mathcal{B}$ (参见文献 [29, 第 13 页]). 众所周知, 若 $\mathcal{A}$ 和 $\mathcal{B}$ 为骨架小 k - 范畴, $\mathcal{C}$ 为 k - 范畴, 则有范畴同构 $\text{Fun}_k(\mathcal{A}, \text{Fun}_k(\mathcal{B}, \mathcal{C})) \cong \text{Fun}_k(\mathcal{A} \otimes_k \mathcal{B}, \mathcal{C})$ (参见文献 [29, 第 13 页]).

对于骨架小 k - 范畴 $\mathcal{A}$, 我们用 $\text{Mod}\mathcal{A}$ 记右 $\mathcal{A}$ - 模范畴, 即从 $\mathcal{A}$ 的反范畴 $\mathcal{A}^{\text{op}}$ 到范畴 $\text{Mod}k$ 的 k - 函子范畴 $\text{Fun}_k(\mathcal{A}^{\text{op}}, \text{Mod}k)$. 显然, $\text{Mod}\mathcal{A}$ 是一个 Abel 范畴. 若对于函子 $M \in \text{Mod}\mathcal{A}$, 存在 $A \in \mathcal{A}$, 使得 $M \cong \mathcal{A}(-, A)$, 则称 M 为可表的. 若对于函子 $M \in \text{Mod}\mathcal{A}$, 存在满态射 $\bigoplus_{i \in I} \mathcal{A}(-, A_i) \rightarrow M$, 其中 I 为有限指标集, $A_i \in \mathcal{A}$, 则称 M 为有限生成的. 若对于函子 $M \in \text{Mod}\mathcal{A}$, 存在正合列 $\bigoplus_{j \in J} \mathcal{A}(-, A'_j) \rightarrow \bigoplus_{i \in I} \mathcal{A}(-, A_i) \rightarrow M \rightarrow 0$, 其中 I 和 J 为两个有限指标集, $A_i, A'_j \in \mathcal{A}$, 则称 M 为有限表现的. 显然, 若 $\mathcal{A}$ 为骨架小加法 k - 范畴, 则函子 $M \in \text{Mod}\mathcal{A}$ 为有限生成的当且仅当存在满态射 $\mathcal{A}(-, A) \rightarrow M$, 其中 $A \in \mathcal{A}$, 函子 $M \in \text{Mod}\mathcal{A}$ 为有限表现的当且仅当存在正合列 $\mathcal{A}(-, A') \rightarrow \mathcal{A}(-, A) \rightarrow M \rightarrow 0$, 其中 $A, A' \in \mathcal{A}$. 记 $\text{mod}\mathcal{A}$ 为由所有有限表现函子构成的 $\text{Mod}\mathcal{A}$ 的满子范畴 (参见文献 [4, 第 22 页]). 众所周知, $\text{mod}\mathcal{A}$ 是 Abel 范畴当且仅当 $\mathcal{A}$ 有伪核 (pseudo-kernel), 即对于任意态射 $f \in \mathcal{A}(A', A)$, 存在态射 $f' \in \mathcal{A}(A'', A')$, 使得序列 $\mathcal{A}(-, A'') \xrightarrow{\mathcal{A}(-, f')} \mathcal{A}(-, A') \xrightarrow{\mathcal{A}(-, f)} \mathcal{A}(-, A)$ 正合 (参见文献 [30, 第 102 页, 命题]).

2.2 对偶化范畴与几乎可裂序列

若 k - 范畴 $\mathcal{A}$ 的所有 Hom 集 $\mathcal{A}(A, A')$ 都是有限生成 k - 模, 其中 $A, A' \in \mathcal{A}$, 则称 $\mathcal{A}$ 是 Hom - 有限的. 若骨架小加法 k - 范畴 $\mathcal{A}$ 中每个对象均为自同态代数为局部代数的不可分解对象的有限直和, 则称 $\mathcal{A}$ 是 Krull-Schmidt 的. 在文献 [4, 第 3.1 小节] 中, Krull-Schmidt 范畴被称为多腔 (multilocular) 范畴. 一个骨架小 Hom - 有限加法 k - 范畴 $\mathcal{A}$ 是 Krull-Schmidt 的当且仅当 $\mathcal{A}$ 中所有幂等元均可裂 (参见文献 [4, 定理 3.3]), 即对于每个幂等元 $e \in \mathcal{A}(A, A)$, 均存在 $A' \in \mathcal{A}$, $f \in \mathcal{A}(A, A')$ 和 $g \in \mathcal{A}(A', A)$, 使得 $e = gf$ 且 $fg = 1_{A'}$.

若 Hom - 有限 Krull-Schmidt k - 范畴 $\mathcal{A}$ 满足: 自然地, 对偶 $D : \text{Fun}_k(\mathcal{A}^{\text{op}}, \text{mod}k) \rightarrow \text{Fun}_k(\mathcal{A}, \text{mod}k)$, $F \mapsto DF$, 其中 $(DF)(A) := D(F(A))$, $(DF)(f) := D(F(f))$, $\forall A \in \mathcal{A}$, $f \in \mathcal{A}(A, A')$, 诱导对偶 $D : \text{mod}\mathcal{A} \rightarrow \text{mod}\mathcal{A}^{\text{op}}$, 则称 $\mathcal{A}$ 为一个对偶化 k - 范畴或对偶化 k - 簇. 对偶化 k - 范畴为 Auslander 和 Reiten 作为 Artin k - 代数的推广引入的 (参见文献 [1]). 对于任一个 Artin k - 代数 Λ , 有限生成投射 Λ - 模范畴 $\text{proj}\Lambda$ 和有限生成 Λ - 模范畴 $\text{mod}\Lambda$ 均为对偶化 k - 范畴 (参见文献 [1, 命题 2.5 和 2.6]). 若 Hom - 有限 Krull-Schmidt k - 范畴 $\mathcal{A}$ 满足: 对于每个对象 $A \in \mathcal{A}$, 只存在 $\mathcal{A}$ 中有限多个不可分解对象 A' 的同构类, 使得 $\mathcal{A}(A', A) \neq 0$ 或 $\mathcal{A}(A, A') \neq 0$, 则称 $\mathcal{A}$ 为一个局部有界 k - 范畴. 此为文献 [31, 第 2.1 小节] 中的局部有界 k - 范畴的加法化. 每个局部有界 k - 范畴都是对偶化 k - 范畴 (参见文献 [2, 命题 7.1.5]).

设 $\mathcal{A}$ 为一个 Krull-Schmidt k - 范畴. 若 $\mathcal{A}$ 中态射 $g : Y \rightarrow Z$ 非可裂满态射, 且对于任一个非可裂满态射 $g' : Y' \rightarrow Z$ 都存在态射 $g'' : Y' \rightarrow Y$ 使得 $g' = gg''$, 则称 g 为 $\mathcal{A}$ 中一个右几乎可裂态射. 若对于 $\mathcal{A}$ 中任一个不可分解对象 Z 都存在一个以 Z 结尾的右几乎可裂态射, 则称 $\mathcal{A}$ 有右几乎可裂态射. 若 $\mathcal{A}$ 中态射 $f : X \rightarrow Y$ 非可裂单态射, 且对于任一个非可裂单态射 $f' : X \rightarrow Y'$ 都存在态射 $f'' : Y \rightarrow Y'$ 使得 $f' = f''f$, 则称 f 为 $\mathcal{A}$ 中一个左几乎可裂态射. 若对于 $\mathcal{A}$ 中任一个不可分解对象 X 都存在一个以 X 起始的左几乎可裂态射, 则称 $\mathcal{A}$ 有左几乎可裂态射. 若 $\mathcal{A}$ 既有左几乎可裂态射又有右几乎可裂态射, 则称 $\mathcal{A}$ 有几乎可裂态射.

设 $\mathcal{A}$ 为一个加法 k - 范畴. 若 $\mathcal{A}$ 中可合成态射 $X \xrightarrow{i} Y \xrightarrow{d} Z$ 满足: i 为 d 的核且 d 为 i 的余核, 则称态射对 (i, d) 是正合的. 设 $\mathcal{E}$ 为一个由正合态射对 $X \xrightarrow{i} Y \xrightarrow{d} Z$ 构成的在同构下封

闭的类. 类 $\mathcal{E}$ 中的正合态射对称为合并 (conflation). 一个合并 (i, d) 中的态射 i 和 d 分别称为膨胀 (inflation) 和紧缩 (deflation). 称类 $\mathcal{E}$ 为 $\mathcal{A}$ 上的一个正合结构, 并称 $(\mathcal{A}, \mathcal{E})$ 为一个正合 k - 范畴 (参见文献 [4, 第 9.1 小节] 和 [32, 第 1.1 小节以及附录]), 若其满足下列公理:

(E1) 两个紧缩的合成成为紧缩.

(E2) 对于任一个 $f \in \mathcal{A}(Z', Z)$ 及任一个紧缩 $d \in \mathcal{A}(Y, Z)$, 存在 $Y' \in \mathcal{A}$, $f' \in \mathcal{A}(Y', Y)$ 和紧缩 $d' \in \mathcal{A}(Y', Z')$ 使得 $df' = fd'$.

(E3) 恒等态射为紧缩. 若合成 de 为紧缩, 则 d 亦为紧缩.

(E3^{op}) 恒等态射为膨胀. 若合成 ji 为膨胀, 则 i 亦为膨胀.

若 $(\mathcal{A}, \mathcal{E})$ 为一个骨架小正合 k - 范畴, 则 $(\mathcal{A}^{\text{op}}, \mathcal{E}^{\text{op}})$ 亦为一个正合 k - 范畴, 其中 $\mathcal{E}^{\text{op}} := \{(d^{\text{op}}, i^{\text{op}}) \mid (i, d) \in \mathcal{E}\}$ (参见文献 [4, 第 9.1 小节, 例 2]). 显然, 一个 Abel 范畴有一个自然的正合结构, 其合并为所有短正合列.

设 $(\mathcal{A}, \mathcal{E})$ 为一个 Krull-Schmidt 正合 k - 范畴. 若 $\mathcal{E}$ 中的合并 $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$ 中的 f 为左几乎可裂态射且 g 为右几乎可裂态射, 则称 (f, g) 为 $(\mathcal{A}, \mathcal{E})$ 中一个几乎可裂序列 (参见文献 [32, 第 2.2 小节]). 若 $\mathcal{A}$ 有几乎可裂态射, 且对于任一个不可分解非 $\mathcal{E}$ - 投射对象 Z 均存在以 Z 结尾的几乎可裂序列, 对于任一个不可分解非 $\mathcal{E}$ - 内射对象 X 均存在以 X 起始的几乎可裂序列, 则称 $(\mathcal{A}, \mathcal{E})$ 有几乎可裂序列. 众所周知, 若 $\mathcal{A}$ 为对偶化 k - 范畴, 则 $\text{mod } \mathcal{A}$ 有几乎可裂序列 (参见文献 [2, 定理 7.1.3]).

设 $\mathcal{A}$ 为一个加法 k - 范畴, $\mathcal{C}$ 为 $\mathcal{A}$ 的一个加法满子 k - 范畴. 若对于任一个 $A \in \mathcal{A}$, 函子 $\mathcal{A}(-, A)$ 在 $\mathcal{C}$ 上的限制 $\mathcal{A}(-, A) \mid \mathcal{C}$ 均为 $\mathcal{C}$ 上的有限生成函子, 即存在满态射 $\mathcal{C}(-, C) \twoheadrightarrow \mathcal{A}(-, A) \mid \mathcal{C}$, 其中 $C \in \mathcal{C}$, 则称 $\mathcal{C}$ 在 $\mathcal{A}$ 中是反变有限的. 等价地, 若对于任一个 $A \in \mathcal{A}$ 均存在态射 $C \rightarrow A$ (称为 A 在 $\mathcal{C}$ 中的右 $\mathcal{C}$ - 逼近), 其中 $C \in \mathcal{C}$, 使得对于任意 $C' \in \mathcal{C}$ 序列 $\mathcal{C}(C', C) \rightarrow \mathcal{A}(C', A) \rightarrow 0$ 都是正合的, 则 $\mathcal{C}$ 在 $\mathcal{A}$ 中是反变有限的. 对偶地, 若对于任一个 $A \in \mathcal{A}$, 函子 $\mathcal{A}(A, -)$ 在 $\mathcal{C}$ 上的限制 $\mathcal{A}(A, -) \mid \mathcal{C}$ 均为 $\mathcal{C}$ 上的有限生成函子, 即存在满同态 $\mathcal{C}(C, -) \twoheadrightarrow \mathcal{A}(A, -) \mid \mathcal{C}$, 其中 $C \in \mathcal{C}$, 则称 $\mathcal{C}$ 在 $\mathcal{A}$ 中是共变有限的. 等价地, 若对于任一个 $A \in \mathcal{A}$ 均存在态射 $C \rightarrow A$ (称为 A 在 $\mathcal{C}$ 中的左 $\mathcal{C}$ - 逼近), 其中 $C \in \mathcal{C}$, 使得对于任意 $C' \in \mathcal{C}$ 序列 $\mathcal{C}(C, C') \rightarrow \mathcal{A}(A, C') \rightarrow 0$ 都是正合的, 则 $\mathcal{C}$ 在 $\mathcal{A}$ 中是共变有限的. 若 $\mathcal{C}$ 在 $\mathcal{A}$ 中既是反变有限的又是共变有限的, 则称 $\mathcal{C}$ 在 $\mathcal{A}$ 中是函子有限的. 上述定义是由 Auslander 和 Smalø 在文献 [33, 第 3 节, 第 81 页] 中引入的. 若一个 Krull-Schmidt 正合 k - 范畴 $(\mathcal{A}, \mathcal{E})$ 有几乎可裂序列, 且 $\mathcal{C}$ 为 $\mathcal{A}$ 的在合并与直和项下封闭的函子有限满子 k - 范畴, 则 $(\mathcal{C}, \mathcal{E} \mid \mathcal{C})$ 有几乎可裂序列 (参见文献 [3, 定理 2.4]).

3 对偶化范畴的张量积构造

本节将由一个给定的对偶化范畴出发, 通过 k - 范畴的张量积、加法包和幂等完备, 给出对偶化范畴的一个新的构造方法. 在此构造中, 箭图在 k - 线性范畴中的表示扮演重要角色.

3.1 幂等完备与加法包

k - 范畴 $\mathcal{A}$ 的幂等完备 (idempotent completion) 为 k - 范畴 $|\mathcal{A}|$, 其对象为所有的对 (A, e) , 其中 $A \in \mathcal{A}$, $e \in \mathcal{A}(A, A)$ 为幂等元, 其 Hom 集 $(|\mathcal{A}|)((A, e), (A', e')) := e' \mathcal{A}(A, A') e$ (参见文献 [4, 第 2.1 小节, 例 7]). 显然, $|\mathcal{A}|$ 中幂等元可裂, 且当 $\mathcal{A}$ 为骨架小 (分别地, Hom - 有限、加法) k - 范畴时, $|\mathcal{A}|$ 亦然. 此外, $(|\mathcal{A}|)^{\text{op}} \cong |(\mathcal{A}^{\text{op}})|$.

k -范畴 $\mathcal{A}$ 的加法包 (additive hull) 为 k -范畴 $\oplus\mathcal{A}$, 其对象为所有 m 元组 $(A_1, \dots, A_m)$, 其中 $m \in \mathbb{N}, A_i \in \mathcal{A}$, 其 Hom 集 $(\oplus\mathcal{A})((A_1, \dots, A_m), (A'_1, \dots, A'_n)) =: (\mathcal{A}(A_i, A'_j))_{j,i}$ (参见文献 [4, 第 2.1 小节, 例 8]). 显然, $\oplus\mathcal{A}$ 是加法的, 且当 $\mathcal{A}$ 为骨架小 (分别地, Hom-有限) k -范畴时, $\oplus\mathcal{A}$ 亦然. 此外, $(\oplus\mathcal{A})^{\text{op}} \cong \oplus(\mathcal{A}^{\text{op}})$.

下述结果是众所周知的.

引理 1 设 $\mathcal{A}$ 为一个骨架小 Hom-有限 k -范畴, 则 $\mathcal{A}$ 的加法包 $\oplus\mathcal{A}$ 的幂等完备 $|\oplus\mathcal{A}$ 是一个 Krull-Schmidt k -范畴.

证明 显然, $|\oplus\mathcal{A}$ 是一个骨架小 Hom-有限加法 k -范畴. 此外, $|\oplus\mathcal{A}$ 中幂等元可裂. 由文献 [4, 定理 3.3] 知, $|\oplus\mathcal{A}$ 是 Krull-Schmidt 的. $\square$

设 $\mathcal{A}$ 为骨架小 k -范畴, 则函子 $F: \mathcal{A} \rightarrow |\mathcal{A}, A \mapsto (A, 1_A)$ 为满忠实的, 其诱导等价 $F_*: \text{Mod}(|\mathcal{A}) \rightarrow \text{Mod}\mathcal{A}, M \mapsto MF$ (参见文献 [4, 第 2.2 小节, 例 6]). 此外, 函子 $G: \mathcal{A} \rightarrow \oplus\mathcal{A}, A \mapsto (A)$ 亦为满忠实的, 其诱导等价 $G_*: \text{Mod}(\oplus\mathcal{A}) \rightarrow \text{Mod}\mathcal{A}, N \mapsto NG$ (参见文献 [4, 第 2.2 小节, 例 7]). 限制到有限表现函子范畴, 我们有范畴等价 $\text{mod}(|\mathcal{A}) \simeq \text{mod}\mathcal{A} \simeq \text{mod}(\oplus\mathcal{A})$, 进而有范畴等价 $\text{mod}(|\oplus\mathcal{A}) \simeq \text{mod}\mathcal{A}$.

3.2 箭图在范畴中的表示

设 Q 为一个箭图, 即一个有向图. 记 Q 的顶点集为 Q_0 , Q 的箭向集为 Q_1 . 箭向 $a \in Q_1$ 的起点和终点分别记为 $s(a)$ 和 $t(a)$. 若箭向 a_i 的序列 $p = a_l \cdots a_2 a_1$ 满足: $s(a_1) = v, t(a_i) = s(a_{i+1}), \forall 1 \leq i \leq l-1, t(a_l) = w$, 则称 p 为起点为 $s(p) = v$ 、终点为 $t(p) = w$ 、长度为 $l \geq 1$ 的路. 除了长度 ≥ 1 的路, 对于任一个顶点 $v \in Q_0$, 还有起点终点皆为 v 的长度为 0 的平凡路 1_v . 箭图 Q 的路范畴, 仍记作 Q , 其对象为 Q 的顶点, 其 Hom 集 $Q(v, w)$ 由起点为 v 终点为 w 的所有的路组成, 而态射的合成成为路的连接. 通常总将箭图看成范畴, 即其路范畴. 箭图 Q 的路 k -范畴, 记作 kQ , 其对象为 Q 的顶点, 其 Hom 集 $(kQ)(v, w)$ 为以 $Q(v, w)$ 为基的 k -向量空间 (参见文献 [4, 第 2.1 小节, 例 6]). 箭图 Q 的反箭图 Q^{op} 的顶点集为 $(Q^{\text{op}})_0 := Q_0$, 箭向集为 $(Q^{\text{op}})_1 := \{a^{\text{op}} : s(a^{\text{op}}) := t(a) \rightarrow t(a^{\text{op}}) := s(a) \mid a \in Q_1\}$. 显然, Q^{op} 的路 (k -) 范畴与 Q 的路 (k -) 范畴的反范畴同构.

箭图 Q 的左路空间为箭图 $P(Q)^l$, 其顶点为 Q 的路, 其箭向为 $(p, ap) : p \rightarrow ap$, 其中 $a \in Q_1$ 满足 $t(p) = s(a)$. 对于 Q 的顶点 v , 记 $P(Q)_v^l$ 为 $P(Q)^l$ 的 1_v 所在的连通分支 (参见文献 [13, 34–36]).

箭图 Q 在范畴 $\mathcal{A}$ 中的一个表示是指一个函子 $R \in \text{Fun}(Q, \mathcal{A})$. 显然, 赋予每个顶点 $v \in Q_0$ 一个对象 $R(v) \in \mathcal{A}$, 赋予每个箭向 $a \in Q_1$ 一个态射 $R(a) \in \mathcal{A}(R(s(a)), R(t(a)))$, 便决定了 Q 在 $\mathcal{A}$ 中的一个表示 R . 箭图 Q 在范畴 $\mathcal{A}$ 中的两个表示 R 与 R' 之间的一个态射是指一个自然变换 ϕ , 即赋予每个顶点 $v \in Q_0$ 一个态射 $\phi_v \in \mathcal{A}(R(v), R'(v))$ 使得 $R'(a) \circ \phi_{s(a)} = \phi_{t(a)} \circ R(a)$, 即对于每个箭向 $a \in Q_1$ 都有下面的交换图:

$$\begin{array}{ccc} R(s(a)) & \xrightarrow{\phi_{s(a)}} & R'(s(a)) \\ \downarrow R(a) & & \downarrow R'(a) \\ R(t(a)) & \xrightarrow{\phi_{t(a)}} & R'(t(a)). \end{array}$$

显然, 箭图 Q 在 k -范畴 $\mathcal{A}$ 中的表示范畴 $\text{Rep}(Q, \mathcal{A})$ (即函子范畴 $\text{Fun}(Q, \mathcal{A})$) 同构于 k -函子范畴 $\text{Fun}_k(kQ, \mathcal{A})$ (亦记作 $\text{Rep}(kQ, \mathcal{A})$). 设 I 为 Q 的由一些长度至少为 2 的路生成的理想, 即其为 Q 中一些长度至少为 2 的路的集合且其在与任意可连接路的左或右连接下封闭, 等价地, Q 中一些长度至少为 2 的路的集合且 Q 中以 I 中的路为子路的路仍在 I 中. 以 Q 的顶点为对象, 以在 Q 中但不在 I

中的路为态射的范畴 Q_I , 称为带单项式关系 I 的箭图 Q . 显然, Q_I 在预加法范畴 $\mathcal{A}$ 中的表示范畴 $\text{Rep}(Q_I, \mathcal{A}) := \text{Fun}(Q_I, \mathcal{A})$ 与 $\text{Rep}(Q, \mathcal{A})$ 中满足 $R(p) = 0$ ($\forall p \in I$) 的表示 R 构成的 $\text{Rep}(Q, \mathcal{A})$ 的满子范畴同构. 若将 kQ 的由 I 中所有的路生成的理想仍记作 I , 则 Q_I 在 k -范畴 $\mathcal{A}$ 中的表示范畴 $\text{Rep}(Q_I, \mathcal{A})$ (亦记作 $\text{Rep}(kQ/I, \mathcal{A})$) 与范畴 $\text{Fun}_k(kQ/I, \mathcal{A})$ 同构.

对于顶点 $v \in Q_0$, 定义 $P(Q_I)_v^l = \{p \in P(Q)_v^l \mid p \notin I\}$. 记 $\mathbb{A}_1$ 为只有一个顶点 $\bullet$ 而没有任何箭向的箭图. 定义函子 $f_v : \mathbb{A}_1 \rightarrow Q_I, \bullet \mapsto v, g_v : \mathbb{A}_1 \rightarrow P(Q_I)_v^l, \bullet \mapsto 1_v, t_v : P(Q_I)_v^l \rightarrow Q_I$ 如下: 对于 $P(Q_I)_v^l$ 中的顶点 p , 定义 $t_v(p) = t(p)$; 对于 $P(Q_I)_v^l$ 中的箭向 (p, ap) , 定义 $t_v(p, ap) = a$. 于是, $f_v = t_v \circ g_v$. 因从骨架小范畴 $\mathcal{B}$ 到骨架小范畴 $\mathcal{C}$ 的任一个函子 h 均可诱导函子 $h_* : \text{Fun}(\mathcal{C}, \mathcal{A}) \rightarrow \text{Fun}(\mathcal{B}, \mathcal{A}), F \mapsto F \circ h$. 故有诱导函子 $f_{v*} : \text{Rep}(Q_I, \mathcal{A}) \rightarrow \text{Rep}(\mathbb{A}_1, \mathcal{A}), g_{v*} : \text{Rep}(P(Q_I)_v^l, \mathcal{A}) \rightarrow \text{Rep}(\mathbb{A}_1, \mathcal{A})$ 和 $t_{v*} : \text{Rep}(Q_I, \mathcal{A}) \rightarrow \text{Rep}(P(Q_I)_v^l, \mathcal{A})$. 此外, $f_{v*} = (t_v \circ g_v)_* = g_{v*} \circ t_{v*}$ (参见文献 [13]).

设 $\mathcal{A}$ 为一个余完备 (cocomplete) 范畴, 即 $\mathcal{A}$ 中小余积 (small coproduct) 存在. 类似文献 [36, 命题 3.1 和 3.2], 函子 g_{v*} 和 t_{v*} 分别有左伴随 $g_v^* : \text{Rep}(\mathbb{A}_1, \mathcal{A}) \rightarrow \text{Rep}(P(Q_I)_v^l, \mathcal{A})$ 与 $t_v^* : \text{Rep}(P(Q_I)_v^l, \mathcal{A}) \rightarrow \text{Rep}(Q_I, \mathcal{A})$. 从而, 函子 f_{v*} 有左伴随 $f_v^* := t_v^* \circ g_v^*$. 函子 $g_v^* : \text{Rep}(\mathbb{A}_1, \mathcal{A}) \rightarrow \text{Rep}(P(Q_I)_v^l, \mathcal{A})$ 的确切定义如下: 对于 $\text{Rep}(\mathbb{A}_1, \mathcal{A})$ 中一个表示 A , 等价地, 一个对象 $A \in \mathcal{A}$, 定义 $P(Q_I)_v^l$ 的表示 $g_v^*(A)$, 其将每个对象都映成 A , 将每个态射都映成 1_A ; 对于 $\text{Rep}(\mathbb{A}_1, \mathcal{A})$ 中的一个态射, 等价地, $\mathcal{A}$ 中一个态射 $f : A \rightarrow A'$, 定义 $g_v^*(f)_p = f, \forall p \in (P(Q_I)_v^l)_0$. 函子 t_{v*} 的左伴随 t_v^* 的确切定义如下. 对于 $P(Q_I)_v^l$ 的一个表示 M , 定义 $t_v^*(M)$ 如下: 对于 Q 的顶点 w , $t_v^*(M)(w) := \bigoplus_{p \in Q_I(v, w)} M(p)$, 其中 $M(p)$ 为在 $P(Q_I)_v^l$ 的表示 M 下对应于 $P(Q_I)_v^l$ 的顶点 p 的 $\mathcal{A}$ 中的对象; 对于箭向 $a \in Q_1$, 态射 $t_v^*(M)(a) : t_v^*(M)(s(a)) \rightarrow t_v^*(M)(t(a))$ 定义为

$$(\alpha_{qp})_{q,p} : \bigoplus_{p \in Q_I(v, s(a))} M(p) \rightarrow \bigoplus_{q \in Q_I(v, t(a))} M(q),$$

其中, 若 $q = ap$, 则 $\alpha_{qp} := M(p, ap) : M(p) \rightarrow M(ap)$ 为在 $P(Q_I)_v^l$ 的表示 M 下对应 $P(Q_I)_v^l$ 的箭向 $(p, ap) : p \rightarrow ap$ 的 $\mathcal{A}$ 中的态射, 否则 $\alpha_{qp} := 0$. 此外, 需定义 t_v^* 在态射上的作用. 若 $f : M \rightarrow M'$ 为 $\text{Rep}(P(Q_I)_v^l, \mathcal{A})$ 中的态射, 则对于 $P(Q_I)_v^l$ 的每个顶点 p 有态射 $f_p \in \mathcal{A}(M(p), M'(p))$. 对于 Q 的每个顶点 w , 定义 $t_v^*(f)_w = \bigoplus_{p \in Q_I(v, w)} f_p \in \mathcal{A}(\bigoplus_{p \in Q_I(v, w)} M(p), \bigoplus_{p \in Q_I(v, w)} M'(p))$.

引理 2 (参见文献 [36, 定理 3.3] 和 [13, 第 3217 页]) 设 Q_I 为带单项式关系 I 的箭图 Q , $\mathcal{A}$ 为有足够多投射对象的余完备 Abel 范畴, 则 $\text{Rep}(Q_I, \mathcal{A})$ 为有足够多投射对象的余完备 Abel 范畴, 且 $\{f_v^*(P) \mid v \in Q_0, P \in \mathcal{A} \text{ 为投射对象}\}$ 为 $\text{Rep}(Q_I, \mathcal{A})$ 的一族投射生成子.

证明 显然, $\text{Rep}(Q_I, \mathcal{A})$ 为余完备 Abel 范畴. 现证其有足够多的投射对象. 我们有伴随同构

$$(\text{Rep}(Q_I, \mathcal{A}))(f_v^*(A), R) \cong (\text{Rep}(\mathbb{A}_1, \mathcal{A}))(A, f_{v*}(R)),$$

其中 $R \in \text{Rep}(Q_I, \mathcal{A}), A \in \text{Rep}(\mathbb{A}_1, \mathcal{A}) = \mathcal{A}$ (我们总将 $\text{Rep}(\mathbb{A}_1, \mathcal{A})$ 与 $\mathcal{A}$ 等同). 对任意 $R \in \text{Rep}(Q_I, \mathcal{A})$, 有 $f_{v*}(R) \in \mathcal{A} = \text{Rep}(\mathbb{A}_1, \mathcal{A})$. 因为 $\mathcal{A}$ 有足够多的投射对象, 所以存在投射对象 $P_v \in \mathcal{A}$ 及满态射 $d_v : P_v \rightarrow f_{v*}(R)$. 由伴随同构知, 存在唯一的态射 $\phi^v : f_v^*(P_v) \rightarrow R$ 使得 $(\phi^v)_v : (f_v^*(P_v))(v) \rightarrow R(v)$ 恰为 $d_v : P_v \rightarrow f_{v*}(R)$. 对于 Q_I 的每个顶点 v 重复此过程, 可得表示间的态射 $\phi^v : f_v^*(P_v) \rightarrow R$. 由定义知 f_{v*} 保持正合性. 于是, f_v^* 保持投射对象. 从而, $f_v^*(P_v)$ 为 Q_I 的投射表示. 进而 $\bigoplus_{v \in Q_0} f_v^*(P_v)$ 亦为 Q_I 的投射表示. 因为 ϕ_v 在 $(\bigoplus_{u \in Q_0} f_u^*(P_u))(v)$ 的第 v 分量 $f_v^*(P_v)(v)$ 上的限制 $(\phi^v)_v = d_v$ 为满态射, 所以, 态射 $\phi = (\phi^v)_{v \in Q_0} : \bigoplus_{v \in Q_0} f_v^*(P_v) \rightarrow R$ 亦为满态射. 于是, $\{f_v^*(P) \mid v \in Q_0, P \in \mathcal{A} \text{ 为投射对象}\}$ 为 $\text{Rep}(Q_I, \mathcal{A})$ 的一族投射生成子. $\square$

3.3 对偶化范畴的张量积构造

若对于箭图 Q 的每个顶点 v 均只有有限多个以 v 为起点或终点的箭向, 则称 Q 为一个局部有限箭图 (参见文献 [4, 第 8.3 小节, 例 2]). 设 Q 为一个箭图, kQ 为 Q 的路 k - 范畴, k^1Q 为 kQ 的由所有箭向生成的理想, $k^rQ := (k^1Q)^r, \forall r \in \mathbb{N}$. 若 kQ 的理想 I 满足: $I \subseteq k^2Q$, 且对于 Q 的任意顶点 v 均存在 $l_v \in \mathbb{N}$ 使得 I 包含所有以 v 为起点或终点的长度 $\geq l_v$ 的路, 则称 I 为 kQ 的一个容许理想. 众所周知, 当 $I \subseteq k^2Q$ 时, kQ/I 为局部有界 k - 范畴当且仅当 Q 是局部有限的且 I 是容许的 (参见文献 [4, 第 8.3 小节, 例 2]).

从现在开始, 我们总设 I 为 kQ 的一个单项式容许理想, 即由 Q 中一些路生成的容许理想. 于是, I 中所有的路构成 Q 的一个理想 J , 其由一些长度至少为 2 的路组成. 若记 Q_I 为以 Q 的顶点为对象, 以 Q 中所有不在 I 中的路为态射的范畴, 则 $Q_I = Q_J$. 于是上一小节所得结果对 Q_I 成立. 此外, 反范畴 $(kQ/I)^{\text{op}}$ 为 $(kQ)^{\text{op}} = kQ^{\text{op}}$ 模 kQ^{op} 的由 Q^{op} 中某些路生成的容许理想 I^{op} 所得的剩余范畴. 事实上, Q^{op} 中所有属于 I^{op} 的路构成 Q^{op} 的一个理想 $J^{\text{op}} = \{a_1^{\text{op}} a_2^{\text{op}} \cdots a_l^{\text{op}} \mid a_l \cdots a_2 a_1 \in J\}$.

假设 $\mathcal{A}$ 为一个加法 k - 范畴. 记 $\text{rep}(kQ/I, \mathcal{A})$ (分别地, $\text{rep}(Q_I, \mathcal{A})$) 为 $\text{Rep}(kQ/I, \mathcal{A})$ (分别地, $\text{Rep}(Q_I, \mathcal{A})$) 的由所有支撑有限的表示 (即只对于 Q 的有限个顶点 v 有 $R(v) \neq 0$ 的表示 R) 构成的满子范畴, 则 $\text{rep}(kQ/I, \mathcal{A}) \cong \text{rep}(Q_I, \mathcal{A})$.

命题 1 设 Q 为一个局部有限箭图, I 为 kQ 的一个单项式容许理想, $\mathcal{B} := kQ/I$, $\mathcal{A}$ 为一个有伪核的骨架小加法 k - 范畴, 则同构 $\text{Rep}(\mathcal{B}, \text{Mod}\mathcal{A}) \cong \text{Mod}(\mathcal{B}^{\text{op}} \otimes_k \mathcal{A})$ 可限制为同构 $\text{rep}(\mathcal{B}, \text{mod}\mathcal{A}) \cong \text{mod}(\mathcal{B}^{\text{op}} \otimes_k \mathcal{A})$.

$$\begin{array}{ccc} \text{Rep}(\mathcal{B}, \text{Mod}\mathcal{A}) & \xrightarrow{\cong} & \text{Mod}\left(\mathcal{B}^{\text{op}} \otimes_k \mathcal{A}\right) \\ \uparrow & & \uparrow \\ \text{rep}(\mathcal{B}, \text{mod}\mathcal{A}) & \xrightarrow{\cong} & \text{mod}\left(\mathcal{B}^{\text{op}} \otimes_k \mathcal{A}\right). \end{array}$$

证明 首先, 我们有自然的范畴同构

$$\begin{aligned} \text{Rep}(\mathcal{B}, \text{Mod}\mathcal{A}) &= \text{Fun}_k(\mathcal{B}, \text{Fun}_k(\mathcal{A}^{\text{op}}, \text{Mod}k)) \cong \text{Fun}_k\left(\mathcal{B} \otimes_k \mathcal{A}^{\text{op}}, \text{Mod}k\right) \\ &\cong \text{Fun}_k\left(\left(\mathcal{B}^{\text{op}} \otimes_k \mathcal{A}\right)^{\text{op}}, \text{Mod}k\right) = \text{Mod}\left(\mathcal{B}^{\text{op}} \otimes_k \mathcal{A}\right). \end{aligned}$$

确切地说, 同构函子 $\Phi: \text{Rep}(\mathcal{B}, \text{Mod}\mathcal{A}) \rightarrow \text{Mod}(\mathcal{B}^{\text{op}} \otimes_k \mathcal{A})$ 由 $\Phi(R)((v, A)) := R(v)(A)$ 和 $\Phi(R)(a \otimes f) := R(a)_A \circ R(s(a))(f) = R(t(a))(f) \circ R(a)_{A'}: R(s(a))(A') \rightarrow R(t(a))(A)$ 给出,

$$\begin{array}{ccc} R(s(a))(A) & \xrightarrow{R(a)_A} & R(t(a))(A) \\ \uparrow R(s(a))(f) & & \uparrow R(t(a))(f) \\ R(s(a))(A') & \xrightarrow{R(a)_{A'}} & R(t(a))(A'), \end{array}$$

其中 $a \in Q_1$, $f: A \rightarrow A'$ 为 $\mathcal{A}$ 中态射. 而函子 Φ 的拟逆 $\Psi: \text{Mod}(\mathcal{B}^{\text{op}} \otimes_k \mathcal{A}) \rightarrow \text{Rep}(\mathcal{B}, \text{Mod}\mathcal{A})$ 由 $\Psi(M)(v)(A) := M((v, A))$, $\Psi(M)(v)(f) := M(1_v \otimes f)$, 其中 $v \in Q_0$, $A \in \mathcal{A}$, $f \in \mathcal{A}(A, A')$; $\Psi(M)(a)_A :=$

$M(a \otimes 1_A)$, 其中 $a \in Q_1$, $A \in \mathcal{A}$; $(\Psi(F)_v)_A := F_{(v,A)} : \Psi(M)(v)(A) = M((v,A)) \rightarrow \Psi(M')(v)(A) = M'((v,A))$, 其中 $v \in Q_0$, $A \in \mathcal{A}$, $F \in (\text{Mod}(\mathcal{B}^{\text{op}} \otimes_k \mathcal{A}))(M, M')$ 给出.

因为 $\text{Mod } \mathcal{A}$ 有足够多的投射对象 $\mathcal{A}(-, A)$, 其中 $A \in \mathcal{A}$, 故由引理 2 知, $\text{Rep}(\mathcal{B}, \text{Mod } \mathcal{A}) \cong \text{Rep}(Q_I, \text{Mod } \mathcal{A})$ 有足够多的投射对象 $\{P_{v,A} := f_v^*(\mathcal{A}(-, A)) \mid v \in Q_0, A \in \mathcal{A}\}$. 又 Q 是局部有限的且 I 为容许理想, 由 f_v^* 的定义知 $P_{v,A} \in \text{rep}(Q_I, \text{mod } \mathcal{A})$. 因为 $\mathcal{A}$ 有伪核, 所以 $\text{mod } \mathcal{A}$ 是 Abel 的 (参见文献 [30, 第 102 页, 命题]). 从而 $\text{rep}(\mathcal{B}, \text{mod } \mathcal{A}) \cong \text{rep}(Q_I, \text{mod } \mathcal{A})$ 也是 Abel 的. 对于任意 $R \in \text{rep}(\mathcal{B}, \text{mod } \mathcal{A})$, 由引理 2 的证明知, 存在正合列 $\bigoplus_{v \in Q_0, A \in |\mathcal{A}|} P_{v,A}^{m_{v,A}} \rightarrow \bigoplus_{v \in Q_0, A \in |\mathcal{A}|} P_{v,A}^{n_{v,A}} \rightarrow R \rightarrow 0$, 其中 $|\mathcal{A}|$ 为 $\mathcal{A}$ 中对象同构类表示的完全集, 非负整数 $m_{v,A}$ 和 $n_{v,A}$ 只对有限多个对 $(v, A) \in Q_0 \times |\mathcal{A}|$ 是非零的. 不难验证 $\Phi(P_{v,A}) = \mathcal{B}(v, -) \otimes_k \mathcal{A}(-, A) = \mathcal{B}^{\text{op}}(-, v) \otimes_k \mathcal{A}(-, A) = (\mathcal{B}^{\text{op}} \otimes_k \mathcal{A})(-, (v, A))$. 将同构函子 Φ 作用到上述正合列上可得正合列

$$\bigoplus_{v \in Q_0, A \in |\mathcal{A}|} \left(\mathcal{B}^{\text{op}} \otimes_k \mathcal{A} \right)(-, (v, A))^{m_{v,A}} \rightarrow \bigoplus_{v \in Q_0, A \in |\mathcal{A}|} \left(\mathcal{B}^{\text{op}} \otimes_k \mathcal{A} \right)(-, (v, A))^{n_{v,A}} \rightarrow \Phi(R) \rightarrow 0.$$

于是, $\Phi(R) \in \text{mod}(\mathcal{B}^{\text{op}} \otimes_k \mathcal{A})$.

反之, 对于任意 $M \in \text{mod}(\mathcal{B}^{\text{op}} \otimes_k \mathcal{A})$, 存在正合列

$$\bigoplus_{v \in Q_0, A \in |\mathcal{A}|} \left(\mathcal{B}^{\text{op}} \otimes_k \mathcal{A} \right)(-, (v, A))^{m_{v,A}} \rightarrow \bigoplus_{v \in Q_0, A \in |\mathcal{A}|} \left(\mathcal{B}^{\text{op}} \otimes_k \mathcal{A} \right)(-, (v, A))^{n_{v,A}} \rightarrow M \rightarrow 0,$$

其中非负整数 $m_{v,A}$ 和 $n_{v,A}$ 仅对有限多个对 (v, A) 是非零的. 于是对于任意 $v' \in Q_0$ 都存在正合列

$$\begin{aligned} \bigoplus_{v \in Q_0, A \in |\mathcal{A}|} \left(\mathcal{B}^{\text{op}} \otimes_k \mathcal{A} \right)((v', -), (v, A))^{m_{v,A}} &\rightarrow \bigoplus_{v \in Q_0, A \in |\mathcal{A}|} \left(\mathcal{B}^{\text{op}} \otimes_k \mathcal{A} \right)((v', -), (v, A))^{n_{v,A}} \\ &\rightarrow M(v', -) = \Psi(M)(v') \rightarrow 0, \end{aligned}$$

即

$$\begin{aligned} \bigoplus_{v \in Q_0, A \in |\mathcal{A}|} \left(\mathcal{B}^{\text{op}}(v', v) \otimes_k \mathcal{A}(-, A) \right)^{m_{v,A}} &\rightarrow \bigoplus_{v \in Q_0, A \in |\mathcal{A}|} \left(\mathcal{B}^{\text{op}}(v', v) \otimes_k \mathcal{A}(-, A) \right)^{n_{v,A}} \\ &\rightarrow M(v', -) = \Psi(M)(v') \rightarrow 0. \end{aligned}$$

因 Q 是局部有限的且 I 为单项式容许理想, 故所有的 $\mathcal{B}(v, v') = \mathcal{B}^{\text{op}}(v', v)$ 均为有限生成自由 k -模且只有有限多个对象 $v' \in Q_0$ 使得 $\mathcal{B}(v, v') = \mathcal{B}^{\text{op}}(v', v) \neq 0$. 因此, $\Psi(M) \in \text{rep}(\mathcal{B}, \text{mod } \mathcal{A})$. $\square$

注 1 函子范畴 $\text{Rep}(kQ/I, \text{Mod } \mathcal{A})$ 中的序列 $0 \rightarrow R \xrightarrow{f} R' \xrightarrow{f'} R'' \rightarrow 0$ 称为正合的, 如果对于任意对象 $v \in Q_0$, 范畴 $\text{Mod } \mathcal{A}$ 中的序列 $0 \longrightarrow R(v) \xrightarrow{f_v} R'(v) \xrightarrow{f'_v} R''(v) \longrightarrow 0$ 都是正合的. 从而给出 Abel 范畴 $\text{Rep}(kQ/I, \text{Mod } \mathcal{A})$ 上的一个自然的正合结构 $\mathcal{F}$, 使得自然的同构 $\text{Rep}(kQ/I, \text{Mod } \mathcal{A}) \cong \text{Mod}((kQ/I)^{\text{op}} \otimes_k \mathcal{A})$ 保持正合性.

本文主要结果为下述定理:

定理 1 设 Q 为一个局部有限箭图, I 为 kQ 的一个单项式容许理想, $\mathcal{B} := kQ/I$, $\mathcal{A}$ 为一个对偶化 k -范畴, 则下述结论成立:

- (1) k -范畴 $|\oplus (\mathcal{B} \otimes_k \mathcal{A})|$ 是对偶化的;
- (2) Abel k -范畴 $\text{mod}(\mathcal{B} \otimes_k \mathcal{A})$ 是对偶化的;
- (3) Abel k -范畴 $\text{mod}(\mathcal{B} \otimes_k \mathcal{A})$ 有几乎可裂序列.

证明 (1) 由题设知, $\mathcal{B}$ 为骨架小 Hom- 有限 k - 范畴. 于是, $\mathcal{B} \otimes_k \mathcal{A}$ 亦为骨架小 Hom- 有限 k - 范畴. 由引理 1 知, $|\oplus(\mathcal{B} \otimes_k \mathcal{A})$ 是 Hom- 有限 Krull-Schmidt 的. 于是只需证明对偶 $D: \text{Fun}_k(|\oplus(\mathcal{B} \otimes_k \mathcal{A}))^{\text{op}}, \text{mod} k) \rightarrow \text{Fun}_k(|\oplus(\mathcal{B} \otimes_k \mathcal{A}), \text{mod} k)$ 可诱导对偶 $D: \text{mod}(|\oplus(\mathcal{B} \otimes_k \mathcal{A})) \rightarrow \text{mod}(|\oplus(\mathcal{B} \otimes_k \mathcal{A}))^{\text{op}}$.

因为 $(|\oplus(\mathcal{B} \otimes_k \mathcal{A}))^{\text{op}} \cong |\oplus(\mathcal{B} \otimes_k \mathcal{A})^{\text{op}} \cong |\oplus(\mathcal{B}^{\text{op}} \otimes_k \mathcal{A}^{\text{op}})$, 所以, $\text{mod}(|\oplus(\mathcal{B} \otimes_k \mathcal{A}))^{\text{op}} \simeq \text{mod}(\mathcal{B}^{\text{op}} \otimes_k \mathcal{A}^{\text{op}})$ (参见第 3.1 小节). 另一方面, $\text{mod}(|\oplus(\mathcal{B} \otimes_k \mathcal{A})) \simeq \text{mod}(\mathcal{B} \otimes_k \mathcal{A})$. 于是只需证明前面的对偶 D 可诱导对偶 $D: \text{mod}(\mathcal{B} \otimes_k \mathcal{A}) \rightarrow \text{mod}(\mathcal{B} \otimes_k \mathcal{A})^{\text{op}}$.

由命题 1 可以得到同构 $\text{mod}(\mathcal{B} \otimes_k \mathcal{A}) \cong \text{rep}(kQ^{\text{op}}/I^{\text{op}}, \text{mod} \mathcal{A})$ 及 $\text{mod}(\mathcal{B}^{\text{op}} \otimes_k \mathcal{A}^{\text{op}}) \cong \text{rep}(kQ/I, \text{mod} \mathcal{A}^{\text{op}})$. 于是只需证明前面的对偶 D 可诱导对偶 $D: \text{rep}(kQ^{\text{op}}/I^{\text{op}}, \text{mod} \mathcal{A}) \rightarrow \text{rep}(kQ/I, \text{mod} \mathcal{A}^{\text{op}})$, 等价地, 对偶 $D: \text{rep}(Q_{I^{\text{op}}}^{\text{op}}, \text{mod} \mathcal{A}) \rightarrow \text{rep}(Q_I, \text{mod} \mathcal{A}^{\text{op}})$.

$$\begin{array}{ccc}
 \text{Fun}_k\left(\left(|\oplus\left(\mathcal{B} \otimes_k \mathcal{A}\right)\right)^{\text{op}}, \text{mod} k\right) & \xrightarrow{D} & \text{Fun}_k\left(|\oplus\left(\mathcal{B} \otimes_k \mathcal{A}\right), \text{mod} k\right) \\
 \uparrow & & \uparrow \\
 \text{mod}\left(|\oplus\left(\mathcal{B} \otimes_k \mathcal{A}\right)\right) & \xrightarrow{D} & \text{mod}\left(|\oplus\left(\mathcal{B} \otimes_k \mathcal{A}\right)\right)^{\text{op}} \\
 \downarrow \simeq & & \downarrow \simeq \\
 \text{mod}\left(\mathcal{B} \otimes_k \mathcal{A}\right) & \xrightarrow{D} & \text{mod}\left(\mathcal{B} \otimes_k \mathcal{A}\right)^{\text{op}} \\
 \uparrow \cong & & \uparrow \cong \\
 \text{rep}\left(kQ^{\text{op}}/I^{\text{op}}, \text{mod} \mathcal{A}\right) & \xrightarrow{D} & \text{rep}\left(kQ/I, \text{mod} \mathcal{A}^{\text{op}}\right) \\
 \uparrow \cong & & \uparrow \cong \\
 \text{rep}\left(Q_{I^{\text{op}}}^{\text{op}}, \text{mod} \mathcal{A}\right) & \xrightarrow{D} & \text{rep}\left(Q_I, \text{mod} \mathcal{A}^{\text{op}}\right).
 \end{array}$$

因为 $\mathcal{A}$ 是对偶化的, 所以对偶 $D: \text{Fun}_k(\mathcal{A}^{\text{op}}, \text{mod} k) \rightarrow \text{Fun}_k(\mathcal{A}, \text{mod} k)$ 可诱导对偶 $D: \text{mod} \mathcal{A} \rightarrow \text{mod} \mathcal{A}^{\text{op}}$. 上图最后一行中, 函子 $D: \text{rep}(Q_{I^{\text{op}}}^{\text{op}}, \text{mod} \mathcal{A}) \rightarrow \text{rep}(Q_I, \text{mod} \mathcal{A}^{\text{op}})$ 的定义如下: 对于任意 $R \in \text{rep}(Q_{I^{\text{op}}}^{\text{op}}, \text{mod} \mathcal{A})$, $D(R)(v) := D(R(v)) \in \text{mod} \mathcal{A}^{\text{op}}, \forall v \in Q_0$; $D(R)(a) := D(R(a)), \forall a \in Q_1$; 对于 $\text{rep}(Q_{I^{\text{op}}}^{\text{op}}, \text{mod} \mathcal{A})$ 中任一态射 $\phi: R \rightarrow R'$, $D(\phi): D(R') \rightarrow D(R)$ 为 $\text{rep}(Q_I, \text{mod} \mathcal{A}^{\text{op}})$ 中一个态射, 其中 $D(\phi)_v := D(\phi_v), \forall v \in Q_0$. 函子 $D: \text{mod} \mathcal{A} \rightarrow \text{mod} \mathcal{A}^{\text{op}}$ 为对偶表明函子 $D: \text{rep}(Q_{I^{\text{op}}}^{\text{op}}, \text{mod} \mathcal{A}) \rightarrow \text{rep}(Q_I, \text{mod} \mathcal{A}^{\text{op}})$ 亦为一个对偶.

(2) 由 (1) 及文献 [1, 命题 2.6] 得, $\text{mod}(|\oplus(\mathcal{B} \otimes_k \mathcal{A}))$ 是一个 Abel 对偶化 k - 范畴. 于是, $\text{mod}(\mathcal{B} \otimes_k \mathcal{A}) \simeq \text{mod}(|\oplus(\mathcal{B} \otimes_k \mathcal{A}))$ 也是一个 Abel 对偶化 k - 范畴.

(3) 由 (1) 及文献 [2, 定理 7.1.3] 得, $\text{mod}(|\oplus(\mathcal{B} \otimes_k \mathcal{A}))$ 有几乎可裂序列. 于是 $\text{mod}(\mathcal{B} \otimes_k \mathcal{A}) \simeq \text{mod}(|\oplus(\mathcal{B} \otimes_k \mathcal{A}))$ 有几乎可裂序列. $\square$

注 2 根据定理 1(1), 由一个给定的对偶化 k - 范畴, 我们能构造出大量新的对偶化 k - 范畴. 在实际应用时, 利用结论 “ $\text{rep}(kQ/I, \text{mod} \mathcal{A})$ 是一个对偶化 k - 范畴且有几乎可裂序列” 更为方便, 其可由命题 1、定理 1(2) 和 1(3) 得到. 当 $Q = \mathbb{A}_1 = \bullet$ 时, 定理 1(2) 恰为文献 [1, 命题 2.6].

由定理 1 可以得到两个直接的推论. 设 $\mathcal{C}$ 为一个骨架小范畴, $\mathcal{A}$ 为一个 k -范畴, 则 $\mathcal{C}$ 到 $\mathcal{A}$ 的函子范畴 $\text{Fun}(\mathcal{C}, \mathcal{A})$ 有自然的 k -范畴结构. 当 $\mathcal{C}$ 为箭图 $\bullet \rightarrow \bullet$ 的路范畴时, $\text{Fun}(\mathcal{C}, \mathcal{A})$ 称为 $\mathcal{A}$ 的态射范畴. 当 $\mathcal{C}$ 为箭图 $\bullet \rightarrow \bullet \rightarrow \bullet$ 的路范畴时, $\text{Fun}(\mathcal{C}, \mathcal{A})$ 称为 $\mathcal{A}$ 的态射合成范畴 (参见文献 [4, 第 18 页, 例 10]).

推论 1 设 $\mathcal{A}$ 为一个对偶化 k -范畴, 则 $\text{mod } \mathcal{A}$ 的态射范畴有几乎可裂序列.

证明 设 Q 为箭图 $\bullet \rightarrow \bullet$, $\mathcal{B} := kQ$. 由命题 1 和定理 1 可得, $\text{mod } \mathcal{A}$ 的态射范畴 $\text{Fun}(Q, \text{mod } \mathcal{A}) \simeq \text{rep}(Q, \text{mod } \mathcal{A}) \simeq \text{rep}(\mathcal{B}, \text{mod } \mathcal{A}) \simeq \text{mod}(\mathcal{B}^{\text{op}} \otimes_k \mathcal{A})$ 有几乎可裂序列. $\square$

推论 2 设 $\mathcal{A}$ 为一个对偶化 k -范畴, 则 $\text{mod } \mathcal{A}$ 的态射合成范畴有几乎可裂序列.

证明 设 Q 为箭图 $\bullet \rightarrow \bullet \rightarrow \bullet$, $\mathcal{B} := kQ$. 由命题 1 和定理 1 可得, $\text{mod } \mathcal{A}$ 的态射合成范畴 $\text{Fun}(Q, \text{mod } \mathcal{A}) \simeq \text{rep}(Q, \text{mod } \mathcal{A}) \simeq \text{rep}(\mathcal{B}, \text{mod } \mathcal{A}) \simeq \text{mod}(\mathcal{B}^{\text{op}} \otimes_k \mathcal{A})$ 有几乎可裂序列. $\square$

4 在复形范畴上的应用

本节将应用上节所得的主要定理证明各种各样的复形范畴有几乎可裂序列.

4.1 n -复形范畴

设 $\mathcal{A}$ 为加法范畴, $n \geq 2$. $\mathcal{A}$ 上的一个 n -复形 $X := (X^i, d_X^i)_{i \in \mathbb{Z}}$, 其中 $X^i \in \mathcal{A}$, $d_X^i \in \mathcal{A}(X^i, X^{i+1})$ 满足 $d_X^{i+n-1} \cdots d_X^{i+1} d_X^i = 0, \forall i \in \mathbb{Z}$. $\mathcal{A}$ 上的一个 n -复形 $X = (X^i, d_X^i)_{i \in \mathbb{Z}}$ 可用下图表示:

$$\cdots \xrightarrow{d_X^{i-2}} X^{i-1} \xrightarrow{d_X^{i-1}} X^i \xrightarrow{d_X^i} X^{i+1} \xrightarrow{d_X^{i+1}} \cdots$$

从 $\mathcal{A}$ 上的 n -复形 $X = (X^i, d_X^i)_{i \in \mathbb{Z}}$ 到 $\mathcal{A}$ 上的 n -复形 $Y = (Y^i, d_Y^i)_{i \in \mathbb{Z}}$ 的一个态射 $f := (f^i)_{i \in \mathbb{Z}}$, 其中 $f^i \in \mathcal{A}(X^i, Y^i)$, 满足 $f^{i+1} d_X^i = d_Y^i f^i, \forall i \in \mathbb{Z}$, 即有下面的交换图:

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & \xrightarrow{d_X^{i-2}} & X^{i-1} & \xrightarrow{d_X^{i-1}} & X^i & \xrightarrow{d_X^i} & X^{i+1} \xrightarrow{d_X^{i+1}} \cdots \\ & & \downarrow f^{i-1} & & \downarrow f^i & & \downarrow f^{i+1} \\ \cdots & \xrightarrow{d_Y^{i-2}} & Y^{i-1} & \xrightarrow{d_Y^{i-1}} & Y^i & \xrightarrow{d_Y^i} & Y^{i+1} \xrightarrow{d_Y^{i+1}} \cdots \end{array}$$

两个 n -复形态射 $f = (f^i)_{i \in \mathbb{Z}}: X \rightarrow Y$ 与 $g = (g^i)_{i \in \mathbb{Z}}: Y \rightarrow Z$ 的合成 $gf := (g^i f^i)_{i \in \mathbb{Z}}: X \rightarrow Z$. $\mathcal{A}$ 上的所有 n -复形及它们之间的态射构成 $\mathcal{A}$ 上的 n -复形范畴, 记作 $C_n(\mathcal{A})$.

设 $(\mathcal{A}, \mathcal{E})$ 为一个正合范畴, $\mathcal{E}_n$ 为 $C_n(\mathcal{A})$ 中所有满足对于任意 $i \in \mathbb{Z}$, $X^i \xrightarrow{f^i} Y^i \xrightarrow{g^i} Z^i$ 均为 $\mathcal{E}$ 中合并的可合成态射 $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$ 的类, 则 $(C_n(\mathcal{A}), \mathcal{E}_n)$ 为一个正合范畴. 若 $\mathcal{A}$ 上的 n -复形 $X = (X^i, d_X^i)_{i \in \mathbb{Z}}$ 中只有有限个 X^i 非零, 则称 X 是有界的. 记 $C_n^b(\mathcal{A})$ 为 $C_n(\mathcal{A})$ 中由所有有界 n -复形构成的满子范畴. 设 $\mathcal{E}_n^b$ 为既在 $C_n^b(\mathcal{A})$ 中又在 $\mathcal{E}_n$ 中的可合成态射类, 则 $(C_n^b(\mathcal{A}), \mathcal{E}_n^b)$ 为 $(C_n(\mathcal{A}), \mathcal{E}_n)$ 的一个正合满子范畴.

下面的结果为文献 [5, 定理 4.3] 的推广:

定理 2 设 $\mathcal{A}$ 为一个对偶化 k -范畴, $\mathcal{F}$ 为 Abel 范畴 $\text{mod } \mathcal{A}$ 上的自然的正合结构, $n \geq 2$, 则 $(C_n^b(\text{mod } \mathcal{A}), \mathcal{F}_n^b)$ 有几乎可裂序列.

证明 设 Q 为顶点为 i 箭向为 $a_i: i \rightarrow i+1$ 的箭图, 其中 $i \in \mathbb{Z}$, 即箭图

$$\cdots \xrightarrow{a_{-2}} \bullet_{-1} \xrightarrow{a_{-1}} \bullet_0 \xrightarrow{a_0} \bullet_1 \xrightarrow{a_1} \cdots,$$

I 为 kQ 的由所有长度为 n 的路生成的理想, $\mathcal{B} := kQ/I$. 由命题 1 和定理 1 可知, $C_n^b(\text{mod } \mathcal{A}) \cong \text{rep}(Q_I, \text{mod } \mathcal{A}) \cong \text{rep}(\mathcal{B}, \text{mod } \mathcal{A}) \cong \text{mod}(\mathcal{B}^{\text{op}} \otimes_k \mathcal{A})$ 有几乎可裂序列. $\square$

设 $\mathcal{A}$ 为一个对偶化 k -范畴, $\mathcal{E}$ 为 $\mathcal{A}$ 上的平凡正合结构, 即 $\mathcal{E}$ 为由 $\mathcal{A}$ 中所有可裂短正合列构成的类. 记 $\text{proj } \mathcal{A}$ 为 $\text{mod } \mathcal{A}$ 中由所有投射 $\mathcal{A}$ -模, 即所有可表函子, 构成的满子范畴. 因 $\mathcal{A} \rightarrow \text{proj } \mathcal{A}, A \mapsto \mathcal{A}(-, A)$ 为等价函子, 故正合范畴 $(\mathcal{A}, \mathcal{E})$ 与正合范畴 $(\text{proj } \mathcal{A}, \mathcal{F} | \text{proj } \mathcal{A})$ 等价.

对于任意 $M \in \text{mod } \mathcal{A}$ 及 $j \in \mathbb{Z}$, 定义 $J_j(M)$ 为 n -复形 $X = (X^i, d_X^i)_{i \in \mathbb{Z}}$, 其中, 当 $i \in [j, j+n-1]$ 时, $X^i := M$, 否则 $X^i := 0$; 当 $i \in [j, j+n-2]$ 时, $d_X^i := 1_M$, 否则 $d_X^i := 0$.

命题 2 设 $\mathcal{A}$ 为一个带有平凡正合结构 $\mathcal{E}$ 的对偶化 k -范畴, $\text{gl.dim}(\text{mod } \mathcal{A}) < \infty, n \geq 2$, 则正合范畴 $(C_n^b(\mathcal{A}), \mathcal{E}_n^b)$ 有几乎可裂序列.

证明 首先, 证明 $(C_n^b(\mathcal{A}), \mathcal{E}_n^b)$ 有右几乎可裂态射. 因 $(\mathcal{A}, \mathcal{E}) \simeq (\text{proj } \mathcal{A}, \mathcal{F} | \text{proj } \mathcal{A})$, 故

$$(C_n^b(\mathcal{A}), \mathcal{E}_n^b) \simeq (C_n^b(\text{proj } \mathcal{A}), (\mathcal{F} | \text{proj } \mathcal{A})_n^b).$$

于是只需证正合范畴 $(C_n^b(\text{proj } \mathcal{A}), (\mathcal{F} | \text{proj } \mathcal{A})_n^b) = (C_n^b(\text{proj } \mathcal{A}), \mathcal{F}_n^b | C_n^b(\text{proj } \mathcal{A}))$ 有右几乎可裂态射. 为此, 只要证明 $C_n^b(\text{proj } \mathcal{A})$ 为 $C_n^b(\text{mod } \mathcal{A})$ 的一个反变有限子范畴且在 $\mathcal{F}_n^b$ -扩张及直和项下封闭. 显然, 只需证明 $C_n^b(\text{proj } \mathcal{A})$ 在 $C_n^b(\text{mod } \mathcal{A})$ 上是反变有限的, 即对于任意 $Z \in C_n^b(\text{mod } \mathcal{A})$, 都存在右 $C_n^b(\text{proj } \mathcal{A})$ -逼近 $g: Y \rightarrow Z$.

由文献 [17, 第 6 页, 公式 (17)] 知, 存在 $C_n^b(\text{mod } \mathcal{A})$ 中满态射 $p: \bigoplus_{j \in \mathbb{Z}} J_j(Z^j) \rightarrow Z$. 因 $\text{mod } \mathcal{A}$ 有足够多的投射对象, 故对于任意 $j \in \mathbb{Z}$ 都存在 $\text{mod } \mathcal{A}$ 中满态射 $P_j \rightarrow Z^j$, 其中 $P_j \in \text{proj } \mathcal{A}$ 且当 $Z^j = 0$ 时取 $P_j = 0$. 于是存在 $C_n^b(\text{mod } \mathcal{A})$ 中满态射 $p': \bigoplus_{j \in \mathbb{Z}} J_j(P_j) \rightarrow \bigoplus_{j \in \mathbb{Z}} J_j(Z^j)$, 进而存在 $C_n^b(\text{mod } \mathcal{A})$ 中满态射

$$r := pp': \bigoplus_{j \in \mathbb{Z}} J_j(P_j) \twoheadrightarrow \bigoplus_{j \in \mathbb{Z}} J_j(Z^j) \twoheadrightarrow Z.$$

由题设 $\text{gl.dim}(\text{mod } \mathcal{A}) < \infty$ 和文献 [17, 命题 41] 知, Z 有同伦投射解 $q: Q \rightarrow Z$, 其中 $Q \in C_n^b(\text{proj } \mathcal{A})$. 现在验证 $g := (q, r): Y := Q \oplus (\bigoplus_{j \in \mathbb{Z}} J_j(P_j)) \rightarrow Z$ 为 Z 的右 $C_n^b(\text{proj } \mathcal{A})$ -逼近. 换言之, 对于 $C_n^b(\text{mod } \mathcal{A})$ 中任意态射 $g': Z' \rightarrow Z$, 其中 $Z' \in C_n^b(\text{proj } \mathcal{A})$, 我们要证明, 存在 $C_n^b(\text{proj } \mathcal{A})$ 中态射 $g'': Z' \rightarrow Y$ 使得 $g' = gg''$.

因 q 为拟同构, 故 $q^{-1}g': Z' \rightarrow Q$ 为有界导出范畴 $D_n^b(\text{mod } \mathcal{A})$ 中的态射. 由于 $Z' \in C_n^b(\text{proj } \mathcal{A})$ 是同伦投射的, 所以存在 $C_n^b(\text{proj } \mathcal{A})$ 中态射 $h: Z' \rightarrow Q$ 使得在 $D_n^b(\text{mod } \mathcal{A})$ 中有 $h = q^{-1}g'$.

$$\begin{array}{ccc} & Z' & \\ h \swarrow & \downarrow g' & \\ Q & \xrightarrow{q} & Z. \end{array}$$

于是在 $D_n^b(\text{mod } \mathcal{A})$ 中有 $g' = qh$. 又 $Z' \in C_n^b(\text{proj } \mathcal{A})$, 故在有界同伦范畴 $K_n^b(\text{mod } \mathcal{A})$ 中亦有 $g' = qh$. 因此存在 $C_n^b(\text{mod } \mathcal{A})$ 中零伦 $l: Z' \rightarrow Z$, 使得在 $C_n^b(\text{mod } \mathcal{A})$ 中有 $g' = qh + l$. 因为 l 是一个零伦, 所以,

l 可通过 p 分解 (参见文献 [17, 定理 19 的证明]), 设 $l = pl'$. 又 $Z' \in C_n^b(\text{proj } \mathcal{A})$ 的每个分支都是投射的, 故 l' 可通过 p' 分解, 设 $l' = p'l''$. 因此, l 可通过 r 分解.

$$\begin{array}{ccccc} & & & & Z' \\ & & & \nearrow l'' & \downarrow l \\ & & \oplus_{j \in \mathbb{Z}} J_j(P_j) & \xrightarrow{p'} \oplus_{j \in \mathbb{Z}} J_j(Z^j) & \xrightarrow{p} Z \\ & & & \nwarrow l' & \end{array}$$

于是可得

$$g' = qh + l = qh + rl'' = (q, r) \begin{pmatrix} h \\ l'' \end{pmatrix} = gg'',$$

其中

$$g'' := \begin{pmatrix} h \\ l'' \end{pmatrix} : Z' \rightarrow Y = Q \oplus \left(\bigoplus_{j \in \mathbb{Z}} J_j(P_j) \right).$$

从而, $g : Y \rightarrow Z$ 为 Z 的右 $C_n^b(\text{proj } \mathcal{A})$ -逼近. 因此, $C_n^b(\text{proj } \mathcal{A})$ 在 $C_n^b(\text{mod } \mathcal{A})$ 上是反变有限的.

因为 $C_n^b(\mathcal{A})$ 是 Krull-Schmidt 的且 $(C_n^b(\mathcal{A}), \mathcal{E}_n^b)$ 有右几乎可裂态射, 所以, $(C_n^b(\mathcal{A}), \mathcal{E}_n^b)$ 有极小右几乎可裂态射. 进而可证, 若 $Z \in C_n^b(\mathcal{A})$ 为非 $\mathcal{E}_n^b$ -投射的不可分解对象, 则 $(C_n^b(\mathcal{A}), \mathcal{E}_n^b)$ 中存在以 Z 结尾的几乎可裂序列.

因 $\mathcal{A}$ 是对偶化的, 故 $\text{mod } \mathcal{A}^{\text{op}} \simeq (\text{mod } \mathcal{A})^{\text{op}}$. 于是, $\text{gl.dim}(\text{mod } \mathcal{A}^{\text{op}}) = \text{gl.dim}(\text{mod } \mathcal{A}) < \infty$ (参见文献 [29, 第 42 页]). 将上述已得结果应用于对偶化 k -范畴 $\mathcal{A}^{\text{op}}$, 可得 $(C_n^b(\mathcal{A}^{\text{op}}), (\mathcal{E}_n^{\text{op}})^b_n)$ 有右几乎可裂态射, 若 $Z \in C_n^b(\mathcal{A}^{\text{op}})$ 是非 $(\mathcal{E}_n^{\text{op}})^b_n$ -投射的不可分解对象, 则 $(C_n^b(\mathcal{A}^{\text{op}}), (\mathcal{E}_n^{\text{op}})^b_n)$ 中存在以 Z 结尾的几乎可裂序列. 由 $(C_n^b(\mathcal{A}), \mathcal{E}_n^b) \simeq (C_n^b(\mathcal{A}^{\text{op}}), (\mathcal{E}_n^{\text{op}})^b_n)^{\text{op}}$ 知, $(C_n^b(\mathcal{A}), \mathcal{E}_n^b)$ 有左几乎可裂态射, 且若 $X \in C_n^b(\mathcal{A})$ 为非 $\mathcal{E}_n^b$ -内射的不可分解对象, 则 $(C_n^b(\mathcal{A}), \mathcal{E}_n^b)$ 中存在以 X 起始的几乎可裂序列. 因此, $(C_n^b(\mathcal{A}), \mathcal{E}_n^b)$ 有几乎可裂序列. $\square$

对于任意 $m \in \mathbb{N}$, 记 $C_n^m(\mathcal{A})$ 为 $C_n(\mathcal{A})$ 的由所有支撑在区间 $[1, m]$ 上 (即 $X^i = 0, \forall i \notin \{1, 2, \dots, m\}$) 的 n -复形 $X = (X^i, d_X^i)_{i \in \mathbb{Z}}$ 构成的满子范畴. 设 $\mathcal{E}_n^m$ 为既在 $C_n^m(\mathcal{A})$ 中又在 $\mathcal{E}_n$ 中的可合成态射类, 则 $(C_n^m(\mathcal{A}), \mathcal{E}_n^m)$ 为 $(C_n^b(\mathcal{A}), \mathcal{E}_n^b)$ 的一个正合满子范畴.

下面的结论为文献 [5, 推论 4.4] 的推广:

定理 3 设 $\mathcal{A}$ 为一个对偶化 k -范畴, $\mathcal{F}$ 为 Abel 范畴 $\text{mod } \mathcal{A}$ 上的自然的正合结构, $m \geq 1, n \geq 2$, 则正合范畴 $(C_n^m(\text{mod } \mathcal{A}), \mathcal{F}_n^m)$ 有几乎可裂序列.

证明 设 Q 为顶点为 i 箭向为 $a_i : i \rightarrow i+1$ 的箭图, 其中 $1 \leq i \leq m-1$, 即箭图为

$$\begin{array}{ccccccc} \bullet & \xrightarrow{a_1} & \bullet & \xrightarrow{a_2} & \bullet & \cdots & \bullet \xrightarrow{a_m} \bullet \\ 1 & & 2 & & 3 & & m-1 & & m \end{array}$$

I 为 kQ 的由所有长度为 n 的路生成的理想, $\mathcal{B} := kQ/I$. 由命题 1 和定理 1 可知, $C_n^m(\text{mod } \mathcal{A}) \cong \text{rep}(Q_I, \text{mod } \mathcal{A}) \cong \text{rep}(\mathcal{B}, \text{mod } \mathcal{A}) \cong \text{mod}(\mathcal{B}^{\text{op}} \otimes_k \mathcal{A})$ 有几乎可裂序列. $\square$

下面的结论为文献 [5, 定理 4.5] 的推广:

定理 4 设 $\mathcal{A}$ 为一个带有平凡正合结构 $\mathcal{E}$ 的对偶化 k -范畴, $m \geq 1, n \geq 2$, 则正合范畴 $(C_n^m(\mathcal{A}), \mathcal{E}_n^m)$ 有几乎可裂序列.

证明 先证明 $(C_n^m(\mathcal{A}), \mathcal{E}_n^m)$ 有右几乎可裂态射. 因 $(\mathcal{A}, \mathcal{E}) \simeq (\text{proj } \mathcal{A}, \mathcal{F} | \text{proj } \mathcal{A})$, 故 $(C_n^m(\mathcal{A}), \mathcal{E}_n^m) \simeq (C_n^m(\text{proj } \mathcal{A}), (\mathcal{F} | \text{proj } \mathcal{A})_n^m)$. 于是只需证明正合范畴 $(C_n^m(\text{proj } \mathcal{A}), (\mathcal{F} | \text{proj } \mathcal{A})_n^m)$ 有右几乎可裂态射. 为此, 只要证明 $C_n^m(\text{proj } \mathcal{A})$ 为 $C_n^m(\text{mod } \mathcal{A})$ 的一个反变有限子范畴且在 $\mathcal{F}_n^m$ -扩张及直和项下封闭. 显然, 只需证明 $C_n^m(\text{proj } \mathcal{A})$ 在 $C_n^m(\text{mod } \mathcal{A})$ 上是反变有限的, 即对于任意 $Z \in C_n^m(\text{mod } \mathcal{A})$, 都存在右 $C_n^m(\text{proj } \mathcal{A})$ -逼近 $g: Y \rightarrow Z$.

由文献 [17, 第 6 页, 公式 (17)] 知, 存在 $C_n^b(\text{mod } \mathcal{A})$ 中的满态射 $p: \bigoplus_{j=1}^m J_j(Z^j) \rightarrow Z$. 因 $\text{mod } \mathcal{A}$ 有足够多的投射对象, 故对于任意 $j \in [1, m]$, 都存在 $\text{mod } \mathcal{A}$ 中的满态射 $P_j \rightarrow Z^j$, 其中 $P_j \in \text{proj } \mathcal{A}$. 于是存在 $C_n^b(\text{mod } \mathcal{A})$ 中的满态射 $p': \bigoplus_{j=1}^m J_j(P_j) \rightarrow \bigoplus_{j=1}^m J_j(Z^j)$. 将这些态射与自然的嵌入 $p'': \bigoplus_{j=1}^{m-n+1} J_j(P_j) \hookrightarrow \bigoplus_{j=1}^m J_j(P_j)$ 合成, 可得 $C_n^m(\text{mod } \mathcal{A})$ 中的态射

$$r := pp'p'': \bigoplus_{j=1}^{m-n+1} J_j(P_j) \hookrightarrow \bigoplus_{j=1}^m J_j(P_j) \xrightarrow{p'} \bigoplus_{j=1}^m J_j(Z^j) \xrightarrow{p} Z.$$

由文献 [17, 命题 41] 知, Z 有同伦投射解 $q: Q \rightarrow Z$, 其中 $Q \in C_n^{\leq m}(\text{proj } \mathcal{A})$. 我们现在来验证 $g := (\tau_{\geq 1}(q), r): Y := \tau_{\geq 1}(Q) \oplus (\bigoplus_{j=1}^{m-n+1} J_j(P_j)) \rightarrow Z$ 为 Z 的右 $C_n^m(\text{proj } \mathcal{A})$ -逼近, 此处 $\tau_{\geq 1}: C_n(\text{Mod } \mathcal{A}) \rightarrow C_n^{\geq 1}(\text{Mod } \mathcal{A})$ 为硬截断函子 (hard truncation functor), 即对于任意 n -复形 X 及任意 n -复形态射 f , 若 $i \geq 1$, 则 $(\tau_{\geq 1}(X))^i := X^i$, 否则 $(\tau_{\geq 1}(X))^i := 0$; 若 $i \geq 1$, 则 $(\tau_{\geq 1}(f))^i := f^i$, 否则 $(\tau_{\geq 1}(f))^i := 0$ (参见文献 [17, 定义 21]). 换言之, 对于 $C_n^m(\text{mod } \mathcal{A})$ 中任意态射 $g': Z' \rightarrow Z$, 其中 $Z' \in C_n^m(\text{proj } \mathcal{A})$, 我们需要证明, 存在 $C_n^m(\text{proj } \mathcal{A})$ 中态射 $g'': Z' \rightarrow Y$ 使得 $g' = gg''$.

因 q 为拟同构, 故 $q^{-1}g': Z' \rightarrow Q$ 为上有界导出范畴 $D_n^-(\text{mod } \mathcal{A})$ 中态射. 由于 $Z' \in C_n^m(\text{proj } \mathcal{A})$ 是同伦投射的, 所以存在 $C_n^-(\text{proj } \mathcal{A})$ 中态射 $h: Z' \rightarrow Q$, 使得在 $D_n^-(\text{mod } \mathcal{A})$ 中 $h = q^{-1}g'$.

$$\begin{array}{ccc} & Z' & \\ h \swarrow & \downarrow g' & \\ Q & \xrightarrow{q} & Z. \end{array}$$

于是, 在 $D_n^-(\text{mod } \mathcal{A})$ 中有 $g' = qh$. 又 $Z' \in C_n^m(\text{proj } \mathcal{A})$, 故在上有界同伦范畴 $K_n^-(\text{mod } \mathcal{A})$ 中亦有 $g' = qh$. 从而存在 $C_n^m(\text{mod } \mathcal{A})$ 中零伦 $l: Z' \rightarrow Z$, 使得在 $C_n^m(\text{mod } \mathcal{A})$ 有 $g' = qh + l$. 因 l 为零伦, 故 l 可通过 p 分解 (参见文献 [17, 定理 19 的证明]), 设 $l = pl'$. 又 $Z' \in C_n^m(\text{proj } \mathcal{A})$ 的每个分支都是投射的, 故 l' 可通过 p' 分解, 设 $l' = p'l''$. 容易看到, 对于所有的 $m-n+2 \leq j \leq m$, 从 $Z' \in C_n^m(\text{proj } \mathcal{A})$ 到 $J_j(P_j)$ 的态射必为零. 于是, l'' 可通过 p'' 分解, 设 $l'' = p''l'''$. 从而, l 可通过 r 分解.

$$\begin{array}{ccccccc} & & & & Z' & & \\ & & & & \downarrow l & & \\ & & & & \swarrow l' & & \\ & & & & \swarrow l'' & & \\ & & & & \swarrow l''' & & \\ \bigoplus_{j=1}^{m-n+1} J_j(P_j) & \xrightarrow{p''} & \bigoplus_{j=1}^m J_j(P_j) & \xrightarrow{p'} & \bigoplus_{j=1}^m J_j(Z^j) & \xrightarrow{p} & Z. \end{array}$$

将硬截断函子 $\tau_{\geq 1}$ 作用到 $g' = qh + l$ 上, 可得

$$g' = \tau_{\geq 1}(q)\tau_{\geq 1}(h) + l = \tau_{\geq 1}(q)\tau_{\geq 1}(h) + rl''' = (\tau_{\geq 1}(q), r) \begin{pmatrix} \tau_{\geq 1}(h) \\ l''' \end{pmatrix} = gg'',$$

其中

$$g'' := \begin{pmatrix} \tau_{\geq 1}(h) \\ l''' \end{pmatrix} : Z' \rightarrow Y = \tau_{\geq 1}(Q) \oplus \left(\bigoplus_{j=1}^{m-n+1} J_j(P_j) \right).$$

于是, $g: Y \rightarrow Z$ 为 Z 的右 $C_n^m(\text{proj } \mathcal{A})$ -逼近. 因此, $C_n^m(\text{proj } \mathcal{A})$ 在 $C_n^m(\text{mod } \mathcal{A})$ 上是反变有限的.

因为 $C_n^m(\mathcal{A})$ 是 Krull-Schmidt 的且 $(C_n^m(\mathcal{A}), \mathcal{E}_n^m)$ 有右几乎可裂态射, 所以, $(C_n^m(\mathcal{A}), \mathcal{E}_n^m)$ 有极小右几乎可裂态射. 进而可证, 若 $Z \in C_n^m(\mathcal{A})$ 为非 $\mathcal{E}_n^m$ -投射的不可分解对象, 则 $(C_n^m(\mathcal{A}), \mathcal{E}_n^m)$ 中存在以 Z 结尾的几乎可裂序列.

将上述已得结果应用于对偶化 k -范畴 $\mathcal{A}^{\text{op}}$, 可得 $(C_n^m(\mathcal{A}^{\text{op}}), (\mathcal{E}^{\text{op}})_n^m)$ 有右几乎可裂态射, 且若 $Z \in C_n^m(\mathcal{A}^{\text{op}})$ 为非 $(\mathcal{E}^{\text{op}})_n^m$ -投射的不可分解对象, 则 $(C_n^m(\mathcal{A}^{\text{op}}), (\mathcal{E}^{\text{op}})_n^m)$ 中存在以 Z 结尾的几乎可裂序列. 由 $(C_n^m(\mathcal{A}), \mathcal{E}_n^m) \simeq (C_n^m(\mathcal{A}^{\text{op}}), (\mathcal{E}^{\text{op}})_n^m)^{\text{op}}$ 知, $(C_n^m(\mathcal{A}), \mathcal{E}_n^m)$ 有左几乎可裂态射, 且若 $X \in C_n^m(\mathcal{A})$ 为非 $\mathcal{E}_n^m$ -内射的不可分解对象, 则 $(C_n^m(\mathcal{A}), \mathcal{E}_n^m)$ 中存在以 X 起始的几乎可裂序列. 因此, $(C_n^m(\mathcal{A}), \mathcal{E}_n^m)$ 有几乎可裂序列. $\square$

4.2 n -循环复形范畴

设 $\mathcal{A}$ 为一个加法范畴, $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{Z}_n = \{0, 1, \dots, n-1\}$ 为 n 阶加法循环群. $\mathcal{A}$ 上的一个 n -循环复形 $X := (X^i, d_X^i)_{i \in \mathbb{Z}_n}$, 其中 $X^i \in \mathcal{A}$, $d_X^i \in \mathcal{A}(X^i, X^{i+1})$, 满足 $d_X^{i+1}d_X^i = 0, \forall i \in \mathbb{Z}_n$ (参见文献 [25, 第 7 节, 附录]). $\mathcal{A}$ 上的一个 n -循环复形 $X = (X^i, d_X^i)_{i \in \mathbb{Z}_n}$ 可由下图表示:

从 $\mathcal{A}$ 上的 n -循环复形 $X = (X^i, d_X^i)_{i \in \mathbb{Z}_n}$ 到 $\mathcal{A}$ 上的 n -循环复形 $Y = (Y^i, d_Y^i)_{i \in \mathbb{Z}_n}$ 的一个态射 $f := (f^i)_{i \in \mathbb{Z}_n}$, 其中 $f^i \in \mathcal{A}(X^i, Y^i)$ 满足 $f^{i+1}d_X^i = d_Y^i f^i, \forall i \in \mathbb{Z}_n$, 即有下面的交换图:

两个 n -循环复形态射 $f = (f^i)_{i \in \mathbb{Z}_n} : X \rightarrow Y$ 与 $g = (g^i)_{i \in \mathbb{Z}_n} : Y \rightarrow Z$ 的合成 $gf := (g^i f^i)_{i \in \mathbb{Z}_n} : X \rightarrow Z$. $\mathcal{A}$ 上所有 n -循环复形及它们之间的态射构成 $\mathcal{A}$ 上的 n -循环复形范畴, 记作 $C_{\mathbb{Z}_n}(\mathcal{A})$.

设 $(\mathcal{A}, \mathcal{E})$ 为一个正合范畴, $\mathcal{E}_{\mathbb{Z}_n}$ 为满足对于任意 $i \in \mathbb{Z}_n$, 序列 $X^i \xrightarrow{f^i} Y^i \xrightarrow{g^i} Z^i$ 均为 $\mathcal{E}$ 中合并的可合成态射 $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$ 的类, 则 $(C_{\mathbb{Z}_n}(\mathcal{A}), \mathcal{E}_{\mathbb{Z}_n})$ 为一个正合范畴.

定理 5 设 $\mathcal{A}$ 为一个对偶化 k -范畴, $\mathcal{F}$ 为 Abel 范畴 $\text{mod } \mathcal{A}$ 上的自然的正合结构, $n \in \mathbb{N}$, 则正合范畴 $(C_{\mathbb{Z}_n}(\text{mod } \mathcal{A}), \mathcal{F}_{\mathbb{Z}_n})$ 有几乎可裂序列.

证明 设 Q 为以 i 为顶点以 $a_i : i \rightarrow i+1$ 为箭向的箭图, 其中 $i \in \mathbb{Z}_n = \{0, 1, 2, \dots, n-1\}$, 即箭图为

I 为 kQ 的由所有长度为 2 的路生成的理想, $\mathcal{B} := kQ/I$. 由命题 1 和定理 1 知,

$$C_{\mathbb{Z}_n}(\text{mod } \mathcal{A}) \cong \text{rep}(\mathcal{B}, \text{mod } \mathcal{A}) \cong \text{mod} \left(\mathcal{B}^{\text{op}} \bigotimes_k \mathcal{A} \right)$$

有几乎可裂序列. □

对于任意 $M \in \text{mod } \mathcal{A}$ 及 $j \in \mathbb{Z}_n$, 记 $J_j(M)$ 为 n -循环复形 $X = (X^i, d_X^i)_{i \in \mathbb{Z}_n}$: 若 $n \geq 2$, 则当 $i = j, j+1$ 时 $X^i := M$, 否则 $X^i := 0$, 当 $i = j$ 时 $d_X^i := 1_M$, 否则 $d_X^i := 0$; 若 $n = 1$, 则 $X^0 := M \oplus M$,

$$d_X^0 := \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1_M & 0 \end{pmatrix}.$$

若 n -循环茎复形 $X = (X^i, d_X^i)_{i \in \mathbb{Z}_n}$ 中至多有一个分支 $X^i \neq 0$, 则称其为一个 n -循环茎复形. 记 $C_{\mathbb{Z}_n}^b(\mathcal{A})$ 为 $C_{\mathbb{Z}_n}(\mathcal{A})$ 的包含所有 n -循环茎复形且在有限 $\mathcal{E}_{\mathbb{Z}_n}$ -扩张下封闭的最小的满子范畴, $\mathcal{E}_{\mathbb{Z}_n}^b := \mathcal{E}_{\mathbb{Z}_n} \mid C_{\mathbb{Z}_n}^b(\mathcal{A})$, 则 $(C_{\mathbb{Z}_n}^b(\mathcal{A}), \mathcal{E}_{\mathbb{Z}_n}^b)$ 为 $(C_{\mathbb{Z}_n}(\mathcal{A}), \mathcal{E}_{\mathbb{Z}_n})$ 的一个正合满子范畴.

命题 3 设 $\mathcal{A}$ 为一个带有平凡正合结构 $\mathcal{E}$ 的对偶化 k -范畴, $\text{gl.dim}(\text{mod } \mathcal{A}) < \infty$, $n \in \mathbb{N}$, 则正合范畴 $(C_{\mathbb{Z}_n}^b(\mathcal{A}), \mathcal{E}_{\mathbb{Z}_n}^b)$ 有几乎可裂序列.

证明 首先证明 $(C_{\mathbb{Z}_n}^b(\mathcal{A}), \mathcal{E}_{\mathbb{Z}_n}^b)$ 有右几乎可裂态射. 因 $(\mathcal{A}, \mathcal{E}) \simeq (\text{proj } \mathcal{A}, \mathcal{F} \mid \text{proj } \mathcal{A})$, 故

$$(C_{\mathbb{Z}_n}^b(\mathcal{A}), \mathcal{E}_{\mathbb{Z}_n}^b) \simeq (C_{\mathbb{Z}_n}^b(\text{proj } \mathcal{A}), (\mathcal{F} \mid \text{proj } \mathcal{A})_{\mathbb{Z}_n}^b).$$

于是只需证明 $(C_{\mathbb{Z}_n}^b(\text{proj } \mathcal{A}), (\mathcal{F} \mid \text{proj } \mathcal{A})_{\mathbb{Z}_n}^b) = (C_{\mathbb{Z}_n}^b(\text{proj } \mathcal{A}), \mathcal{F}_{\mathbb{Z}_n} \mid C_{\mathbb{Z}_n}^b(\text{proj } \mathcal{A}))$ 有右几乎可裂态射. 为此, 只要证明 $C_{\mathbb{Z}_n}^b(\text{proj } \mathcal{A})$ 为 $C_{\mathbb{Z}_n}(\text{mod } \mathcal{A})$ 的一个反变有限子范畴且在 $\mathcal{F}_{\mathbb{Z}_n}$ -扩张及直和项下封闭. 显然, 只需证明 $C_{\mathbb{Z}_n}^b(\text{proj } \mathcal{A})$ 在 $C_{\mathbb{Z}_n}(\text{mod } \mathcal{A})$ 上是反变有限的, 即对于任意 $Z \in C_{\mathbb{Z}_n}(\text{mod } \mathcal{A})$ 都存在右 $C_{\mathbb{Z}_n}^b(\text{proj } \mathcal{A})$ -逼近 $g : Y \rightarrow Z$.

由文献 [25, 第 53 页, 命题 7.1 的证明] 知, 存在 $C_{\mathbb{Z}_n}(\text{mod } \mathcal{A})$ 中满态射 $p : \bigoplus_{j=0}^{n-1} J_j(Z^j) \twoheadrightarrow Z$. 因 $\text{mod } \mathcal{A}$ 有足够多的投射对象, 故对于任意 $j \in \mathbb{Z}_n$, 都存在 $\text{mod } \mathcal{A}$ 中满态射 $P_j \twoheadrightarrow Z^j$, 其中 $P^j \in \text{proj } \mathcal{A}$.

于是存在 $C_{\mathbb{Z}_n}(\text{mod } \mathcal{A})$ 中满态射 $p' : \bigoplus_{j=0}^{n-1} J_j(P_j) \twoheadrightarrow \bigoplus_{j=0}^{n-1} J_j(Z^j)$. 从而有 $C_{\mathbb{Z}_n}(\text{mod } \mathcal{A})$ 中满态射

$$r = pp' : \bigoplus_{j=0}^{n-1} J_j(P_j) \twoheadrightarrow \bigoplus_{j=0}^{n-1} J_j(Z^j) \twoheadrightarrow Z.$$

由 n -循环复形 $Z \in C_{\mathbb{Z}_n}(\text{mod } \mathcal{A})$ 可构造复形 $\tilde{Z} = (\tilde{Z}^i, d_{\tilde{Z}}^i)_{i \in \mathbb{Z}}$, 其中 $\tilde{Z}^i := Z^i$, $d_{\tilde{Z}}^i := d_Z^i$, $\forall i \in \mathbb{Z}$. 由文献 [37, 引理 5.7.2] 知, $\tilde{Z}$ 有 Cartan-Eilenberg 解 P_{**} , 其全复形 (total complex) $\text{Tot}^\oplus(P_{**})$, 记作 $\tilde{Q}$, 在 $C_2(\text{Mod } \mathcal{A})$ 中与 $\tilde{Z}$ 拟同构. 设 $\tilde{q} : \tilde{Q} \rightarrow \tilde{Z}$ 为这样一个拟同构. 因 $\text{gl.dim}(\text{mod } \mathcal{A}) < \infty$, 故在构造 P_{**} 的过程中可以选取 $\tilde{Z}$ 的上同调及上边界 (coboundary) 的投射解, 进而可选取上循环 (cocycles) 及分支 (component) 的投射解, 均为有限长的, 即可以设 $\tilde{Q}$ 的每个分支都是有限生成投射的, 亦即 $\tilde{Q} \in C_2(\text{proj } \mathcal{A})$. 由 $\tilde{Q}$ 可以构造一个 n -循环复形 $Q = (Q^i, d_Q^i)_{i \in \mathbb{Z}_n}$, 其中 $Q^i := \tilde{Q}^i$, $d_Q^i := d_{\tilde{Q}}^i$, $\forall i \in \mathbb{Z}_n$. 于是, $Q \in C_{\mathbb{Z}_n}^b(\text{proj } \mathcal{A})$, 且存在拟同构 $q : Q \rightarrow Z$ (比较文献 [38, 命题 2.5] 与 [39, 引理 3.5]). 现在来验证 $g := (q, r) : Y := Q \oplus (\bigoplus_{j=0}^{n-1} J_j(P_j)) \rightarrow Z$ 为 Z 的一个右 $C_{\mathbb{Z}_n}^b(\text{proj } \mathcal{A})$ -逼近. 换言之, 对于 $C_{\mathbb{Z}_n}(\text{mod } \mathcal{A})$ 中任意态射 $g' : Z' \rightarrow Z$, 其中 $Z' \in C_{\mathbb{Z}_n}^b(\text{proj } \mathcal{A})$, 我们要证明存在 $C_{\mathbb{Z}_n}^b(\text{proj } \mathcal{A})$ 中态射 $g'' : Z' \rightarrow Y$ 使得 $g' = gg''$.

因 q 为拟同构, 故有 $D_{\mathbb{Z}_n}(\text{mod } \mathcal{A})$ 中态射 $q^{-1}g' : Z' \rightarrow Q$. 又 $Z' \in C_{\mathbb{Z}_n}^b(\text{proj } \mathcal{A})$ 为同伦投射的 (参见文献 [38, 命题 2.4]), 存在 $C_{\mathbb{Z}_n}^b(\text{proj } \mathcal{A})$ 中态射 $h : Z' \rightarrow Q$, 使得在导出范畴 $D_{\mathbb{Z}_n}(\text{mod } \mathcal{A})$ 中有 $h = q^{-1}g'$.

$$\begin{array}{ccc} & Z' & \\ h \swarrow & \downarrow g' & \\ Q & \xrightarrow{q} & Z. \end{array}$$

于是在 $D_{\mathbb{Z}_n}(\text{mod } \mathcal{A})$ 中有 $g' = qh$. 又 $Z' \in C_{\mathbb{Z}_n}^b(\text{proj } \mathcal{A})$, 故在同伦范畴 $K_{\mathbb{Z}_n}(\text{mod } \mathcal{A})$ 中亦有 $h = q^{-1}g'$. 因此存在 $C_{\mathbb{Z}_n}(\text{mod } \mathcal{A})$ 中零伦 $l : Z' \rightarrow Z$, 使得在 $C_{\mathbb{Z}_n}(\text{mod } \mathcal{A})$ 中有 $g' = qh + l$. 由于 l 为零伦, 因此, l 可通过 p 分解 (参见文献 [25, 第 53 页, 命题 7.1 的证明]), 设 $l = pl'$. 因 $Z' \in C_{\mathbb{Z}_n}^b(\text{proj } \mathcal{A})$, 故 Z' 的每个分支都是投射的. 于是, l' 可通过 p' 分解, 设 $l' = p'l''$. 从而, l 可通过 r 分解.

$$\begin{array}{ccccc} & & & Z' & \\ & & & \downarrow l & \\ & & l'' \swarrow & & \\ & & \swarrow l' & & \\ \bigoplus_{j=0}^{n-1} J_j(P_j) & \xrightarrow{p'} & \bigoplus_{j=0}^{n-1} J_j(Z^j) & \xrightarrow{p} & Z, \end{array}$$

进而可得

$$g' = qh + l = qh + pl'' = (q, r) \begin{pmatrix} h \\ l'' \end{pmatrix} = gg'',$$

其中

$$g'' := \begin{pmatrix} h \\ l'' \end{pmatrix} : Z' \rightarrow Y = Q \oplus \left(\bigoplus_{j=0}^{n-1} J_j(P_j) \right).$$

于是, $g : Y \rightarrow Z$ 为 Z 的右 $C_{\mathbb{Z}_n}^b(\text{proj } \mathcal{A})$ -逼近. 因此, $C_{\mathbb{Z}_n}^b(\text{proj } \mathcal{A})$ 在 $C_{\mathbb{Z}_n}(\text{mod } \mathcal{A})$ 上是反变有限的.

因为 $C_{\mathbb{Z}_n}^b(\mathcal{A})$ 是 Krull-Schmidt 的且 $(C_{\mathbb{Z}_n}^b(\mathcal{A}), \mathcal{E}_{\mathbb{Z}_n}^b)$ 有右几乎可裂态射, 所以, $(C_{\mathbb{Z}_n}^b(\mathcal{A}), \mathcal{E}_{\mathbb{Z}_n}^b)$ 有极小右几乎可裂态射. 进而可证, 若 $Z \in C_{\mathbb{Z}_n}^b(\mathcal{A})$ 为非 $\mathcal{E}_{\mathbb{Z}_n}^b$ - 投射的不可分解对象, 则 $(C_{\mathbb{Z}_n}^b(\mathcal{A}), \mathcal{E}_{\mathbb{Z}_n}^b)$ 中存在以 Z 结尾的几乎可裂序列.

将上述已得结果应用于对偶化 k - 范畴 $\mathcal{A}^{\text{op}}$, 可得 $(C_{\mathbb{Z}_n}^b(\mathcal{A}^{\text{op}}), (\mathcal{E}^{\text{op}})_{\mathbb{Z}_n}^b)$ 有右几乎可裂态射, 且若 $Z \in C_{\mathbb{Z}_n}^b(\mathcal{A}^{\text{op}})$ 为非 $(\mathcal{E}^{\text{op}})_{\mathbb{Z}_n}^b$ - 投射的不可分解对象, 则 $(C_{\mathbb{Z}_n}^b(\mathcal{A}^{\text{op}}), (\mathcal{E}^{\text{op}})_{\mathbb{Z}_n}^b)$ 中存在以 Z 结尾的几乎可裂序列. 由 $(C_{\mathbb{Z}_n}^b(\mathcal{A}), \mathcal{E}_{\mathbb{Z}_n}^b) \simeq (C_{\mathbb{Z}_n}^b(\mathcal{A}^{\text{op}}), (\mathcal{E}^{\text{op}})_{\mathbb{Z}_n}^b)^{\text{op}}$ 知, $(C_{\mathbb{Z}_n}^b(\mathcal{A}), \mathcal{E}_{\mathbb{Z}_n}^b)$ 有左几乎可裂态射, 且若 $X \in C_{\mathbb{Z}_n}^b(\mathcal{A})$ 为非 $\mathcal{E}_{\mathbb{Z}_n}^b$ - 内射的不可分解对象, 则 $(C_{\mathbb{Z}_n}^b(\mathcal{A}), \mathcal{E}_{\mathbb{Z}_n}^b)$ 中存在以 X 起始的几乎可裂序列. 因此, $(C_{\mathbb{Z}_n}^b(\mathcal{A}), \mathcal{E}_{\mathbb{Z}_n}^b)$ 有几乎可裂序列. $\square$

推论 3 设 $\mathcal{A}$ 为一个带有平凡正合结构 $\mathcal{E}$ 的对偶化 k - 范畴, $\text{gl.dim}(\text{mod } \mathcal{A}) \leq 1$, $n \in \mathbb{N}$, 则正合范畴 $(C_{\mathbb{Z}_n}^b(\mathcal{A}), \mathcal{E}_{\mathbb{Z}_n}^b)$ 有几乎可裂序列.

证明 类似文献 [26, 引理 4.2] (比较文献 [40, 命题 9.7]), 因为 $\text{gl.dim}(\text{mod } \mathcal{A}) \leq 1$, 故 $C_{\mathbb{Z}_n}^b(\mathcal{A}) = C_{\mathbb{Z}_n}(\mathcal{A})$. 于是由命题 3 立得推论. $\square$

参考文献

- 1 Auslander M, Reiten I. Stable equivalence of dualizing R -varieties. *Adv Math*, 1974, 12: 306–366
- 2 Reiten I. The use of almost split sequences in the representation theory of Artin algebras. In: *Lecture Notes in Mathematics*, vol. 944. Berlin: Springer, 1982, 29–104
- 3 Auslander M, Smalø S O. Almost split sequences in subcategories. *J Algebra*, 1981, 69: 426–454
- 4 Gabriel P, Roiter A V. Representations of Finite-Dimensional Algebras. *Algebra VIII. Encyclopaedia Mathematical Sciences*, vol. 73. Berlin: Springer, 1992
- 5 Bautista R, Souto Salorio M J, Zuazua R. Almost split sequences for complexes of fixed size. *J Algebra*, 2005, 287: 140–168
- 6 Mayer W. A new homology theory, I; II. *Ann of Math* (2), 1942, 43: 370–380; 594–605
- 7 Spanier E H. The Mayer homology theory. *Bull Amer Math Soc*, 1949, 55: 102–112
- 8 Cibils C, Solotar A, Wisbauer R. N -complexes as functors, amplitude cohomology and fusion rules. *Comm Math Phys*, 2007, 272: 837–849
- 9 Dubois-violette M. $d^N = 0$: Generalized homology. *K-Theory*, 1998, 14: 371–404
- 10 Dubois-Violette M, Kerner R. Universal q -differential calculus and q -analog of homological algebra. *Acta Math Univ Comenian (NS)*, 1996, 65: 175–188
- 11 Kapranov M M. On the q -analog of homological algebra. *ArXiv:q-alg/9611005*, 1996
- 12 Kassel C, Wambst M. Algèbre homologique des N -complexes et homologie de Hochschild aux racines de l'unité. *Publ Res Inst Math Sci*, 1998, 34: 91–114
- 13 Estrada S. Monomial algebras over infinite quivers, applications to N -complexes of modules. *Comm Algebra*, 2007, 35: 3214–3225
- 14 Tikaradze A. Homological constructions on N -complexes. *J Pure Appl Algebra*, 2002, 176: 213–222
- 15 Bahiraei P, Hafezi R, Nematbakhsh A. Homotopy category of N -complexes of projective modules. *J Pure Appl Algebra*, 2016, 220: 2414–2433
- 16 Gillespie J. The homotopy category of N -complexes is a homotopy category. *J Homotopy Relat Struct*, 2015, 10: 93–106
- 17 Iyama O, Kato K, Miyachi J. Derived categories of N -complexes. *J Lond Math Soc* (2), 2017, 96: 687–716
- 18 Yang X Y, Ding N Q. The homotopy category and derived category of N -complexes. *J Algebra*, 2015, 426: 430–476
- 19 Berger R. Koszulity for nonquadratic algebras. *J Algebra*, 2001, 239: 705–734
- 20 Berger R, Dubois-Violette M, Wambst M. Homogeneous algebras. *J Algebra*, 2003, 261: 172–185
- 21 Green E L, Marcos E N, Martínez-Villa R, et al. D -Koszul algebras. *J Pure Appl Algebra*, 2004, 193: 141–162
- 22 Bautista R. Derived endo-discrete Artin algebras. *Colloq Math*, 2006, 105: 297–310
- 23 Bautista R. On derived tame algebras. *Bol Soc Mat Mexicana* (3), 2007, 13: 25–54

- 24 Zhang C. On algebras of strongly derived unbounded type. *J Pure Appl Algebra*, 2016, 220: 1462–1474
- 25 Peng L G, Xiao J. Root categories and simple Lie algebras. *J Algebra*, 1997, 198: 19–56
- 26 Bridgeland T. Quantum groups via Hall algebras of complexes. *Ann of Math (2)*, 2013, 177: 739–759
- 27 Chen Q H, Deng B M. Cyclic complexes, Hall polynomials and simple Lie algebras. *J Algebra*, 2015, 440: 1–32
- 28 Ringel C M, Zhang P. Representations of quivers over the algebra of dual numbers. *J Algebra*, 2017, 475: 327–360
- 29 Mitchell B. Rings with several objects. *Adv Math*, 1972, 8: 1–161
- 30 Auslander M. Representation dimension of Artin algebras. In: *Selected Works of Maurice Auslander*, vol. 1. Providence: Amer Math Soc, 1999, 505–574
- 31 Bongartz K, Gabriel P. Covering spaces in representation-theory. *Invent Math*, 1982, 65: 331–378
- 32 Dräxler P, Reiten I, Smalø S O, et al. Exact categories and vector space categories. *Trans Amer Math Soc*, 1999, 351: 647–682
- 33 Auslander M, Smalø S O. Preprojective modules over Artin algebras. *J Algebra*, 1980, 66: 61–122
- 34 Enochs E, Estrada S. Projective representations of quivers. *Comm Algebra*, 2005, 33: 3467–3478
- 35 Enochs E, Herzog I. A homotopy of quiver morphisms with applications to representations. *Canad J Math*, 1999, 51: 294–308
- 36 Enochs E, Oyonarte L, Torrecillas B. Flat covers and flat representations of quivers. *Comm Algebra*, 2004, 32: 1319–1338
- 37 Weibel C A. *An Introduction to Homological Algebra*. Cambridge Studies in Advanced Mathematics, Vol. 38. Cambridge: Cambridge University Press, 1994
- 38 Zhao X J. A note on the equivalence of m -periodic derived categories. *Sci China Math*, 2014, 57: 2329–2334
- 39 Stai T. The triangulated hull of periodic complexes. *ArXiv:1510.03574*, 2015
- 40 Gorsky M. Semi-derived Hall algebras and tilting invariance of Bridgeland-Hall algebras. *ArXiv:1303.5879*, 2013

A construction of dualizing categories by tensor product of categories

Yang Han & Ningmei Zhang

Abstract In this paper, it is shown that, the idempotent completion of the additive hull of the tensor product of the residue category of the category of paths of a locally finite quiver modulo a monomial admissible ideal and a dualizing category, is dualizing. Furthermore, it is proved that the category of finitely presented functors over such a tensor product category is dualizing and has almost split sequences. As applications, the category of morphisms and the category of composable morphisms of the category of finitely presented functors, and the categories of all kinds of n -(cyclic) complexes, over a dualizing category, are proved to have almost split sequences.

Keywords dualizing category, tensor product of categories, representation of a quiver, finitely presented functor, almost split sequence

MSC(2010) 16G70, 16G20, 18A25, 18E10

doi: 10.1360/N012017-00189