论文

断裂问题的插值型无单元伽辽金比例边界法与有限元法的耦合研究

陈莘莘*, 王娟

华东交通大学土木建筑学院, 南昌 330013

*联系人, E-mail: chenshenshen@tsinghua.org.cn

收稿日期: 2017-10-09; 接受日期: 2017-10-30; 网络出版日期: 2017-12-18

国家自然科学基金(编号: 11462006)和江西省高校科技落地计划(编号: KJLD14041)资助项目

摘要 插值型无单元伽辽金比例边界法是一种只需在计算域的边界上采用插值型无单元伽辽金法离散且无需基本解的半解析数值方法, 特别适用于求解包含无限域和奇异物理场的问题. 本文提出了一种用于断裂分析的插值型无单元伽辽金比例边界法与有限元法的耦合分析方法, 更好地发挥插值型无单元伽辽金比例边界法和有限元法各自的优势. 裂尖周边一定范围的计算域采用插值型无单元伽辽金比例边界法模拟, 而其余区域则采用有限元法模拟. 在这两个区域内, 分别采用各自相应的位移模式, 两者相互独立. 利用交界面两侧位移的连续条件, 可以方便地建立耦合求解方程, 简明有效, 易于编程计算. 最后给出了两个数值算例验证本文方法的有效性.

关键词 断裂力学, 插值型无单元伽辽金比例边界法, 有限元法, 耦合技术, 应力强度因子

PACS: 02.60.Ed, 02.70.-c, 02.70.Pt, 46.15.-x

裂尖应力强度因子的确定是断裂力学和工程结构断裂分析的最重要的问题之一. 由于实际工程结构、载荷和边界条件的复杂性, 各种数值方法^[1-6]已经成为求解应力强度因子的重要和有效方法. 目前, 发展最为成熟的数值方法是有限元法(Finite Element Method, FEM), 现已成为解决科学和工程问题最有效的数值分析工具. 然而有限元法在处理裂纹这样的不连续问题时, 裂尖附近的高应力区需要令人难以接受的网格密度^[6].

为了克服有限元法的上述缺陷, 许多学者开始致力于其他数值方法的研究. 插值型无单元伽辽金

比例边界法(Interpolating Element-Free Galerkin Scaled Boundary Method, IEFG-SBM)^[7-9]是最近发展起来的一种兼顾了比例边界有限元法^[10-13]与无网格法^[14-16]优点的半解析方法, 该方法只对计算域的边界采用插值型无单元伽辽金法进行数值离散, 仅需要边界上离散节点的信息, 不需要基本解, 而且在没有离散的径向利用解析方法求解. 采用改进的插值型移动最小二乘(Improved Interpolating Moving Least-Squares, IIMLS)法^[17,18]构造的环向形函数满足Kronecker delta函数性质, 本质边界条件可以直接准确地施加. 此外, IIMLS法不仅能有效地克服Lancaster等人^[19]提出的插值型移动最小二乘法

引用格式: 陈莘莘, 王娟. 断裂问题的插值型无单元伽辽金比例边界法与有限元法的耦合研究. 中国科学: 物理学 力学 天文学, 2018, 48: 024601
Chen S S, Wang J. Coupled interpolating element-free Galerkin scaled boundary method and finite element method for crack problems (in Chinese). Sci Sin-Phys Mech Astron, 2018, 48: 024601, doi: [10.1360/SSPMA2017-00283](https://doi.org/10.1360/SSPMA2017-00283)

基于奇异权函数的缺点, 而且计算形函数时待定系数比传统的移动最小二乘法少一个.

然而, IIEFG-SBM离散时必须保证所有边界均从相似中心可见, 否则需要将求解域进行划分. 为了充分利用FEM的成熟性, 又发挥IIEFG-SBM的独特优势, 并提高算法的通用性和解决问题的广泛性, 借鉴文献[20,21]的思路, 本文提出了特别适合于断裂分析的IIEFG-SBM与FEM的耦合方法. 该方法将裂尖周边一定范围的计算域采用IIEFG-SBM离散, 而其余区域则采用FEM离散, 两者相互独立, 互不干扰. 然后, 通过交界面两侧位移的连续性便可实现IIEFG-SBM离散方程与FEM离散方程的耦合, 无需对裂纹周边进行精细FEM网格划分, 前处理灵活方便, 而且易于编程计算. 最后, 通过典型数值算例的计算和对比分析验证了本文方法的有效性与合理性.

1 改进的插值型移动最小二乘法

设在某一光滑的边界段 S_i 上随机离散分布 N 个节点 $s_1, s_2, \dots, s_N$, 其中 s 代表 S_i 上从起点开始的弧长.

令 $p_1(s), p_2(s), \dots, p_m(s)$ 表示给定用来构造逼近函数的一组基函数, 其中 $p_1(s) \equiv 1$. 为了使权函数非奇异, 并且逼近函数满足插值性质, 将由给定的基函数构造一组新的基函数. 令

$$\widehat{p}_i(\bar{s})_s = p_i(\bar{s}) - \sum_{l=1}^n v(s, s_l) p_i(s_l) \quad (i = 1, 2, \dots, m), \quad (1)$$

其中 $\bar{s}$ 表示点 s 局部影响域内的点, n 为点 s 局部影响域内的节点数, s_l 为边界上影响域覆盖 s 的节点, 并且

$$v(s, s_l) = \prod_{j \neq l} \frac{s - s_j}{s_l - s_j}. \quad (2)$$

对于函数 $u(s)$ 也进行与基函数相同的变换, 即构造局部函数

$$\widehat{u}(\bar{s})_s = u(\bar{s}) - \sum_{l=1}^n v(s, s_l) u(s_l). \quad (3)$$

基于新的基函数, 采用移动最小二乘法可获得局部函数 $\widehat{u}(\bar{s})_s$ 的逼近函数 $\widehat{u}^h(\bar{s})_s$ 如下^[17,18]:

$$\widehat{u}^h(\bar{s})_s = \widehat{\mathbf{p}}^T(\bar{s})_s \mathbf{A}^{-1}(s) \mathbf{H}(s) \mathbf{u} \quad (4)$$

其中

$$\widehat{\mathbf{p}}^T(\bar{s})_s = (\widehat{p}_2(\bar{s})_s, \widehat{p}_3(\bar{s})_s, \dots, \widehat{p}_m(\bar{s})_s), \quad (5)$$

$$\mathbf{u} = (u(s_1), u(s_2), \dots, u(s_n))^T, \quad (6)$$

$$\mathbf{A}(s) = \sum_{l=1}^n w_l(s) \widehat{\mathbf{p}}(s_l)_s \widehat{\mathbf{p}}^T(s_l)_s, \quad (7)$$

$$\mathbf{H}(s) = \sum_{l=1}^n w_l(s) \widehat{\mathbf{p}}(s_l)_s (\mathbf{e}_l - \mathbf{v}(s)), \quad (8)$$

其中 $\mathbf{e}_l$ 为 n 维单位行向量, 其第 l 个元素为1, 且

$$\widehat{\mathbf{p}}^T(s_l)_s = (\widehat{p}_2(s_l)_s, \widehat{p}_3(s_l)_s, \dots, \widehat{p}_m(s_l)_s), \quad (9)$$

$$\mathbf{v}(s) = (v(s, s_1), v(s, s_2), \dots, v(s, s_n)). \quad (10)$$

本文采用4次样条权函数, 即

$$w_l(\bar{r}) = 1 - 6\bar{r}^2 + 8\bar{r}^3 - 3\bar{r}^4, \quad \bar{r} \leq 1, \quad (11)$$

其中 $\bar{r} = |s - s_l| / r_l$, r_l 为权函数支撑域半径. 本文中各节点的支撑域半径取为 $r_l = \alpha \cdot \Delta s$, 其中 Δs 为相邻节点之间的距离, 系数 α 取4.0.

根据式(3)和(4), 函数 $u(s)$ 的逼近函数可以写为

$$u^h(s) = \Phi(s) \mathbf{u} = \sum_{l=1}^n \phi_l(s) u(s_l), \quad (12)$$

其中形函数矩阵 $\Phi(s)$ 为

$$\begin{aligned} \Phi(s) &= ((\phi_1(s), \phi_2(s), \dots, \phi_n(s)) \\ &= \mathbf{v}(s) + \mathbf{g}^T(s) \mathbf{A}^{-1}(s) \mathbf{H}(s), \end{aligned} \quad (13)$$

$$\mathbf{g}^T(s) = (g_2(s), g_3(s), \dots, g_m(s)), \quad (14)$$

$$g_i(s) = p_i(s) - \sum_{l=1}^n v(s, s_l) p_i(s_l). \quad (15)$$

2 IIEFG-SBM基本原理

在IIEFG-SBM中, 需要引入一个如图1所示的内部包含相似中心 $O(\bar{x}_0, \bar{y}_0)$ 的比例边界坐标系 (ξ, s) . 其中, 径向坐标 ξ 从相似中心指向边界, 在相似中心取值为0而在边界上取值为1, 而环向坐标 s 则沿着边界逆时针方向. 设相似中心在笛卡尔坐标系下的坐标为 (x_0, y_0) , 则比例边界坐标 (ξ, s) 与笛卡尔坐标 $(\bar{x}, \bar{y})$ 的关系为

$$\bar{x} = \bar{x}_0 + \xi x(s), \quad \bar{y} = \bar{y}_0 + \xi y(s), \quad (16)$$

图 1 比例边界坐标系

Figure 1 Scaled boundary coordinate system.

其中 $(x(s), y(s))$ 为边界上任一点的坐标, $(\bar{x}, \bar{y})$ 为域内点的坐标.

基于式(12), 域内任一点处的位移 $\mathbf{u}(\xi, s)$ 可表示为半解析的形式:

$$\mathbf{u}(\xi, s) = \Phi(s)\mathbf{u}(\xi), \quad (17)$$

其中 $\mathbf{u}(\xi)$ 为径向节点位移函数, $\Phi(s)$ 为环向形函数矩阵.

将式(17)代入虚功原理, 可推导出IEFG-SBM的控制方程为^[8]

$$\mathbf{E}_0 \xi^2 \mathbf{u}(\xi)_{,\xi\xi} + (\mathbf{E}_0 + \mathbf{E}_1^T - \mathbf{E}_1) \xi \mathbf{u}(\xi)_{,\xi} - \mathbf{E}_2 \mathbf{u}(\xi) = 0, \quad (18)$$

$$\mathbf{P}_m = (\mathbf{E}_0 \mathbf{u}(\xi)_{,\xi} + \mathbf{E}_1^T \mathbf{u}(\xi))|_{\xi=1}, \quad (19)$$

其中 $\mathbf{P}_m$ 为等效节点力向量, $\mathbf{E}_0$, $\mathbf{E}_1$ 和 $\mathbf{E}_2$ 是由几何和材料属性决定的系数矩阵, 具体形式为

$$\mathbf{E}_0 = \int_S \mathbf{B}_1(s)^T \mathbf{D} \mathbf{B}_1(s) |J| ds, \quad (20)$$

$$\mathbf{E}_1 = \int_S \mathbf{B}_2(s)^T \mathbf{D} \mathbf{B}_1(s) |J| ds, \quad (21)$$

$$\mathbf{E}_2 = \int_S \mathbf{B}_2(s)^T \mathbf{D} \mathbf{B}_2(s) |J| ds, \quad (22)$$

其中 $\mathbf{D}$ 为材料的弹性矩阵, $|J|$ 为边界上的雅可比行列式值, 且有

$$|J| = x(s)y(s)_{,s} - y(s)x(s)_{,s}. \quad (23)$$

$\mathbf{B}_1(s)$ 和 $\mathbf{B}_2(s)$ 是应变矩阵, 具体形式为

$$\mathbf{B}_1(s) = \frac{1}{|J|} \begin{bmatrix} y(s)_{,s} & 0 \\ 0 & -x(s)_{,s} \\ -x(s)_{,s} & y(s)_{,s} \end{bmatrix} \Phi(s), \quad (24)$$

$$\mathbf{B}_2(s) = \frac{1}{|J|} \begin{bmatrix} -y(s) & 0 \\ 0 & x(s) \\ x(s) & -y(s) \end{bmatrix} \Phi(s)_{,s}. \quad (25)$$

引入 $\mathbf{u}(\xi)$ 的对偶变量 $\mathbf{q}(\xi)$, 方程(18)可以转化为一阶常微分方程, 即

$$\mathbf{q}(\xi) = \mathbf{E}_0 \xi \mathbf{u}(\xi)_{,\xi} + \mathbf{E}_1^T \mathbf{u}(\xi), \quad (26)$$

$$\xi \begin{pmatrix} \mathbf{u}(\xi) \\ \mathbf{q}(\xi) \end{pmatrix}_{,\xi} = -\mathbf{Z} \begin{pmatrix} \mathbf{u}(\xi) \\ \mathbf{q}(\xi) \end{pmatrix}, \quad (27)$$

其中

$$\mathbf{Z} = \begin{bmatrix} \mathbf{E}_0^{-1} \mathbf{E}_1^T & -\mathbf{E}_0^{-1} \\ \mathbf{E}_1 \mathbf{E}_0^{-1} \mathbf{E}_1^T - \mathbf{E}_2 & -\mathbf{E}_1 \mathbf{E}_0^{-1} \end{bmatrix}. \quad (28)$$

对矩阵 $\mathbf{Z}$ 进行分块对角Schur分解^[11], 可得

$$\mathbf{Z} = \Psi \mathbf{S} \Psi^{-1}, \quad (29)$$

其中

$$\mathbf{S} = \text{diag} \left(\mathbf{S}_1 \cdots \mathbf{S}_{N-1} \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{I} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{S}_{N+2} \cdots \mathbf{S}_{2N} \right), \quad (30)$$

$$\Psi = \begin{bmatrix} \psi_1^u & \cdots & \psi_{N-1}^u & \psi_N^u & \psi_{N+1}^u & \cdots & \psi_{2N}^u \\ \psi_1^q & \cdots & \psi_{N-1}^q & \psi_N^q & \psi_{N+1}^q & \cdots & \psi_{2N}^q \end{bmatrix}, \quad (31)$$

$$\lambda(\mathbf{S}_1) \leq \lambda(\mathbf{S}_2) \leq \cdots \leq \lambda(\mathbf{S}_{2N}), \quad (32)$$

其中, $\mathbf{I}$ 为 2×2 的单位矩阵, $\lambda(\mathbf{S}_i)$ 表示分块矩阵 $\mathbf{S}_i$ 的特征值实部. IEFG-SBM计算域的刚度矩阵 $\mathbf{K}_m$ 可相应地表示为

$$\mathbf{K}_m = (\psi_1^q \cdots \psi_{N-1}^q \psi_N^q) (\psi_1^u \cdots \psi_{N-1}^u \psi_N^u)^{-1}. \quad (33)$$

IEFG-SBM计算域的边界节点位移 $\mathbf{u}_m$ 可结合边界条件通过如下的平衡方程式进行求解:

$$\mathbf{K}_m \mathbf{u}_m = \mathbf{P}_m. \quad (34)$$

IEFG-SBM计算域内任一点的应力可由下式计算得到

$$\sigma(\xi, s) = \sum_{i=1}^{N-1} \psi_{oi}(s) \xi^{-s_i-1} \mathbf{c}_i, \quad (35)$$

其中

$$\mathbf{c} = (\psi_1^u \cdots \psi_{N-1}^u \psi_N^u)^{-1} \mathbf{u}_m, \quad (36)$$

$$\psi_{oi}(s) = \mathbf{D} (-\mathbf{B}_1(s) \psi_i^u \mathbf{S}_i + \mathbf{B}_2(s) \psi_i^u). \quad (37)$$

由式(35)可以看出, 应力 $\sigma(\xi, s)$ 的计算结果在径向 ξ 是解析的. 因此, 裂尖应力强度因子可直接根据定义计算. 具体公式如下:

$$K_I = \lim_{\hat{r} \rightarrow 0} \sqrt{2\pi\hat{r}} \sigma_y|_{\theta=0^\circ} \quad (38)$$

$$K_{II} = \lim_{\hat{r} \rightarrow 0} \sqrt{2\pi\hat{r}} \tau_{xy}|_{\theta=0^\circ} \quad (39)$$

其中 $\hat{r}$ 和 θ 为以裂尖为坐标原点的极坐标, 如图2所示.

3 IIEFG-SBM与FEM的耦合

采用IEFG-SBM和FEM耦合的方法计算时, 任取裂纹周边一定范围的区域 Ω_2 (如图3中ABCD与外边界围成的计算域)采用IEFG-SBM离散, 而其余区域 Ω_1 采用FEM离散, 并且两者之间相互独立, 互不干扰.

在计算域 Ω_1 内, FEM节点位移 $\mathbf{u}_f$ 的求解方程为

$$\mathbf{K}_f \mathbf{u}_f = \mathbf{P}_f, \quad (40)$$

其中 $\mathbf{K}_f$ 和 $\mathbf{P}_f$ 分别为FEM的刚度矩阵和等效节点力向量.

计算域 Ω_1 与 Ω_2 的界面 S' 上必须满足位移连续性条件, 即

$$\mathbf{u}_s^1 = \mathbf{u}_s^2, \quad (41)$$

其中 $\mathbf{u}_s^1$ 和 $\mathbf{u}_s^2$ 分别为计算域 Ω_1 与 Ω_2 在界面 S' 上的位移向量.

为了便于施加位移连续性条件(41), 引入界面 S' 上的势能泛函 Π

$$\Pi = \frac{\alpha}{2} \int_{S'} (\mathbf{u}_s^1 - \mathbf{u}_s^2)^T (\mathbf{u}_s^1 - \mathbf{u}_s^2) ds, \quad (42)$$

其中 α 是罚因子, 一般取弹性模量的 $10^2 - 10^4$ 倍可获得理想的结果, 且

$$\mathbf{u}_s^1 = \sum_{l=1}^{n_e} N_l \mathbf{u}_{fl}, \quad (43)$$

$$\mathbf{u}_s^2 = \sum_{l=1}^n \phi_l \mathbf{u}_{ml}, \quad (44)$$

其中 $\mathbf{u}_{fl}$ 为FEM节点 l 的位移, $\mathbf{u}_{ml}$ 为IEFG-SBM节点 l 的位移, N_l 和 ϕ_l 分别为FEM和IIMLS形函数, n_e 为FEM单元节点个数.

图2 裂尖的局部坐标系

Figure 2 Local coordinate system associated with a crack tip.

图3 结构示意图

Figure 3 Sketch of model.

将式(43)和(44)代入式(42), 则由泛函的变分为零可以得到

$$\mathbf{K}_c \mathbf{u} = 0, \quad (45)$$

其中 $\mathbf{u} = (\mathbf{u}_f^T, \mathbf{u}_m^T)^T$ 为整体节点(包含FEM节点和IEFG-SBM节点)位移向量, $\mathbf{K}_c$ 为界面 S' 上的广义刚度矩阵, 且有

$$\begin{aligned} (\mathbf{K}_c)_U &= \int_{S'} (N_I - \varphi_I) \mathbf{D}_c (N_J - \varphi_J) ds \\ &= \int_{S'} N_I \mathbf{D}_c N_J ds - \int_{S'} N_I \mathbf{D}_c \varphi_J ds \\ &\quad - \int_{S'} \varphi_I \mathbf{D}_c N_J ds + \int_{S'} \varphi_I \mathbf{D}_c \varphi_J ds, \end{aligned} \quad (46)$$

其中

$$\mathbf{D}_c = \begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha \end{bmatrix}. \quad (47)$$

最终IEFG-SBM和FEM耦合后的离散求解方程可写为

$$\mathbf{K} \mathbf{u} = \mathbf{P}, \quad (48)$$

其中 $\mathbf{K}$, $\mathbf{u}$ 和 $\mathbf{P}$ 分别为系统的整体刚度矩阵、整体节点位移向量和整体节点力向量, 且有

$$\mathbf{K} = \mathbf{K}_c + \begin{bmatrix} \mathbf{K}_f & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{K}_m \end{bmatrix}, \quad (49)$$

$$\mathbf{P} = (\mathbf{P}_f^T, \mathbf{P}_m^T)^T. \quad (50)$$

4 算例分析

为了验证以上所提数值方法的有效性, 本文对两个典型算例进行了计算, 并与已有的解析解或数值解进行了比较. 在这些数值算例中, 改进的插值型移动最小二乘法选用二次基函数, FEM单元选用8节点四边形等参单元.

4.1 边界水平裂纹

考虑一含边界水平裂纹的矩形板, 其板宽 $w = 7\text{ m}$, 板高 $h = 16\text{ m}$, 裂纹长 $a = 3.5\text{ m}$, 受均布剪切荷载 $\tau = 1\text{ Pa}$, 如图4所示. 材料的弹性模量为100 MPa, 泊松比为0.3. 该问题的参考应力强度因子为^[22] $K_I^{\text{ref}} = 34\text{ Pa} \sqrt{\text{m}}$, $K_{II}^{\text{ref}} = 4.55\text{ Pa} \sqrt{\text{m}}$.

分析时将整个计算域划分为FEM区域和含裂纹的IEFG-SBM区域, 其中IEFG-SBM区域的大小为 $5\text{ m} \times 5\text{ m}$. FEM区域采用了两种单元尺度, 分别为0.25 m和0.5 m, IEFG-SBM区域则分别布置了41, 81和201个边界节点. 将FEM区域不同的网格划分和IEFG-SBM区域不同的节点布置方案两两组合进行计算分析, 图5给出了FEM单元尺度为0.5 m, IEFG-SBM区域边界节点总数为41时的离散模型. 表1和2给出了各种情况下应力强度因子 K_I 和 K_{II} 的计算结果. 从表1和2可以看出, 应力强度因子 K_I 和 K_{II} 的计算结果几乎都与应力强度因子 K_I 和 K_{II} 的参考解一致, 这证明

了本文方法具有相当高的精度.

图4 含边界裂纹矩形板
Figure 4 Rectangular plate with an edge crack.

图5 含边界裂纹矩形板的离散模型
Figure 5 Discretization model of the rectangular plate with an edge crack.

表1 应力强度因子 K_I 与离散模型的关系
Table 1 SIFs K_I for various discretization models

IEFG-SBM 节点数	FEM尺度 (m)			
	0.5		0.25	
	K_I	误差 (%)	K_I	误差 (%)
41	34.1550	0.46	34.1560	0.46
81	34.0585	0.17	34.0596	0.18
201	34.0553	0.16	34.0558	0.16

表 2 应力强度因子 K_{II} 与离散模型的关系
Table 2 SIFs K_{II} for various discretization models

IEFG-SBM 节点数	FEM尺度 (m)			
	0.5		0.25	
	K_{II}	误差 (%)	K_{II}	误差 (%)
41	4.5289	0.46	4.5290	0.46
81	4.5384	0.25	4.5385	0.25
201	4.5388	0.25	4.5388	0.25

4.2 中心斜裂纹

考虑一含中心斜裂纹的拉伸板,如图6所示. 斜裂纹长度为 $2a$,与水平方向的夹角为 θ ,板宽为 $2w$,板高为 $2h$,板端受均布拉伸载荷 σ 的作用. 取 $w = 1.0\text{ m}$, $h = 2.0\text{ m}$, a 在 $0.3 - 0.5\text{ m}$ 之间变化,倾角 θ 考虑 30° 和 45° 两种情况.

图 6 中心斜裂纹拉伸板
Figure 6 Central inclined cracked plate under tension.

图7给出了FEM单元尺度为 0.1 m , IEFG-SBM计算域布置104个边界节点时的离散模型. 其中, IEFG-SBM区域的大小为 $1.2\text{ m} \times 1.8\text{ m}$. 表3和4给出了倾角和裂纹长度变化时的正则化应力强度因子 $K_I / \sigma\sqrt{\pi a}$ 和 $K_{II} / \sigma\sqrt{\pi a}$. 由表3和4可见, 本文计算结果具有很高的计算精度, 这进一步证明本文所提方法

图 7 含中心斜裂纹矩形板的离散模型
Figure 7 Discretization model of the rectangular plate with an inclined central crack.

表 3 正则化应力强度因子 $K_I / \sigma\sqrt{\pi a}$ 与裂纹宽度的关系
Table 3 Normalized SIFs $K_I / \sigma\sqrt{\pi a}$ for various crack lengths

θ	a / w	$K_I / \sigma\sqrt{\pi a}$		
		本文解	文献[23]	文献[24]
30°	0.3	0.8018	0.8025	0.8024
	0.4	0.8454	0.8456	0.8455
	0.5	0.9044	0.9046	0.9048
45°	0.3	0.5405	0.5406	0.5405
	0.4	0.5719	0.5719	0.5719
	0.5	0.6119	0.6119	0.6121

表 4 正则化应力强度因子 $K_{II} / \sigma\sqrt{\pi a}$ 与裂纹宽度的关系
Table 4 Normalized SIFs $K_{II} / \sigma\sqrt{\pi a}$ for various crack lengths

θ	a / w	$K_{II} / \sigma\sqrt{\pi a}$		
		本文解	文献[23]	文献[24]
30°	0.3	0.4404	0.4417	0.4417
	0.4	0.4487	0.4497	0.4497
	0.5	0.4633	0.4617	0.4617
45°	0.3	0.5147	0.5162	0.5161
	0.4	0.5276	0.5290	0.5288
	0.5	0.5448	0.5458	0.5457

的有效性.

5 结论

本文首先介绍了IEFG-SBM的基本原理和裂纹尖端应力强度因子的计算方法. 在此基础上, 基于交界面两侧位移的连续性, 本文提出了断裂分析的IEFG-SBM和FEM耦合的计算方法. 该耦合方法将裂尖周边一定范围的计算域采用IEFG-SBM离散, 而其余区域则采用FEM离散, 两者相互独立, 互不干扰. 由本文分析和算例求解结果可以得出以下3点结论. (1) IEFG-SBM法兼顾了无网格法和比例边界有限元法的优点, 只需要在求解域的边界上采用插值型无单元伽辽金法

离散, 而且在没有离散的径向采用解析方法求解, 具有较高的计算精度. 裂尖周边区域采用IEFG-SBM模拟, 可以充分利用其半解析解的特性, 直接根据定义得到较高精度的应力强度因子. (2) 裂尖周边区域采用IEFG-SBM模拟, 仅需对其边界布置一系列离散的节点, 前处理简单. FEM网格可以不必考虑裂纹, 因此FEM网格划分过程几乎没有难度, 而且FEM网格形态容易控制, 大幅度降低了前处理的难度. (3) 算例表明, FEM网格和IEFG-SBM计算域的离散节点总数对计算精度都有较大的影响. 本文方法的计算精度通常随着FEM网格尺度的减小而提高. 此外, IEFG-SBM计算域的离散节点数越多, 计算精度一般也越高.

参考文献

- 1 Barsoum R S. On the use of isoparametric finite elements in linear fracture mechanics. *Int J Numer Meth Engng*, 1976, 10: 25–37
- 2 Yu T, Shi L. Determination of sharp V-notch stress intensity factors using the extended finite element method. *J Strain Anal Eng Des*, 2012, 47: 95–103
- 3 Fan J L, Guo X L. Numerical simulation on elastic-plastic fatigue crack growth behavior (in Chinese). *Chin J Mech*, 2015, 51: 33–40 [樊俊铃, 郭杏林. 弹塑性疲劳裂纹扩展行为的数值模拟. *机械工程学报*, 2015, 51: 33–40]
- 4 Xu D D, Zheng H, Yang Y T, et al. Multiple crack propagation based on the numerical manifold method (in Chinese). *Acta Mech Sin*, 2015, 47: 471–481 [徐栋栋, 郑宏, 杨永涛, 等. 多裂纹扩展的数值流形法. *力学学报*, 2015, 47: 471–481]
- 5 Tian R, Wen L F. Recent progresses on improved XFEM (in Chinese). *Chin J Comput Mech*, 2016, 33: 469–477 [田荣, 文龙飞. 改进型XFEM进展. *计算力学学报*, 2016, 33: 469–477]
- 6 Li L X, Wang T J. The extended finite element method and its applications—a review (in Chinese). *Adv Mech*, 2005, 35: 5–20 [李录贤, 王铁军. 扩展有限元法(XFEM)及其应用. *力学进展*, 2005, 35: 5–20]
- 7 Li Q, Chen S, Luo X. Steady heat conduction analyses using an interpolating element-free Galerkin scaled boundary method. *Appl Math Comput*, 2017, 300: 103–115
- 8 Chen S S, Tong G S, Wan Y. An interpolating element-free Galerkin scaled boundary method for the elasticity problem (in Chinese). *Sci Sin-Phys Mech Astron*, 2017, 47: 034601 [陈莘莘, 童谷生, 万云. 弹性力学问题的插值型无单元伽辽金比例边界法. *中国科学: 物理学 力学 天文学*, 2017, 47: 034601]
- 9 Chen S S, Wang J. Analysis of interpolating element-free galerkin scaled boundary method for piezoelectric cracks (in Chinese). *Chin J Mech*,

- 2017, 53: 53–59, 67 [陈莘莘, 王娟. 压电裂纹的插值型无单元伽辽金比例边界法分析. 机械工程学报, 2017, 53: 53–59, 67]
- 10 Song C. A matrix function solution for the scaled boundary finite-element equation in statics. *Comp Methods Appl Mech Eng*, 2004, 193: 2325–2356
- 11 Hu Z Q, Lin B, Wang Y, et al. A Hamiltonian-based derivation of scaled boundary finite element method for elasticity (in Chinese). *Chin J Comput Mech*, 2011, 28: 510–516 [胡志强, 林皋, 王毅, 等. 基于Hamilton体系的弹性力学问题的比例边界有限元法. 计算力学学报, 2011, 28: 510–516]
- 12 Long X Y, Jiang C, Han X, et al. The scaled boundary finite element second order sensitivity design and fracture mechanics analysis (in Chinese). *Chin J Solid Mech*, 2015, 36: 42–54 [龙湘云, 姜潮, 韩旭, 等. 比例边界有限元二阶灵敏度设计及其断裂力学分析. 固体力学学报, 2015, 36: 42–54]
- 13 Zhong H, Mou H, Zhang W X. Modelling of crack propagation by finite fracture mechanics and scaled boundary finite element method (in Chinese). *Chin J Comput Mech*, 2017, 34: 168–174 [钟红, 牟昊, 张文宣. 基于有限断裂法和比例边界有限元法的裂纹扩展模拟. 计算力学学报, 2017, 34: 168–174]
- 14 Belytschko T, Lu Y Y, Gu L. Element-free Galerkin methods. *Int J Numer Meth Engng*, 1994, 37: 229–256
- 15 Qin Y X, Cheng Y M. Reproducing kernel particle boundary element-free method for temperature field problems (in Chinese). *Chin J Mech*, 2008, 44: 95–100 [秦义校, 程玉民. 温度场分析的重构核粒子边界无单元法. 机械工程学报, 2008, 44: 95–100]
- 16 Zhang Q D, Zhang B Y, Li B, et al. Element free Galerkin method coupled flow function for plane strain strip rolling process (in Chinese). *Chin J Mech*, 2015, 51: 48–54 [张清东, 张勃洋, 李博, 等. 板带轧制过程二维流函数-无网格伽辽金求解方法及其应用. 机械工程学报, 2015, 51: 48–54]
- 17 Wang J F, Sun F X, Cheng Y M. An improved interpolating element-free Galerkin method with a nonsingular weight function for two-dimensional potential problems. *Chin Phys B*, 2012, 21: 090204
- 18 Wang J, Wang J, Sun F, et al. An interpolating boundary element-free method with nonsingular weight function for two-dimensional potential problems. *Int J Comput Methods*, 2013, 10: 1350043
- 19 Lancaster P, Salkauskas K. Surfaces generated by moving least squares methods. *Math Comp*, 1981, 37: 141
- 20 Yin S D, Yin S, Zhou Y H. Coupled SBFEM and FEM for crack analysis based on virtual discontinuous surface method (in Chinese). *Chin J Comput Mech*, 2014, 31: 735–741, 748 [殷德胜, 尹栓, 周宜红. 裂缝分析的比例边界有限元与有限元耦合的虚拟结构面模型. 计算力学学报, 2014, 31: 735–741, 748]
- 21 Yang Z J, Wang X F, Yin D S, et al. A non-matching finite element-scaled boundary finite element coupled method for linear elastic crack propagation modelling. *Comp Struct*, 2015, 153: 126–136
- 22 Tada H, Paris P C, Irwin R. *The Stress Analysis of Cracks (Handbook)*. Hellertown: Del Research Corporation, 1973
- 23 Kitagawa H, Yuuki R. Analysis of arbitrarily shaped crack in a finite plate using conformal mapping. First report: Construction of analysis procedure and its applicability. *Trans Jpn Soc Mech Eng*, 1977, 43: 4354–4362
- 24 Tsang D K L, Oyadiji S O. Super singular element method for two-dimensional crack analysis. *Proc R Soc A-Math Phys Eng Sci*, 2008, 464: 2629–2648

Coupled interpolating element-free Galerkin scaled boundary method and finite element method for crack problems

CHEN ShenShen^{*} & WANG Juan

School of Civil Engineering and Architecture, East China Jiaotong University, Nanchang 330013, China

The interpolating element-free Galerkin scaled boundary method (IEFG-SBM) is a semi-analytical method which only requires to discretize the boundary by the interpolating element-free Galerkin (EFG) method without fundamental solution. This method is ideally suited to solve problems containing infinite domain and singular physical fields. This study develops a novel method that couples the IEFG-SBM and the finite element method (FEM) for crack analysis in order to take the full advantages of both IEFG-SBM and FEM. The IEFG-SBM is adopted to model the domain close to the crack tip and the FEM is adopted in the rest of the domain. The corresponding displacement interpolation models are employed for each sub-domain respectively. Through continuity conditions on the interface between IEFG-SBM sub-domain and FEM sub-domain, the coupled formula of the proposed method can be easily derived. The proposed method is simple, effective, and easy to be programmed. Finally, two numerical examples are presented to demonstrate the validity of the proposed method.

fracture mechanics, interpolating element-free Galerkin scaled boundary method, finite element method, coupled technique, stress intensity factors

PACS: 02.60.Ed, 02.70.-c, 02.70.Pt, 46.15.-x

doi: [10.1360/SSPMA2017-00283](https://doi.org/10.1360/SSPMA2017-00283)