中国科学 A 辑: 数学　2009 年 第 39 卷 第 8 期: 996～1002
www.scichina.com　math.scichina.com

《中国科学》杂志社
SCIENCE IN CHINA PRESS

Gini 平均值公开问题的解

褚玉明 ①*, 夏卫锋 ②

① 湖州师范学院数学系, 湖州 313000
② 湖州师范学院教师教育科学与技术学院, 湖州 313000
E-mail: chuyuming@hutc.zj.cn

收稿日期: 2008-05-18; 接受日期: 2008-12-01; * 通信作者
国家自然科学基金 (批准号: 60850005, 10771195) 和浙江省自然科学基金 (批准号: D7080080, Y607128, Y7080185) 资助项目

摘要　对固定的 $(a,b)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}$, Gini 平均值 $S(a,b;x,y)$ 关于 $(x,y)\in(0,\infty)\times(0,\infty)$ 的 Schur 凸性或 Schur 凹性问题是目前的一个公开问题. 本文证明了 $S(a,b;x,y)$ 关于 $(x,y)\in(0,\infty)\times(0,\infty)$ 为 Schur 凸当且仅当 $(a,b)\in\{(a,b):a\geqslant 0,b\geqslant 0,a+b\geqslant 1\}$ 以及 Schur 凹当且仅当 $(a,b)\in\{(a,b):b\leqslant 0,b\leqslant a,a+b\leqslant 1\}\cup\{(a,b):a\leqslant 0,a\leqslant b,a+b\leqslant 1\}$.

关键词　Gini 平均值　Schur 凸　Schur 凹

MSC(2000) 主题分类　26D15, 26D99, 26B25

1　引言

对 $x,y>0$ 和 $a,b\in\mathbb{R}$, Gini[1] 引入如下的 Gini 平均值 $S(a,b;x,y)$:

$$S(a,b;x,y)=\begin{cases}\left(\dfrac{x^a+y^a}{x^b+y^b}\right)^{\frac{1}{a-b}}, & a\neq b,\\ \exp\left(\dfrac{x^a\log x+y^a\log y}{x^a+y^a}\right), & a=b\neq 0,\\ \sqrt{xy}, & a=b=0.\end{cases}\tag{1.1}$$

不难看出, Gini 平均值 $S(a,b;x,y)$ 在域 $\{(a,b;x,y):a,b\in\mathbb{R};x,y>0\}$ 上是连续的且对固定的 $a,b\in\mathbb{R}$ 关于 $(x,y)\in(0,\infty)\times(0,\infty)$ 是可微的, 同时 Gini 平均值分别关于 a 和 b 及 x 和 y 是对称的. 许多平均值是 Gini 平均值的特例, 例如

$$\begin{aligned}&M_a(x,y)=S(a,0;x,y)\quad\text{是幂平均或 Hölder 平均},\\&A(x,y)=S(1,0;x,y)\quad\text{是算术平均},\\&G(x,y)=S(0,0;x,y)\quad\text{是几何平均},\\&H(x,y)=S(0,-1;x,y)\quad\text{是调和平均}.\end{aligned}$$

由于绝大多数二元平均值是 Gini 平均值的特例和对复杂表达式 $S(a,b;x,y)$ 的研究本身是一项具有挑战性的工作, 因此研究 Gini 平均值不仅是一项令人感兴趣的工作, 同时也是十

引用格式: 褚玉明, 夏卫锋. Gini 平均值公开问题的解. 中国科学 A, 2009, 39(8): 996–1002
Zhu Y M, Xia W F. Solution of an open problem for Schur convexity or concavity of the Gini mean values. Sci China Ser A, 2009, 52, DOI: 10.1007/s11425-009-0116-5

分重要和有意义的工作 [2]. 文献 [1–5] 研究了 Gini 平均值的基本性质和比较定理以及不等式 (也可参阅不等式综述专著 [6]).

首先回顾 Schur 凸函数的定义. 设 $E \subset \mathbb{R}^n$ $(n \geqslant 2)$ 是一具有非空内部的集合, $f : E \to \mathbb{R}$ 是一定义在 E 上的实值函数. 若对任意满足 $x \prec y$ 的 n 元组 $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n) \in E$, 恒有 $f(x) \leqslant f(y)$, 则称 f 是 E 上的 Schur 凸函数. 这里所提及的控制关系 $x \prec y$ 是指

$$\sum_{i=1}^{k} x_{[i]} \leqslant \sum_{i=1}^{k} y_{[i]}, \qquad \sum_{i=1}^{n} x_{[i]} = \sum_{i=1}^{n} y_{[i]},$$

其中 $1 \leqslant k \leqslant n-1$, $x_{[i]}$ 表示 x 中的第 i 个最大分量. 如果 $-f$ 是 Schur 凸函数, 则称 f 是 Schur 凹函数.

Schur 凸函数理论是不等式研究领域中最重要的理论之一. 它在组合优化 [7]、多面体等周问题 [8]、线性回归 [9]、图和矩阵 [10]、gamma 和 digamma 函数 [11]、可靠性和有效性 [12]、优化设计 [13] 等其它相关领域均有广泛的应用.

Marshall 和 Olkin[14] 证得

定理 A 设 $E \subset \mathbb{R}^2$ 是一具有非空内部 $\mathrm{int}E$ 的对称凸集, $\varphi : E \to \mathbb{R}$ 是 E 上的连续对称函数. 如果 φ 在 $\mathrm{int}E$ 上是可微的, 则 φ 是 E 上的 Schur 凸 (或 Schur 凹) 函数当且仅当对所有的 $(x, y) \in \mathrm{int}E$, 恒有

$$(y-x)\left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} - \frac{\partial \varphi}{\partial x}\right) \geqslant 0 \ (\text{或} \leqslant 0).$$

另一类二元平均 $E(a, b; x, y)$ 由 Stolarsky[5,15] 首先引入, 其定义如下:

$$E(a,b;x,y) = \begin{cases} \left(\dfrac{b}{a} \cdot \dfrac{x^a - y^a}{x^b - y^b}\right)^{\frac{1}{a-b}}, & ab(a-b) \neq 0, \\ \exp\left(-\dfrac{1}{a} + \dfrac{x^a \log x - y^a \log y}{x^a - y^a}\right), & a = b \neq 0, \\ \left(\dfrac{x^a - y^a}{a(\log x - \log y)}\right)^{\frac{1}{a}}, & a \neq 0, b = 0, \\ \sqrt{xy}, & a = b = 0. \end{cases}$$

文献 [16–18] 研究了 $E(a, b; x, y)$ 关于 (a, b) 及 (x, y) 的 Schur 凸性问题. Qi[16] 首先证明了如下

定理 B 对固定的 $(x, y) \in (0, \infty) \times (0, \infty)$, 如果 $x \neq y$, 则 $E(a, b; x, y)$ 关于 (a, b) 在 $[0, \infty) \times [0, \infty)$ 上是 Schur 凹函数, 而在 $(-\infty, 0] \times (-\infty, 0]$ 上是 Schur 凸函数.

对固定的 (a, b), Qi 等 [17] 试图得到 $E(a, b; x, y)$ 关于 (x, y) 的 Schur 凸性, 并宣布如下一个错误的结果: 对固定的 (a, b), 如果 $a, b \notin (0, \frac{3}{2})$ (或 $a, b \in (0, 1)$), 则 $E(a, b; x, y)$ 关于 $(x, y) \in (0, \infty) \times (0, \infty)$ 是 Schur 凹 (或 Schur 凸) 函数. Shi 等 [18] 发现了上面结果的错误性并得到了下面

定理 C 对固定的 $(a, b) \in \mathbb{R}^2$,

(1) 如果 $2 < 2a < b$ 或 $2 \leqslant 2b \leqslant a$, 则 $E(a, b; x, y)$ 关于 $(x, y) \in (0, \infty) \times (0, \infty)$ 是 Schur 凸函数;

(2) 如果 $(a, b) \in \{a < b \leqslant 2a, 0 < a \leqslant 1\} \cup \{b < a \leqslant 2b, 0 < b \leqslant 1\} \cup \{0 < b < a \leqslant 1\} \cup \{0 < a < b \leqslant 1\} \cup \{b \leqslant 2a < 0\} \cup \{a \leqslant 2b < 0\}$, 则 $E(a, b; x, y)$ 关于 $(x, y) \in (0, \infty) \times (0, \infty)$

是 Schur 凹函数.

Chu 和 Zhang[19] 将定理 C 改进为如下完整的结果:

定理 D 对固定的 $(a,b)\in\mathbb{R}^2$,

(1) $E(a,b;x,y)$ 关于 $(x,y)\in(0,\infty)\times(0,\infty)$ Schur 凸当且仅当 $(a,b)\in\{(a,b):a\geqslant 1,b\geqslant 1,a+b\geqslant 3\}$;

(2) $E(a,b;x,y)$ 关于 $(x,y)\in(0,\infty)\times(0,\infty)$ Schur 凹当且仅当 $(a,b)\in\{(a,b):a\leqslant 1,a+b\leqslant 3\}\cup\{(a,b):b\leqslant 1,a+b\leqslant 3\}$.

对固定的 $(x,y)\in\{(x,y):x>0,y>0,x\neq y\}$, Sándor [20] 研究了 $S(a,b;x,y)$ 关于 (a,b) 的 Schur 凸性和凹性, 并证明了如下结果:

定理 E 对固定的 $(x,y)\in\{(x,y):x>0,y>0,x\neq y\}$, $S(a,b;x,y)$ 关于 $(a,b)\in[0,\infty)\times[0,\infty)$ Schur 凹, 而关于 $(a,b)\in(-\infty,0]\times(-\infty,0]$ Schur 凸.

但是对于固定的 (a,b), Gini 平均值 $S(a,b;x,y)$ 关于 $(x,y)\in(0,\infty)\times(0,\infty)$ 的 Schur 凸性或凹性问题仍然是一个公开问题 (见文献 [20]).

本文的主要目的是给出上面公开问题的解并证明下面

定理 1.1 Gini 平均值 $S(a,b;x,y)$ 关于 $(x,y)\in(0,\infty)\times(0,\infty)$ Schur 凸当且仅当 $(a,b)\in\{(a,b):a\geqslant 0,b\geqslant 0,a+b\geqslant 1\}$ 以及 Schur 凹当且仅当 $(a,b)\in\{(a,b):b\leqslant 0,b\leqslant a,a+b\leqslant 1\}\cup\{(a,b):a\leqslant 0,a\leqslant b,a+b\leqslant 1\}$.

2 引理

为下节证明本文主要结果定理 1.1 的需要, 本节建立几则引理.

引理 2.1 对 $a,b\in\mathbb{R}$ 和 $f(t)=(a-b)(t^{a+b-1}-1)+at^{a-1}+bt^{a}-at^{b}-bt^{b-1}$, 我们有

(1) 若 $0\leqslant b\leqslant a$ 且 $a+b\geqslant 1$, 则 $f(t)$ 在 $t\in[1,\infty)$ 上非负;

(2) 若 $0<b<a$ 且 $a+b<1$, 则存在 $t_1,t_2\in(1,\infty)$ 满足 $f(t_1)<0$ 和 $f(t_2)>0$;

(3) 若 $b<0$ 且 $a+b>1$, 则存在 $t_3,t_4\in(1,\infty)$ 满足 $f(t_3)<0$ 和 $f(t_4)>0$;

(4) 若 $b\leqslant 0,a+b\leqslant 1$ 且 $a\geqslant b$, 则 $f(t)$ 在 $t\in[1,\infty)$ 上非正.

证明 令 $f_1(t)=t^{2-a-b}f'(t)$, $f_2(t)=t^{1+a}f_1'(t)$ 和 $f_3(t)=t^{-a+b+2}f_2''(t)$, 通过简单计算可得

$$f(1)=0, \tag{2.1}$$

$$f'(t)=(a-b)(a+b-1)t^{a+b-2}+a(a-1)t^{a-2}+abt^{a-1}-abt^{b-1}-b(b-1)t^{b-2},$$

$$f_1(1)=f'(1)=2(a-b)(a+b-1), \tag{2.2}$$

$$f_1(t)=(a-b)(a+b-1)+a(a-1)t^{-b}+abt^{1-b}-abt^{1-a}-b(b-1)t^{-a}, \tag{2.3}$$

$$f_1'(t)=ab(1-a)t^{-b-1}+ab(1-b)t^{-b}-ab(1-a)t^{-a}-ab(1-b)t^{-a-1},$$

$$f_2(1)=f_1'(1)=0, \tag{2.4}$$

$$f_2(t)=ab(1-a)t^{a-b}+ab(1-b)t^{a-b+1}-ab(1-a)t-ab(1-b),$$

$$f_2'(t)=ab(1-a)(a-b)t^{a-b-1}+ab(1-b)(a-b+1)t^{a-b}-ab(1-a),$$

$$f_2'(1)=-ab(a-b)(a+b-3), \tag{2.5}$$

$$f_2''(t) = ab(1-a)(a-b)(a-b-1)t^{a-b-2} + ab(1-b)(a-b)(a-b+1)t^{a-b-1},$$

$$f_3(1) = f_2''(1) = -ab(a-b)^2(a+b-3), \tag{2.6}$$

$$f_3(t) = ab(1-a)(a-b)(a-b-1) + ab(1-b)(a-b)(a-b+1)t,$$

$$f_3'(t) = ab(1-b)(a-b)(a-b+1). \tag{2.7}$$

(1) 若 $0 \leqslant b \leqslant a$ 且 $a+b \geqslant 1$, 则分三种情形来证明.

情形 1.1 $a \geqslant b \geqslant 1$. 对 $t \in [1,\infty)$, 由 (2.3) 式得

$$f_1(t) = (a-b)(a+b-1) + \frac{a(a-1)t^a - b(b-1)t^b}{t^{a+b}} + \frac{ab(t^{a-1}-t^{b-1})}{t^{a+b-2}} \geqslant 0. \tag{2.8}$$

因此, 由 (2.1) 和 (2.8) 式可知 $f(t)$ 在 $t \in [1,\infty)$ 上非负.

情形 1.2 $0 \leqslant b \leqslant 1$ 且 $a+b \geqslant 3$. 易知 $a \geqslant 2$, $a \geqslant b$, 因此 (2.8) 式对 $t \in [1,\infty)$ 仍然成立, 进而可得 $f(t)$ 在 $[1,\infty)$ 上非负.

情形 1.3 $0 \leqslant b \leqslant 1$, $1 \leqslant a+b \leqslant 3$ 且 $a \geqslant b$. 由 (2.2) 和 (2.5)–(2.7) 式得

$$f_3'(t) \geqslant 0, \tag{2.9}$$

$$f_3(1) \geqslant 0, \tag{2.10}$$

$$f_2'(1) \geqslant 0, \tag{2.11}$$

$$f_1(1) \geqslant 0. \tag{2.12}$$

因此, 由 (2.1) 和 (2.4) 以及 (2.9)–(2.12) 式知 $f(t)$ 在 $[1,\infty)$ 上非负.

(2) 若 $0 < b < a$ 且 $a+b < 1$, 则由 (2.2) 式得 $f'(1) < 0$, 进而由 $f'(t)$ 的连续性可知, 存在 $\delta_1 > 0$, 当 $t \in [1, 1+\delta_1)$ 时, 恒有 $f'(t) < 0$. 结合 (2.1) 式, 不难发现 $f(t)$ 在 $(1, 1+\delta_1)$ 上恒负.

另一方面, 从 $f(t)$ 的表达式易得 $\lim_{t\to+\infty} f(t) = +\infty$. 因此引理 2.1(2) 得证.

(3) 若 $b < 0$ 且 $a+b > 1$, 则由 (2.2) 式得 $f'(1) > 0$, 进而由 $f'(t)$ 的连续性可知, 存在 $\delta_2 > 0$, 当 $t \in [1, 1+\delta_2)$ 时, 恒有 $f'(t) > 0$. 结合 (2.1) 式, 不难发现 $f(t)$ 在 $(1, 1+\delta_2)$ 上恒正.

另一方面, 从 $f(t)$ 的表达式易得 $\lim_{t\to+\infty} f(t) = -\infty$. 因此引理 2.1(3) 得证.

(4) 若 $b \leqslant 0$, $a+b \leqslant 1$ 且 $a \geqslant b$, 则分三种情形来完成证明.

情形 1.4 $b \leqslant 0, a \geqslant 0$ 且 $a+b \leqslant 1$. 易知 $a \geqslant b$, 且由 (2.2) 和 (2.5)–(2.7) 式得

$$f_3'(t) \leqslant 0, \tag{2.13}$$

$$f_3(1) \leqslant 0, \tag{2.14}$$

$$f_2'(1) \leqslant 0, \tag{2.15}$$

$$f_1(1) \leqslant 0, \tag{2.16}$$

因此, 由 (2.1) 和 (2.4) 以及 (2.13)–(2.16) 式可知 $f(t)$ 在 $[1,\infty)$ 上非正.

情形 1.5 $b+1 \leqslant a \leqslant 0$. 对 $t \in [1,\infty)$, 显然有

$$f(t) = (a-b)(t^{a+b-1}-1) + a(t^{a-1}-t^b) + b(t^a - t^{b-1}) \leqslant 0.$$

情形 1.6 $a \leqslant 0$ 且 $b \leqslant a \leqslant b+1$. 对 $t \in [1,\infty)$, 不难发现

$$\begin{aligned} f(t) &\leqslant (a-b)(t^{a+b-1}-1) + at^{b-1} + bt^b - at^b - bt^{b-1} \\ &= (a-b)(t^{a+b-1}-1) + (a-b)(t^{b-1}-t^b) < 0. \end{aligned}$$

引理 2.2 设 $a,b\in\mathbb{R}$, $f(t)=a(t^a+t^{a-1})\log t+t^{2a-1}-t^a+t^{a-1}-1$. 如果 $0<a<\frac{1}{2}$, 那么存在 $t_5,t_6\in[1,\infty)$ 满足 $f(t_5)<0$ 和 $f(t_6)>0$.

证明 令 $f_1(t)=t^{2-a}f'(t)$, 通过简单计算得

$$f(1)=0, \tag{2.17}$$

$$f'(t)=a^2t^{a-1}\log t+a(a-1)t^{a-2}\log t+(2a-1)t^{2a-2}+(2a-1)t^{a-2},$$

$$f_1(1)=f'(1)=2(2a-1), \tag{2.18}$$

$$f_1'(t)=a(2a-1)t^{a-1}+\frac{a(a-1)}{t}+a^2\log t+a^2,$$

$$f_1'(1)=2a(2a-1). \tag{2.19}$$

如果 $0<a<\frac{1}{2}$, 那么由 (2.18) 和 (2.19) 式得

$$f_1'(1)<0, \tag{2.20}$$

$$f_1(1)<0. \tag{2.21}$$

由 $f_1'(t)$ 的连续性和 (2.20) 式知, 存在 $\delta>0$, 当 $t\in[1,1+\delta)$ 时, 恒有 $f_1'(t)<0$, 进而由 (2.17) 和 (2.21) 式可得 $f(t)$ 在 $(1,1+\delta)$ 上恒负.

另一方面, 由 $f(t)$ 的表达式不难验证 $\lim_{t\to+\infty}f(t)=+\infty$. 因此引理 2.2 得证.

对具有非空内部的集合 $E\subset\mathbb{R}^2$, 记 $\overline{E}$ 为 E 的闭包. 由 Gini 平均值 $S(a,b;x,y)$ 的连续性以及 Schur 凸性或凹性的定义可直接得到下面的引理 2.3.

引理 2.3 设 E 是 ab 平面上具有非空内部的集合. 如果对 $(a,b)\in E$, Gini 平均值 $S(a,b;x,y)$ 关于 $(x,y)\in(0,\infty)\times(0,\infty)$ Schur 凸 (或 Schur 凹), 则对 $(a,b)\in\overline{E}$, $S(a,b;x,y)$ 关于 $(x,y)\in(0,\infty)\times(0,\infty)$ Schur 凸 (或 Schur 凹) .

3 定理 1.1 的证明

对固定的 $(a,b)\in\mathbb{R}^2$, 利用定理 A 来讨论 $(y-x)(\frac{\partial S(a,b;x,y)}{\partial y}-\frac{\partial S(a,b;x,y)}{\partial x})$ 关于所有 $(x,y)\in(0,\infty)\times(0,\infty)$ 的非负性和非正性. 由于 $x=y$ 时, $(y-x)(\frac{\partial S(a,b;x,y)}{\partial y}-\frac{\partial S(a,b;x,y)}{\partial x})=0$ 以及它关于 x 和 y 的对称性, 在下面的讨论中不妨设 $y>x$.

记

$$E_1=\{(a,b):a\geqslant0,b\geqslant0,a+b\geqslant1\},$$

$$E_2=\{(a,b):b<0,a+b>1\}\cup\{(a,b):a<0,a+b>1\}\cup\{(a,b):a>0,b>0,a+b<1\},$$

$$E_3=\{(a,b):b\leqslant0,a+b\leqslant1,a\geqslant b\}\cup\{(a,b):a\leqslant0,a+b\leqslant1,b\geqslant a\}.$$

显然, 如果我们能够证明当 $(a,b)\in E_1,E_3$ 和 E_2 时, $S(a,b;x,y)$ 关于 $(x,y)\in(0,\infty)\times(0,\infty)$ 分别为 Schur 凸、Schur 凹、既非 Schur 凸也非 Schur 凹, 则定理 1.1 获证. 下面分三种情形来给予证明.

情形 1 $(a,b)\in E_1$. 记 $E_{11}=\{(a,b):a>b>0,a+b>1\}$ 和 $E_{12}=\{(a,b):b>a>0,a+b>1\}$, 则显然有

$$E_1=\overline{E_{11}}\cup\overline{E_{12}}. \tag{3.1}$$

若 $(a,b)\in E_{11}$, 则由 (1.1) 式得

$$\begin{aligned}&(y-x)\left(\frac{\partial S(a,b;x,y)}{\partial y}-\frac{\partial S(a,b;x,y)}{\partial x}\right)\\&\quad=\frac{y-x}{a-b}\frac{S(a,b;x,y)}{(x^a+y^a)(x^b+y^b)}x^{a+b-1}\times\left[(a-b)\left(\left(\frac{y}{x}\right)^{a+b-1}-1\right)\right.\\&\quad\quad\left.+a\left(\frac{y}{x}\right)^{a-1}+b\left(\frac{y}{x}\right)^{a}-a\left(\frac{y}{x}\right)^{b}-b\left(\frac{y}{x}\right)^{b-1}\right].\end{aligned}\tag{3.2}$$

由定理 A、引理 2.1(1)、(3.2) 式以及假设 $y>x$ 知 $S(a,b;x,y)$ 关于 $(x,y)\in(0,\infty)\times(0,\infty)$ Schur 凸. 进而由 $S(a,b;x,y)$ 关于 (a,b) 的连续性和对称性及引理 2.3 和 (3.1) 式知, 当 $(a,b)\in E_1$ 时, $S(a,b;x,y)$ 关于 $(x,y)\in(0,\infty)\times(0,\infty)$ Schur 凸.

情形 2 $(a,b)\in E_2$. 对此情形再分五种情形讨论. 记

$$\begin{aligned}&E_{21}=\{(a,b):b<0,a+b>1\},\\&E_{22}=\{(a,b):a<0,a+b>1\},\\&E_{23}=\{(a,b):b>0,a>b,a+b<1\},\\&E_{24}=\{(a,b):a>0,b>a,a+b<1\},\\&E_{25}=\left\{(a,b):0<a=b<\frac{1}{2}\right\}.\end{aligned}$$

显然

$$E_2=E_{21}\cup E_{22}\cup E_{23}\cup E_{24}\cup E_{25}.\tag{3.3}$$

情形 2.1 $(a,b)\in E_{21}$. 由定理 A、引理 2.1(3)、(3.2) 式以及假设 $y>x$ 知 $S(a,b;x,y)$ 关于 $(x,y)\in(0,\infty)\times(0,\infty)$ 既非 Schur 凸也非 Schur 凹.

情形 2.2 $(a,b)\in E_{22}$. 由 $S(a,b;x,y)$ 关于 (a,b) 的对称性及情形 2.1 知 $S(a,b;x,y)$ 关于 $(x,y)\in(0,\infty)\times(0,\infty)$ 既非 Schur 凸也非 Schur 凹.

情形 2.3 $(a,b)\in E_{23}$. 由定理 A、引理 2.1(2)、(3.2) 式以及假设 $y>x$ 知 $S(a,b;x,y)$ 关于 $(x,y)\in(0,\infty)\times(0,\infty)$ 既非 Schur 凸也非 Schur 凹.

情形 2.4 $(a,b)\in E_{24}$. 由 $S(a,b;x,y)$ 关于 (a,b) 的对称性及情形 2.3 知 $S(a,b;x,y)$ 关于 $(x,y)\in(0,\infty)\times(0,\infty)$ 既非 Schur 凸也非 Schur 凹.

情形 2.5 $(a,b)\in E_{25}$. 由 (1.1) 式得

$$\begin{aligned}&(y-x)\left(\frac{\partial S(a,b;x,y)}{\partial y}-\frac{\partial S(a,b;x,y)}{\partial x}\right)\\&\quad=\frac{y-x}{(x^a+y^a)^2}S(a,b;x,y)x^{2a-1}\\&\quad\quad\times\left[a\left(\left(\frac{y}{x}\right)^{a}+\left(\frac{y}{x}\right)^{a-1}\right)\log\frac{y}{x}+\left(\frac{y}{x}\right)^{2a-1}-\left(\frac{y}{x}\right)^{a}+\left(\frac{y}{x}\right)^{a-1}-1\right].\end{aligned}\tag{3.4}$$

由定理 A, 引理 2.2, (3.4) 式及假设 $y>x$ 知 $S(a,b;x,y)$ 关于 $(x,y)\in(0,\infty)\times(0,\infty)$ 既非 Schur 凸也非 Schur 凹.

结合上面情形 2.1–2.5 及 (3.3) 式知, 当 $(a,b)\in E_2$ 时, $S(a,b;x,y)$ 关于 $(x,y)\in(0,\infty)\times(0,\infty)$ 既非 Schur 凸也非 Schur 凹.

情形 3 $(a,b) \in E_3$. 令 $E_{31} = \{(a,b) : b < 0, a+b < 1, a > b, a \neq 0\}$ 及 $E_{32} = \{(a,b) : a < 0, a+b < 1, b > a, b \neq 0\}$, 则

$$E_3 = \overline{E_{31}} \cup \overline{E_{32}}. \tag{3.5}$$

当 $(a,b) \in E_{31}$ 时, 由定理 A、引理 2.1(4)、(3.2) 式以及假设 $y > x$ 知 $S(a,b;x,y)$ 关于 $(x,y) \in (0,\infty) \times (0,\infty)$ Schur 凹. 进而由 $S(a,b;x,y)$ 关于 (a,b) 的连续性和对称性以及引理 2.3 和 (3.5) 式知, 当 $(a,b) \in E_3$ 时 $S(a,b;x,y)$ 关于 $(x,y) \in (0,\infty) \times (0,\infty)$ Schur 凹.

参考文献

1 Gini C. Di una formula compresive delle medie. *Metron*, **13**: 3–22 (1938)

2 Pàles Z. Inequalities for differences of powers. *J Math Anal Appl*, **131**(1): 271–281 (1988)

3 Leach E B, Sholander M C. Extended mean values. *Amer Math Monthly*, **85**(2): 84–90 (1978)

4 Neuman E, Sàndor J. Inequalities involving Stolarsky and Gini means. *Math Pannon*, **14**(1): 29–44 (2003)

5 Stolarsky K B. Generalizations of the logarithmic mean. *Math Mag*, **48**: 87–92 (1975)

6 Rassias Th M. Survey on Classical Inequalities. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 2000

7 Hwang F K, Rothblum U G. Partition-optimization with Schur convex sum objective functions. *SIAM J Discrete Math*, **18**(3): 512–524 (2004/2005)

8 Zhang X M. Schur-convex functions and isoperimetric inequalities. *Proc Amer Math Soc*, **126**(2): 461–470 (1998)

9 Stepniak C. Stochastic ordering and Schur-convex functions in comparsion of linear experiments. *Metrika*, **36**(5): 291–298 (1989)

10 Constantine G M. Schur-convex functions on spectra of graphs. *Discrete Math*, **45**(2-3): 181–188 (1983)

11 Merkle M. Convexity, Schur-convexity and bounds for the gamma function involving the digamma functon. *Rocky Mountain J Math*, **28**(3): 1053–1066 (1998)

12 Hwang F K, Rothblum U G, Shepp L. Monotone optimal multipartitions using Schur convexity with respect to partial orders. *SIAM J Discrete Math*, **6**(4): 533–547 (1993)

13 Chan N N. Schur-convexity for A-optimal designs. *J Math Anal Appl*, **122**(1): 1–6 (1987)

14 Marshall A W, Olkin I. Inequalities: Theorey of Majorization and Its Applications. New York: Academic Press, 1979

15 Stolarsky K B. The power and generalized logarithmic means. *Amer Math Monthly*, **87**(7): 545–548 (1980)

16 Qi F. A note on Schur-convexity of extended mean values. *Rocky Mountain J Math*, **35**(5): 1787–1793 (2005)

17 Qi F, Sàndor J, Dragomir S S, et al. Notes on the Schur-convexity of the extended mean values. *Taiwanese J Math*, **9**(3): 411–420 (2005)

18 Shi H N, Wu Sh H, Qi F. An alternative note on the Schur-convexity of the extended mean values. *Math Inequal Appl*, **9**(2): 219–224 (2006)

19 Chu Y M, Zhang X M. Necessary and sufficient conditins such that extended mean values are Schur-convex or Schur-concave. *J Math Kyoto Univ*, **48**(1): 229–238 (2008)

20 Sàndor J. The Schur-convexity of Stolarsky and Gini means. *Banach J Math Anal*, **1**(2): 212–215 (2007)