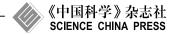
www.springerlink.com math.scichina.com



优秀博士学位论文专栏

具有 N-peakon 的新可积模型与孤子方程的代数 几何解

薛波

郑州大学数学系, 郑州 450001 E-mail: xuebo@zzu.edu.cn

指导教师: 耿献国 郑州大学数学系

收稿日期: 2013-04-26; 接受日期: 2013-05-28

国家自然科学基金 (批准号: 10871182) 资助项目, 本学位论文荣获 "2012 年全国优秀博士学位论文"

摘要 在孤立子理论中,寻找新的可积系统是最基础而重要的内容之一.而如何有效的求得一类孤子方程的精确解,并研究该精确解的性质,一直是一个基本而又富有挑战性的课题.本文便是从这两个方面展开,一方面构造两个具有 N-peakon 的新可积系统,为目前并不丰富的具有尖孤子解的可积非线性家族提供了极为重要的可积动力模型;另一方面,基于超椭圆代数曲线理论,本文对 Lax 对的有限展开法进行改进,并将其拓广到求解相联系的孤子方程可积形变后的代数几何解,给出著名的 KdV (Korteweg de Vries) 6 方程的解.进一步,通过研究与孤子方程族相应的亚纯函数、Baker-Akhiezer 函数和超椭圆曲线的渐近性质和代数几何特征,本文摆脱现有代数几何方法中使用 Riemann 定理的限制,构造mKdV (modified Korteweg de Vries)型方程和混合 AKNS (Ablowitz Kaup Newell Segur)方程等孤子方程的代数几何解.为构造高阶矩阵谱问题所对应的孤子方程族的代数几何解提供了有力的工具.

关键词 N-peakon 动力系统 代数几何解MSC (2010) 主题分类 37K10, 35Q51

1 前言

本文是作者博士学位论文中最具创新部分的内容, 也是对攻读博士期间所做工作的简要综述. 对本文中所研究内容感兴趣的读者可参见原毕业论文[1]. 文中关于具有 N-peakon 的可积系统的相关结果发表于文献 [2,3]. 在博士学位论文之后, 我们继续进行了此方面的研究, 并在超可积系统中构造出了具有 N-peakon 的超 Camassa-Holm (CH) 方程[4]. 另一方面, 关于带负幂流的孤子方程的有限亏格解的研究结果发表于文献 [5-7], 而利用类似的方法, 我们进一步又构造出了带负幂流的 Jaulent-Miodek方程和耦合 KdV 方程的有限亏格解[8,9].

2 研究背景

具有孤立子解的非线性方程,即孤子方程,作为描述非线性现象的有力工具,是由无穷维可积系统所表示的非线性偏微分方程,它具有很多优美的代数几何性质和丰富的数学结构.寻找新的可积系

统和给出可积系统的解析解一直以来都是孤立子理论中最基础而重要的研究内容.

在水波理论中,有许多描述浅水中的重力波且具有孤立子解的经典模型,其中最著名的当属 KdV 方程. 然而, KdV 方程的局限性在于它的孤立子解是全局性的,无法模拟类似于 Stokes 波的波破碎现象. 因此,人们一直期望能找到一种既具有孤立子解,又能描述破碎波的水波模型. 1993 年, CH 方程的发现弥补了这一空白. 在 CH 方程众多形式的精确解中, peakon 引起了人们的极大关注. 尖孤子不仅具有孤立子所独有的特殊性质,而且正是因为尖孤子的存在,才使得 CH 方程能够成为描述破碎波的经典可积模型. 具有 N-peakon 的可积动力模型的产生是近年来可积系统方向的重大发现,引起了相关研究人员极大的兴趣和热情,并得到了一系列富有重要意义的结果,例如, Degasperis-Procesi (DP)方程和 Novikov 方程的构造及其相关可积性的研究. 然而,具有此类性质的方程仍然很少,其全貌还远未探索. 因此,寻找具有 N-peakon 的可积动力模型是目前水波理论研究中极富意义的热点问题之一.本文中所构造的具有 N-peakon 的三次非线性可积耦合方程和三分量 CH 方程都为具有 N-peakon 的可积动力系统家族提供了更为丰富的模型,并得到了本方向相关研究者的广泛关注和认同.

而另一方面,在孤子方程求解技巧的发展过程中,随着代数几何方法在求解孤子方程精确解这一领域的广泛应用,其所取得的辉煌成果有目共睹.但同时代数几何方法过分依赖于 Riemann 定理的弊端也逐渐显现出来. 受到 Riemann 定理的限制,代数几何方法只能构造严格符合 Riemann 定理条件的与 2×2 阶矩阵谱问题相联系的非线性演化方程族的代数几何解,而对于 3×3 阶或更高阶的矩阵谱问题却束手无策.这对于高阶矩阵谱问题这一广阔的领域而言无疑是一个莫大的遗憾. 本文通过 Lax矩阵有限展开以及在超椭圆曲线上引入的亚纯函数和 Baker-Akhiezer 函数的代数几何特征与它们在无穷远点处的渐近性质,突破 Riemann 定理的限制,构造出了孤子方程 Riemann Theta 函数形式的代数几何解,而进一步的工作正在进行中.

3 具有 N-peakon 的新可积模型

自从 1993 年人们发现 CH 方程

$$m_t + qm_x + 2q_x m = 0, \quad m = q - q_{xx} + \kappa$$
 (3.1)

可以用来建立浅水中长波的单向传播模型以来, 很多文章对它进行了研究. 当 $\kappa=0$ 时, 方程 (3.1) 将具有尖孤子解, 数学上也称为 peakon. 另一方面, Degasperis 和 Procesi 通过渐近可积方法发现了具有无散射形式的新方程 (DP 方程)

$$m_t + qm_x + 3q_x m = 0, \quad m = q - q_{xx}.$$
 (3.2)

此方程在浅水波理论中也有重要应用, 其尖孤子解所满足的动力系统可由一个有限维 Hamilton 系统描述. 近来, Hone 和 Wang 研究了一个可积偏微分方程, 该方程是由 Vladimir Novikov 提出 (Novikov 方程)

$$m_t + q^2 m_x + 3q q_x m = 0, \quad m = q - q_{xx}.$$
 (3.3)

与 CH 方程和 DP 方程一样, 方程 (3.3) 也具有尖孤子解, 但是它的非线性项是三次的而不是二次的. 随后, 寻找具有 N-peakon 的可积动力模型逐渐成为水波理论中研究的热点问题之一. 然而, 此类方程甚少, 其全貌还远未探索. 接下来将构造两个具有 N-peakon 的新可积模型.

3.1 具有 N-peakon 的三次非线性可积耦合方程

首先引入一个 3×3 矩阵谱问题

$$\psi_x = U\psi, \quad \psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} 0 & \lambda u & 1 \\ 0 & 0 & \lambda v \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$
(3.4)

其中, u(x,t) 和 v(x,t) 为位势, λ 是常值谱参数. 若考虑 (3.4) 的附谱问题

$$\phi_t = \mathcal{V}\phi,\tag{3.5}$$

其中, $u = q - q_{xx}$, $v = r - r_{xx}$,

$$\mathcal{V} = \begin{pmatrix} -q_x r + \frac{1}{3}\lambda^{-2} & -\lambda u q r + \lambda^{-1} q_x & q_x r_x \\ \lambda^{-1} r & q_x r - q r_x - \frac{2}{3}\lambda^{-2} & -\lambda v q r - \lambda^{-1} r_x \\ -q r & \lambda^{-1} q & q r_x + \frac{1}{3}\lambda^{-2} \end{pmatrix}.$$

则由 (3.4) 和 (3.5) 的相容条件 $U_t - \mathcal{V}_x + [U, \mathcal{V}] = 0$, 可得

$$q_t - q_{xxt} + 4qrq_x - 3rq_xq_{xx} - qrq_{xxx} = 0,$$

$$r_t - r_{xxt} + 4qrr_x - 3qr_xr_{xx} - qrr_{xxx} = 0.$$
(3.6)

由 u, v 与 q, r 的关系, (3.6) 可变形为如下三次非线性可积耦合方程:

$$u_t + qru_x + 3rq_x u = 0, \quad v_t + qrv_x + 3qr_x v = 0.$$
 (3.7)

当取 u = m, r = 1 和 u = m, r = q 时,它便可以分别约化为 DP 方程 (3.2) 和 Novikov 方程 (3.3). (3.6) 的 N-peakon 解可以用如下线性叠加的形式表示:

$$q(x,t) = \sum_{j=1}^{N} q_j(t) e^{-|x-x_j(t)|}, \quad r(x,t) = \sum_{j=1}^{N} r_j(t) e^{-|x-x_j(t)|},$$
(3.8)

其中, q_j , r_j 和 x_j 的演化满足下列动力系统:

$$\dot{q}_{j} = q_{j} \sum_{k,l=1}^{N} q_{k} r_{l} (2\operatorname{sgn}(x_{j} - x_{k}) - \operatorname{sgn}(x_{j} - x_{l})) e^{-|x_{j} - x_{k}| - |x_{j} - x_{l}|},$$

$$\dot{r}_{j} = r_{j} \sum_{k,l=1}^{N} q_{k} r_{l} (2\operatorname{sgn}(x_{j} - x_{l}) - \operatorname{sgn}(x_{j} - x_{k})) e^{-|x_{j} - x_{k}| - |x_{j} - x_{l}|},$$

$$\dot{x}_{j} = \sum_{k,l=1}^{N} q_{k} r_{l} e^{-|x_{j} - x_{k}| - |x_{j} - x_{l}|}.$$
(3.9)

3.2 具有 N-peakon 的三分量 Camassa-Holm 方程

首先考虑 3×3 矩阵谱问题

$$\psi_x = U\psi, \quad \psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 + \lambda v & 0 & u \\ \lambda w & 0 & 0 \end{pmatrix},$$
(3.10)

其中, u(x,t), v(x,t) 和 w(x,t) 为位势函数, λ 为一个常值谱参数. 设 ψ 满足谱问题 (3.10) 和下面的辅 谱问题:

$$\psi_t = V^{(-1)}\psi,\tag{3.11}$$

其中,

$$V^{(-1)} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}q_x - \frac{1}{2}p_x r_x + \frac{1}{2}pr & \lambda^{-1} + q & \lambda^{-1}p_x \\ \lambda^{-1} - pr_x + p_x r - q + \lambda qv & \frac{1}{2}q_x - \frac{1}{2}p_x r_x + \frac{1}{2}pr & \lambda^{-1}p + qu \\ -r + \lambda qw & r_x & p_x r_x - pr \end{pmatrix},$$

$$u = p - p_{xx}, \quad w = r_{xx} - r, \quad v = \frac{1}{2}(q_{xx} - 4q + p_{xx}r_x - r_{xx}p_x + 3p_x r - 3pr_x).$$

直接计算可知, (3.10) 和 (3.11) 的相容条件 $U_t - V_x^{(-1)} + [U, V^{(-1)}] = 0$ 等价于

$$u_{t} = -vp_{x} + u_{x}q + \frac{3}{2}uq_{x} - \frac{3}{2}u(p_{x}r_{x} - pr),$$

$$v_{t} = 2vq_{x} + v_{x}q,$$

$$w_{t} = vr_{x} + w_{x}q + \frac{3}{2}wq_{x} + \frac{3}{2}w(p_{x}r_{x} - pr),$$
(3.12)

其中,

$$u = p - p_{xx}, \quad v = \frac{1}{2}(q_{xx} - 4q + p_{xx}r_x - r_{xx}p_x + 3p_xr - 3pr_x), \quad w = r_{xx} - r.$$

(3.12) 即为三分量 Camassa-Holm 方程. 特别地, 当 u=w=0 时, (3.12) 就约化为 CH 方程 (3.1). 由方程 (3.12) 的结构可推导出它的 N-peakon 解为

$$p(x,t) = \sum_{j=1}^{N} p_j(t) e^{-|x-x_j(t)|}, \quad q(x,t) = \sum_{j=1}^{N} q_j(t) e^{-2|x-x_j(t)|}, \quad r(x,t) = \sum_{j=1}^{N} r_j(t) e^{-|x-x_j(t)|}, \quad (3.13)$$

不失一般性, 设 j < k 时 $x_j < x_k$, 将 (3.13) 代入 (3.12) 中并在 $x = x_j(t)$ 处对测试函数积分可知, p_j , q_j , r_j 和 x_j 的演化满足下列动力系统:

$$\dot{p}_{j} = \frac{3}{2} p_{j} \sum_{l,m=1}^{N} p_{l} r_{m} (1 - \operatorname{sgn}(x_{j} - x_{l}) \operatorname{sgn}(x_{j} - x_{m})) e^{-|x_{j} - x_{l}| - |x_{j} - x_{m}|}$$

$$+ \left(\frac{1}{2} \sum_{\substack{j \le k \\ j \le k}}^{N} (p_{j} r_{k} - p_{k} r_{j}) e^{x_{j} - x_{k}} (x_{k} - x_{j}) - q_{j} \right) \sum_{l=1}^{N} p_{l} \operatorname{sgn}(x_{j} - x_{l}) e^{-|x_{j} - x_{l}|}$$

$$\begin{split} &-p_{j}\sum_{l=1}^{N}q_{l}\mathrm{sgn}(x_{j}-x_{l})\mathrm{e}^{-2|x_{j}-x_{l}|},\\ &\dot{q}_{j}=\left(\sum_{\substack{j< k\\k=2}}^{N}(p_{j}r_{k}-p_{k}r_{j})\mathrm{e}^{x_{j}-x_{k}}(x_{k}-x_{j})-2q_{j}\right)\sum_{l=1}^{N}q_{l}\mathrm{sgn}(x_{j}-x_{l})\mathrm{e}^{-2|x_{j}-x_{l}|}\\ &+\frac{1}{2}\sum_{\substack{j< k\\k=2}}^{N}(\dot{p}_{j}r_{k}+p_{j}\dot{r}_{k}-\dot{p}_{k}r_{j}-p_{k}\dot{r}_{j})\mathrm{e}^{x_{j}-x_{k}}(x_{k}-x_{j}),\\ &+\frac{1}{2}\sum_{\substack{j< k\\k=2}}^{N}(p_{j}r_{k}-p_{k}r_{j})\mathrm{e}^{x_{j}-x_{k}}(\dot{x}_{k}-\dot{x}_{j}),\\ &+\frac{1}{2}\sum_{\substack{j< k\\k=2}}^{N}(p_{j}r_{k}-p_{k}r_{j})\mathrm{e}^{x_{j}-x_{k}}(\dot{x}_{k}-\dot{x}_{j}),\\ &\dot{r}_{j}=\frac{3}{2}r_{j}\sum_{\substack{l,m=1\\k=2}}^{N}p_{l}r_{m}(\mathrm{sgn}(x_{j}-x_{l})\mathrm{sgn}(x_{j}-x_{m})-1)\mathrm{e}^{-|x_{j}-x_{l}|-|x_{j}-x_{m}|}\\ &+\left(\frac{1}{2}\sum_{\substack{j< k\\k=2}}^{N}(p_{j}r_{k}-p_{k}r_{j})\mathrm{e}^{x_{j}-x_{k}}(x_{k}-x_{j})-q_{j}\right)\sum_{l=1}^{N}r_{l}\mathrm{sgn}(x_{j}-x_{l})\mathrm{e}^{-|x_{j}-x_{l}|}\\ &-r_{j}\sum_{l=1}^{N}q_{l}\mathrm{sgn}(x_{j}-x_{l})\mathrm{e}^{-2|x_{j}-x_{l}|},\\ &\dot{x}_{j}=-\sum_{l=1}^{N}q_{l}\mathrm{e}^{-2|x_{j}-x_{l}|},\quad 1\leqslant j\leqslant N. \end{split}$$

因此, 当 p_j , q_j , r_j 和 x_j 满足上述动力系统时, 由 (3.13) 决定的函数 p(x,t), q(x,t) 和 r(x,t) 就是三分量 CH 方程 (3.12) 的 N-peakon 解.

4 带负幂流孤子方程的代数几何解

本文的另一个重点内容是对孤子方程代数几何解的研究. 基于超椭圆代数曲线理论, 我们发展了Lax 对的有限展开法, 并且将其拓广到求解相联系的孤子方程可积形变后的代数几何解. 可积形变后的孤子方程是由正幂流和负幂流构成的, 即它们的 Lax 对中带有正幂和负幂的谱参数 (具有奇性), 具有更丰富的解, 求解它们的代数几何解非常困难. 借助超椭圆代数曲线的理论和特征参数的有限展开法,本文首先导出了一批定态孤子方程的 Lax 对和 Burchnall-Chaundy 多项式, 给出了相联系的代数曲线,并将其进行分类. 然后通过研究与定态孤子方程相联系的谱问题的性质, 我们找到了构造这类非线性演化方程族代数几何解的关键条件, 并建立了定态 Baker-Akhiezer 函数及其与 Riemann 面上亚纯函数的联系. 最终摆脱了 Riemann 定理的束缚, 通过借助于代数曲线的理论、亚纯函数和 Baker-Akhiezer 函数的渐近式建立起了位势与 Theta 函数之间的关系, 构造出了与 2×2 阶矩阵谱问题相联系的混合 AKNS 方程和 mKdV 型方程等的代数几何解. 此方法同样可处理非超椭圆代数曲线情形.

4.1 KdV6 方程的代数几何解

2008年, Karasu-Kalkanli 等人推出了一个新的可积方程

$$(\partial_x^3 + 8u_x\partial_x + 4u_{xx})(u_t + u_{xxx} + 6u_x^2) = 0, (4.1)$$

称为 KdV6 方程. Karasu-Kalkanli 等人对这个 6 阶非线性波方程进行了偏微分方程可积性的 Painlevé 分析, 找到了它的 Lax 对和自 Bäcklund 变换. 因为 KdV6 方程不属于任何已知的理论, 所以自发现以来, 在非线性演化方程领域成为了一个研究热点. 本节将给出 KdV6 方程族的代数几何解.

为了导出 KdV6 方程族. 首先考虑下面谱问题:

$$\psi_{xx} = 2(\lambda - u_x)\psi,\tag{4.2}$$

其中, u(x,t) 是位势函数, λ 为常值谱参数. 引入 Lenard 梯度 $\{s_i\}$:

$$s_{-1} = -8, \quad s_0 = -4u_x, \quad s_1 = -\frac{1}{2}u_{xxx} - 3u_x^2,$$

$$s_{m+1} = \left(\frac{1}{8}\partial_x^2 + u_x\right)s_m + \frac{1}{16}\sum_{\substack{j+k=m\\j,k\geqslant 0}} s_j s_k + \frac{1}{32}\sum_{\substack{j+k=m-1\\j,k\geqslant 0}} \left(\frac{1}{4}s_{j,x}s_{k,x} - 2u_x s_j s_k - \frac{1}{2}s_j s_{k,xx}\right).$$

由其定义式可证明 Lenard 梯度 $\{s_j\}$ 满足 $Ks_{j-1}=Js_j,\ Js_{-1}=0,\ j\geqslant 0.$ 其中, K 和 J 为如下定义的反称算子:

$$K = \frac{1}{2}\partial_x^3 + 2\partial_x u_x + 2u_x \partial_x, \quad J = 4\partial_x.$$

设特征函数 ψ 的时间演化满足微分方程

$$\psi_{t_m} = A_m \psi_x - \frac{1}{2} A_{m,x} \psi. \tag{4.3}$$

若将 A_m 写成关于 λ 的 Laurent 展式

$$A_m = \sum_{j=0}^{m} s_{j-1} \lambda^{m-j-1} - \frac{1}{2} \lambda^{-1} u_{t_m},$$

则 (4.2) 和 (4.3) 的相容条件可推出非线性演化方程族

$$K\left(s_{m-1} - \frac{1}{2}u_{t_m}\right) = 0, (4.4)$$

(4.4) 即为 KdV6 方程族. 当 m=0, m=1 和 m=2 时, (4.4) 中所对应的方程分别是 $(t_2=t)$:

$$\left(\frac{1}{2}\partial_x^3 + 2\partial_x u_x + 2u_x \partial_x\right) \left(-8 - \frac{1}{2}u_{t_0}\right) = 0,\tag{4.5}$$

$$\left(\frac{1}{2}\partial_x^3 + 2\partial_x u_x + 2u_x\partial_x\right)\left(-4u_x - \frac{1}{2}u_{t_1}\right) = 0,\tag{4.6}$$

$$\left(\frac{1}{2}\partial_x^3 + 2\partial_x u_x + 2u_x \partial_x\right) \left(-\frac{1}{2}u_{xxx} - 3u_x^2 - \frac{1}{2}u_t\right) = 0, \tag{4.7}$$

其中, 方程 (4.7) 即为著名的 KdV6 方程 (4.1).

接下来构造方程 (4.5)–(4.7) 的代数几何解. 设 (4.2) 和 (4.3) 有两个基解 ϕ_1 和 ϕ_2 . 由此定义函数 f,g 和 h 为

$$f = \frac{1}{2}(\phi_1\phi_2)_x$$
, $g = -\phi_1\phi_2$, $h = \phi_{1x}\phi_{2x}$.

利用 (4.2) 和 (4.3), 直接计算可得 $\partial_x W[\phi_1,\phi_2]=0$, $\partial_{t_m} W[\phi_1,\phi_2]=0$, 其中, $W[\phi_1,\phi_2]=\phi_1\phi_{2,x}-\phi_2\phi_{1,x}$, 则函数 f^2+gh 是一个关于 λ 的 2N+1 次多项式, 系数与 x 流和 t_m 流无关. 不妨假设

$$f^2 + gh = 128 \prod_{j=1}^{2N+1} (\lambda - \lambda_j) = 128R(\lambda).$$

若将 g 写为有限项乘积形式 $g=-8\prod_{i=1}^{N}(\lambda-\mu_i)$, 其根 $\{\mu_k\}$ 称为椭圆变量, $\{\mu_k\}$ 关于 x 流和 t_m 流的演化满足如下关系:

$$\frac{\mu_{k,x}}{-2\sqrt{2R(\mu_k)}} = \frac{1}{\prod_{\substack{i=1\\i\neq k}}^{N}(\mu_k - \mu_i)}, \quad 1 \leqslant k \leqslant N,$$
$$\frac{\mu_{k,t_m}}{-2\sqrt{2R(\mu_k)}} = \frac{A_m \mid_{\lambda = \mu_k}}{\prod_{\substack{i=1\\i\neq k}}^{N}(\mu_k - \mu_i)}, \quad 0 \leqslant m \leqslant 2.$$

为了获得 (4.5)–(4.7) 的代数几何解, 考虑亏格为 N 的超椭圆曲线 $\zeta^2-128R(\lambda)=0$ 的 Riemann 面 Γ . 引入 Abel 映射 $\mathcal{A}(p)$: Div $(\Gamma)\to\mathcal{J}$,

$$\mathcal{A}(p) = \int_{p_0}^{p} \omega, \quad \mathcal{A}\left(\sum n_k p_k\right) = \sum n_k \mathcal{A}(p_k),$$

并定义 Abel-Jacobi 坐标为

$$\rho = \mathcal{A}\left(\sum_{k=1}^{N} p(\mu_k)\right) = \sum_{k=1}^{N} \int_{p_0}^{p(\mu_k)} \omega,$$

其中, $p(\mu_k) = (\lambda = \mu_k, \zeta = \sqrt{R(\mu_k)}) \in \Gamma$, p_0 为 Γ 上一个基点. 由代数几何知识可得到下面的定理. **定理 1** (流的拉直)

$$\partial_x \rho = \tilde{\Omega}, \quad \partial_{t_m} \rho = \Omega^{(m)}, \quad 0 \leqslant m \leqslant 2,$$
 (4.8)

其中, $\tilde{\Omega} = (\tilde{\Omega}_1, \dots, \tilde{\Omega}_N)^{\mathrm{T}}$, $\Omega^{(m)} = (\Omega_1^{(m)}, \dots, \Omega_N^{(m)})^{\mathrm{T}}$, 且 $\tilde{\Omega}_j = -2\sqrt{2}C_{jN}$, $\Omega_j^{(0)} = -16\sqrt{2}C_{j1}$, $\Omega_j^{(1)} = 16\sqrt{2}(C_{jN} - C_{j1})$, $\Omega_j^{(2)} = 16\sqrt{2}(C_{j,N-1} - \alpha_0C_{jN} - C_{j1})$.

通过对方程 (4.8) 进行积分, 可以很容易得到 $\rho = \rho_0 + \tilde{\Omega}x + \Omega^{(m)}t_m$, $0 \le m \le 2$, 其中, ρ_0 为积分常数. 由 Riemann 定理可知, 存在常数 $M \in \mathbb{C}^N$, 使得函数

$$F(\lambda) = \theta(\mathcal{A}(p(\lambda)) - \rho - M)$$

恰有 N 个零点, $\lambda = \mu_1, \dots, \mu_N$, 且 $\sum_{j=1}^N \mu_j = I_1(\Gamma) + 4\partial_x^2 \ln \theta (\rho + M + \delta_0)$. 因此, 方程 (4.5)–(4.7) 的代数几何解分别是

$$u(x,t_0) = -8\partial_x \ln\theta(-2\sqrt{2}C_N x + \Omega^{(0)}t_0 + \pi_0) + \eta_0 x + \xi_0,$$

$$u(x,t_1) = -8\partial_x \ln\theta(-2\sqrt{2}C_N x + \Omega^{(1)}t_1 + \pi_0) + \eta_0 x + \xi_1,$$

$$u(x,t) = -8\partial_x \ln\theta(-2\sqrt{2}C_N x + \Omega^{(2)}t + \pi_0) + \eta_0 x + \xi_2,$$

其中, $\eta_0 = -2\alpha_0 - 2I_1(\Gamma)$, $\pi_0 = \rho_0 + M + \delta_0$, $\delta_0 = \int_{\infty}^{p_0} \omega$, ξ_0 , ξ_1 , ξ_2 为常数.

4.2 mKdV 型方程的代数几何解

首先, 由如下谱问题出发推导新的 mKdV 型方程族,

$$\psi_x = U\psi, \quad U = \begin{pmatrix} u & 1 \\ \lambda & -u \end{pmatrix}, \quad \psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix},$$
(4.9)

其中, u(x,t) 是位势, λ 为常值谱参数. 记 $S_j = (A_j, B_j)^{\mathrm{T}}$, 下面引进 Lenard 梯度 $\{S_i\}$:

$$\begin{split} A_{m+1} &= -u^2 A_m + u B_{mx} + \frac{1}{8} \sum_{j=0}^{m-1} (u^2 A_j A_{m-j-1} + B_{jx} B_{m-j-1,x} - 2u A_j B_{m-j-1,x}) \\ &\quad + \frac{1}{8} \sum_{j=0}^{m} (A_j A_{m-j} - 4B_j B_{m-j}), \\ B_m &= \frac{1}{4} \partial_x^2 B_{m-1} - \frac{1}{4} \partial_x u A_{m-1}, \quad m \geqslant 1, \end{split}$$

其中, $A_{-1}=-4$, $B_{-1}=0$, $A_0=2u^2$, $B_0=u_x$, $A_1=uu_{xx}-\frac{1}{2}u_x^2-\frac{3}{2}u^4$, $B_1=\frac{1}{4}u_{xxx}-\frac{3}{2}u^2u_x$. 利用归纳法可证 Lenard 梯度 $\{S_j\}$ 满足 $KS_{j-1}=JS_j$, $JS_{-1}=0$, $j\geqslant 0$, K 和 J 为如下定义的两个算子:

$$K = \begin{pmatrix} -\partial u & \partial^2 \\ \partial & -4u \end{pmatrix}, \quad J = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ \partial & -4u \end{pmatrix}.$$

设特征函数 ψ 的时间演化遵循微分方程

$$\psi_{t_m} = V^{(m)}\psi, \quad V^{(m)} = \begin{pmatrix} uA^{(m)} - B_x^{(m)} & A^{(m)} + 2B^{(m)} \\ \lambda(A^{(m)} - 2B^{(m)}) & -uA^{(m)} + B_x^{(m)} \end{pmatrix}. \tag{4.10}$$

则 (4.9) 和 (4.10) 的相容条件 $U_{tm} - V_x^{(m)} + [U, V^{(m)}] = 0$ 等价于非线性演化方程族

$$(u\partial^2 - u_x\partial - 4u^3)(u_{t_m} - X_m) = 0, \quad m \geqslant 0,$$
(4.11)

其中, $X_m = \partial u A_{m-1} - \partial^2 B_{m-1}$. (4.11) 的前两个非平凡成员即为如下的 mKdV 型方程:

$$(u\partial^2 - u_x\partial - 4u^3)(u_{t_0} + 4u_x) = 0, (4.12)$$

$$(u\partial^2 - u_x\partial - 4u^3)(u_{t_1} + u_{xxx} - 6u^2u_x) = 0. (4.13)$$

其次, 建立椭圆坐标与位势之间的联系, 则这两个新的 mKdV 型方程 (4.12) 和 (4.13) 可以被分解为可解的常微分方程组. 令 $\chi=(\chi_1,\chi_2)^{\rm T},\,\varphi=(\varphi_1,\varphi_2)^{\rm T}$ 为 (4.9) 和 (4.10) 的基解. 引入 Lax 矩阵

$$W = \frac{1}{2} (\chi \varphi^{\mathrm{T}} + \varphi \chi^{\mathrm{T}}) \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -G & F \\ \lambda H & G \end{pmatrix},$$

此矩阵满足 Lax 方程 $W_x = [U, W], W_{t_m} = [V^{(m)}, W]$. 因此, detW 是 λ 的 (2n+1) 阶多项式, 其系数是与 x 流和 t_m 流无关的常数, 故可以将其写成

$$-\det W = G^{2} + \lambda F H = 16\lambda \prod_{j=1}^{2n} (\lambda - \lambda_{j}) = 16R(\lambda).$$
 (4.14)

若将 F 和 H 写成下面的有限项乘积的形式:

$$F = -4 \prod_{j=1}^{n} (\lambda - \mu_j), \quad H = -4 \prod_{j=1}^{n} (\lambda - \nu_j),$$

其中, 根 $\{\mu_j\}$ 和 $\{\nu_j\}$ 称为椭圆变量. 接下来, 为了建立两个 mKdV 型方程 (4.12) 和 (4.13) 的代数几何解. 根据 (4.14), 我们可以很自然地引入一个算术亏格为 n 的超椭圆曲线 $\mathcal{K}_n: y^2 - 16R(\lambda) = 0$. 假设 $R(\lambda)$ 的零点 λ_j 是互异的. 在此假设下, \mathcal{K}_n 便为非奇异的超椭圆曲线. 利用超椭圆曲线 \mathcal{K}_n 的定义,可以将 $\{\mu_i\}$ 和 $\{\nu_i\}$ 在曲线 \mathcal{K}_n 上的坐标表示为

$$\hat{\mu}_{i}(x, t_{m}) = (\mu_{i}(x, t_{m}), -G(\mu_{i}(x, t_{m}), x, t_{m})), \quad \hat{\nu}_{i}(x, t_{m}) = (\nu_{i}(x, t_{m}), G(\nu_{i}(x, t_{m}), x, t_{m})),$$

其中, $j=1,\ldots,n,$ $(x,t_m)\in\mathbb{R}^2$. 定义 \mathcal{K}_n 上的亚纯函数

$$\phi(P, x, t_m) = \frac{y - G}{F} = \frac{\lambda H}{y + G}.$$

因此, $\phi(\cdot, x, t_m)$ 的因子为

$$(\phi(\cdot, x, t_m)) = D_{\hat{\nu}(x, t_m)} - D_{\hat{\mu}(x, t_m)} + P_0 - P_{\infty},$$

其中,

$$P_0 = (0,0), \quad D_{\hat{\mu}(x,t_m)} = \sum_{j=1}^n \hat{\mu}_j(x,t_m), \quad D_{\hat{\nu}(x,t_m)} = \sum_{j=1}^n \hat{\nu}_j(x,t_m).$$

接下来研究亚纯函数 φ 的渐近性质, 并可得以下结论.

定理 2 若 $u(x,t_m) \in C^{\infty}(\mathbb{R}^2)$ 满足非线性演化方程族 (4.11), 设 $P = (\lambda,y) \in \mathcal{K}_n \setminus \{P_{\infty}\}$, 则

$$\phi \underset{\zeta \to 0}{=} -\zeta^{-1} + u + \left(\sum_{j=1}^{2n} \lambda_j - \sum_{j=1}^n \mu_j\right) \zeta + O(\zeta^2), \quad \stackrel{\text{def}}{=} P \to P_{\infty}.$$

基于以上性质, 可得定理 3.

定理 3 设 $P = (\lambda, y) \in \mathcal{K}_n \setminus \{P_{\infty}, P_0\}, (x, t_m), (x_0, t_{0,m}) \in M$, 其中 $M \subseteq \mathbb{R}^2$ 是开连通区域. 令 $u \in C^{\infty}(M)$ 满足非线性演化方程族 (4.11). 进一步, 设 $D_{\hat{\mu}(x,t_m)}$, 或者等价地, $D_{\hat{\nu}(x,t_m)}$ 在 $(x,t_m) \in M$ 是非特殊因子. 则 u 具有如下形式:

$$u = -\partial_x \ln \frac{\theta(P_{\infty}, D_{\hat{\nu}(x, t_m)})}{\theta(P_{\infty}, D_{\hat{\mu}(x, t_m)})}, \quad 0 \leqslant m \leqslant 1.$$

因此,方程 (4.12) 具有代数几何解 $u = -\partial_x \ln \frac{\theta(P_\infty, D_{\hat{\nu}(x,t_0)})}{\theta(P_\infty, D_{\hat{\mu}(x,t_0)})}$. mKdV 型方程 (4.13) 的代数几何解具有如下形式: $u = -\partial_x \ln \frac{\theta(P_\infty, D_{\hat{\nu}(x,t_1)})}{\theta(P_\infty, D_{\hat{\mu}(x,t_1)})}$.

4.3 混合 AKNS 方程的代数几何解

本节要导出混合 AKNS 方程族. 首先考虑广义的 Zakharov-Shabat 谱问题

$$\psi_x = U\psi, \quad \psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} \lambda & u \\ v & -\lambda \end{pmatrix},$$
(4.15)

其中, u(x,t) 和 v(x,t) 是位势, λ 为常值谱参数. 为了得到混合 AKNS 方程族, 引入 Lenard 梯度如下:

$$b_0 = 0$$
, $c_0 = 0$, $a_0 = 1$, $2b_{j+1} = b_{j,x} + 2ua_j$,
$$2c_{j+1} = -c_{j,x} + 2va_j$$
,
$$\sum_{j=0}^{m} (a_j a_{m-j} + b_j c_{m-j}) = 0$$
.

记 $S_j = (a_j, b_j, c_j)^{\mathrm{T}}$, 从上述定义可见 Lenard 梯度 $\{S_j\}$ 满足 $KS_{j-1} = JS_j$, $JS_0 = 0$, $j \ge 1$, 其中, K和 J 为两个算子, 定义如下:

$$K = \begin{pmatrix} 2u & \partial & 0 \\ 2v & 0 & -\partial \\ \partial & v & -u \end{pmatrix}, \quad J = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ \partial & v & -u \end{pmatrix}.$$

设特征函数 ψ 的时间演化遵循微分方程

$$\psi_{t_m} = V^{(m)}\psi, \quad V^{(m)} = \begin{pmatrix} A^{(m)} & B^{(m)} \\ C^{(m)} & -A^{(m)} \end{pmatrix},$$
(4.16)

其中, $A^{(m)}$, $B^{(m)}$ 和 $C^{(m)}$ 为谱参数 λ 的多项式

$$A^{(m)} = a_{-1}\lambda^{-1} + \sum_{j=0}^{m} a_{j}\lambda^{m-j}, \quad B^{(m)} = b_{-1}\lambda^{-1} + \sum_{j=0}^{m} b_{j}\lambda^{m-j}, \quad C^{(m)} = c_{-1}\lambda^{-1} + \sum_{j=0}^{m} c_{j}\lambda^{m-j}.$$

则 (4.15) 和 (4.16) 的相容条件 $U_{tm} - V_x^{(m)} + [U, V^{(m)}] = 0$ 可得到新的混合 AKNS 方程族

$$(u\partial^{2} - u_{x}\partial - 2u^{2}v)(u_{t_{m}} - 2b_{m+1}) - 2u^{3}(v_{t_{m}} + 2c_{m+1}) = 0,$$

$$(v\partial^{2} - v_{x}\partial - 2uv^{2})(v_{t_{m}} + 2c_{m+1}) - 2v^{3}(u_{t_{m}} - 2b_{m+1}) = 0,$$
(4.17)

其中, 前三个非平凡方程为

$$(u\partial^{2} - u_{x}\partial - 2u^{2}v)(u_{t_{0}} - 2u) - 2u^{3}(v_{t_{0}} + 2v) = 0,$$

$$(v\partial^{2} - v_{x}\partial - 2uv^{2})(v_{t_{0}} + 2v) - 2v^{3}(u_{t_{0}} - 2u) = 0,$$
(4.18)

$$(u\partial^2 - u_x\partial - 2u^2v)(u_{t_1} - u_x) - 2u^3(v_{t_1} - v_x) = 0,$$

$$(v\partial^2 - v_x\partial - 2uv^2)(v_{t_1} - v_x) - 2v^3(u_{t_1} - u_x) = 0,$$
(4.19)

$$(u\partial^{2} - u_{x}\partial - 2u^{2}v)\left(u_{t_{2}} - \frac{1}{2}u_{xx} + u^{2}v\right) - 2u^{3}\left(v_{t_{2}} + \frac{1}{2}v_{xx} - uv^{2}\right) = 0,$$

$$(v\partial^{2} - v_{x}\partial - 2uv^{2})\left(v_{t_{2}} + \frac{1}{2}v_{xx} - uv^{2}\right) - 2v^{3}\left(u_{t_{2}} - \frac{1}{2}u_{xx} + u^{2}v\right) = 0.$$

$$(4.20)$$

令 $\chi=(\chi_1,\chi_2)^{\rm T}$ 和 $\varphi=(\varphi_1,\varphi_2)^{\rm T}$ 为 (4.15) 和 (4.16) 的相容解, 则

$$W = \frac{1}{2} (\chi \varphi^{\mathrm{T}} + \varphi \chi^{\mathrm{T}}) \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} G & F \\ H & -G \end{pmatrix},$$

满足 Lax 方程 $W_x = [U, W], W_{t_m} = [V^{(m)}, W].$ 因此, $\det W \neq \lambda$ 的 (2n+2) 阶多项式, 其系数是与 x 流和 t_m 流无关的常数, 因此, 有

$$-\det W = G^2 + FH = \prod_{j=1}^{2n+2} (\lambda - \lambda_j) = R(\lambda).$$
 (4.21)

若将 F 和 H 写成下面的有限项乘积的形式:

$$F = u \prod_{j=1}^{n} (\lambda - \mu_j), \quad H = v \prod_{j=1}^{n} (\lambda - \nu_j),$$

其中, F 和 H 的根 $\{\mu_j\}$, $\{\nu_j\}$ 称为椭圆变量. 根据 (4.21), 我们可以很自然地引入一个算术亏格为 n 的超椭圆曲线 $\mathcal{K}_n: y^2 - R(\lambda) = 0$. 利用 \mathcal{K}_n 的定义, 椭圆变量 $\{\mu_j\}$, $\{\nu_j\}$ 对应于 \mathcal{K}_n 上的坐标为

$$\hat{\mu}_i(x, t_m) = (\mu_i(x, t_m), G(\mu_i(x, t_m), x, t_m)), \quad \hat{\nu}_i(x, t_m) = (\nu_i(x, t_m), -G(\nu_i(x, t_m), x, t_m)).$$

其中, $j=1,\ldots,n$, $(x,t_m)\in\mathbb{R}^2$. 定义 \mathcal{K}_n 上的亚纯函数

$$\phi(P, x, t_m) = \frac{y+G}{F} = \frac{H}{y-G}.$$

因此, $\phi(\cdot, x, t_m)$ 的因子为

$$(\phi(\cdot, x, t_m)) = D_{\hat{\nu}(x, t_m)} - D_{\hat{\mu}(x, t_m)} + P_{\infty +} - P_{\infty -},$$

其中,

$$D_{\hat{\mu}(x,t_m)} = \sum_{j=1}^{n} \hat{\mu}_j(x,t_m), \quad D_{\hat{\nu}(x,t_m)} = \sum_{j=1}^{n} \hat{\nu}_j(x,t_m).$$

基于亚纯函数的定义以及谱问题 (4.15) 和 (4.16), 定义如下 Baker-Akhiezer 向量:

$$\psi(P, x, x_0, t_m, t_{m,0}) = \begin{pmatrix} \psi_1(P, x, x_0, t_m, t_{m,0}) \\ \psi_2(P, x, x_0, t_m, t_{m,0}) \end{pmatrix},$$

$$\psi_1(P, x, x_0, t_m, t_{m,0}) = \exp\left[\int_{x_0}^x (\lambda - u(x', t_m)\phi(P, x', t_m))dx' + \int_{t_{m,0}}^{t_m} (A^{(m)}(\lambda, x_0, s) - B^{(m)}(\lambda, x_0, s)\phi(P, x_0, s))ds\right],$$

$$\psi_2(P, x, x_0, t_m, t_{m,0}) = -\phi(P, x, t_m)\psi_1(P, x, x_0, t_m, t_{m,0}).$$
(4.22)

则根据亚纯函数 ϕ 与 Baker-Akhiezer 向量在无穷远点 $P_{\infty+}$ 和 $P_{\infty-}$ 附近的渐进性质可得如下定理.

定理 4 设 $P = (\lambda, y) \in \mathcal{K}_n \setminus \{P_{\infty+}, P_{\infty-}\}, (x, t_m), (x_0, t_{m,0}) \in M,$ 其中, $M \subseteq \mathbb{R}^2$ 是开连通区域. 设 $u \in C^{\infty}(M)$ 满足非线性演化方程族 (4.17). 进一步设 $D_{\hat{\mu}(x,t_m)}$, 或者等价地, $D_{\hat{\nu}(x,t_m)}$ 在 $(x,t_m) \in M$ 是非特殊因子. 则 $u(x,t_m), v(x,t_m)$ 具有如下形式:

$$u(x, t_m) = u(x_0, t_{m,0}) \frac{\theta(P_{\infty+}, D_{\hat{\mu}(x_0, t_{m,0})})}{\theta(P_{\infty-}, D_{\hat{\mu}(x_0, t_{m,0})})} \frac{\theta(P_{\infty-}, D_{\hat{\mu}(x, t_m)})}{\theta(P_{\infty+}, D_{\hat{\mu}(x, t_m)})} \times \exp(-2e_{0,0}(x - x_0) - 2e_{m-1,0}(t_m - t_{m,0})),$$

$$(4.23)$$

$$v(x,t_m) = v(x_0,t_{m,0}) \frac{\theta(P_{\infty-}, D_{\hat{\nu}(x_0,t_{m,0})})}{\theta(P_{\infty+}, D_{\hat{\nu}(x_0,t_{m,0})})} \frac{\theta(P_{\infty+}, D_{\hat{\nu}(x,t_m)})}{\theta(P_{\infty-}, D_{\hat{\nu}(x,t_m)})} \times \exp(2e_{0,0}(x-x_0) + 2e_{m-1,0}(t_m - t_{m,0})),$$

$$(4.24)$$

$$u(x_0, t_{m,0})v(x_0, t_{m,0}) = -\frac{4}{\omega_0^2} \cdot \frac{\theta(P_{\infty+}, D_{\hat{\nu}(x_0, t_{m,0})})}{\theta(P_{\infty-}, D_{\hat{\nu}(x_0, t_{m,0})})} \frac{\theta(P_{\infty-}, D_{\hat{\mu}(x_0, t_{m,0})})}{\theta(P_{\infty+}, D_{\hat{\mu}(x_0, t_{m,0})})}.$$
(4.25)

因此, 混合 AKNS 方程 (4.18)-(4.20) 的代数几何解分别对应于 (4.23)-(4.25) 中 m=0,1,2 时的情形.

致谢 衷心感谢导师耿献国教授一直以来的悉心指导和培养以及郑州大学数学系各位老师的帮助,

参考文献 -

- 1 薛波. 具有 N-peakon 的新可积模型与孤子方程的代数几何解. 博士学位论文. 郑州: 郑州大学, 2010
- 2 Geng X G, Xue B. An extension of integrable peakon equations with cubic nonlinearity. Nonlinearity, 2009, 22: 1847–1856
- 3 Geng X G, Xue B. A three-component generalization of Camassa-Holm equation with N-peakon solutions. Adv Math, 2011, 226: 827–839
- 4 Geng X G, Xue B, Wu L H. A super Camassa-Holm equation with N-peakon solutions. Stud Appl Math, 2013, 130: 1–16
- 5 Geng X G, Xue B. Soliton solutions and quasiperiodic solutions of modified Korteweg-de Vries type equations. J Math Phys. 2010, 51: 063516
- 6 Geng X G, Xue B. Quasi-periodic solutions of mixed AKNS equations. Nonlinear Anal, 2010, 73: 3662–3674
- 7 Geng X G, Xue B. N-soliton and quasi-periodic solutions of the KdV6 equations. Appl Math Comput, 2012, 219: 3504-3510
- 8 Xue B, Geng X G, Li F. Quasiperiodic solutions of Jaulent-Miodek equations with a negative flow. J Math Phys, 2012, 53: 063710
- 9 Xue B, Li F, Geng X G. Quasi-periodic solutions of coupled KdV type equations. J Nonlinear Math Phys, 2013, 20: 61–77

New integrable models with N-peakons and algebro-geometric solutions of soliton equations

XUE Bo

Abstract In the soliton theory, it is a basic and challenging problem to search for integrable dynamical models with peaked soliton solutions and obtain the explicit solutions to soliton equations. This paper can be mainly divided into two parts. First, the derivation of two integrable dynamical systems with N-peakon, which provides new models for the family of nonlinear evolution equations with N-peakon; on the other hand, based on the knowledge of hyperelliptic curve, the method of finite-order expansion of Lax pairs is improved to obtain the solution of KdV6 equations. Moreover, to avoid the limit of using the Riemann theorem, the meromorphic function and the Baker-Akhiezer vector are introduced by which quasi-periodic solutions to the mKdV type equations and mixed AKNS equations are constructed according to their asymptotic properties and algebro-geometric characters.

Keywords $\,N$ -peakon, dynamic system, algebro-geometric solution

MSC(2010) 37K10, 35Q51

 $\mathbf{doi:}\ 10.1360/012013\text{-}120$