量子环面 $\mathbb{C}_{-1}$ 上的一族 Noether 模

林智平, 林卫强*

漳州师范学院数学与信息科学系, 漳州 363000
E-mail: lzp568939462@163.com, linwq66@qq.com

收稿日期: 2012-2-20; 接受日期: 2012-09-05; * 通信作者
国家自然科学基金 (批准号: 11171294) 和福建省教育厅新世纪人才计划资助项目

摘要 记 $\mathbb{C}_{-1}$ 为 $q = -1$ 的量子环面 Lie 代数. 本文以 Laurent 多项式环 $\mathbb{C}[x^{\pm 1}]$ 为表示空间, 构造了 $\mathbb{C}_{-1}$ 上的一类 Noether 但非 Artin 的模, 并确定了它们的全部子模和商模以及它们之间的全体模同态, 最后指出该模与 A_1 型 loop 代数忠实表示的关系.

关键词 量子环面 Noether 模 Artin 模 中间序列模 Laurent 多项式环

MSC (2010) 主题分类 17B10

1 引言

对 Lie 代数模的构造及其结构的研究, 是 Lie 理论的重要课题之一. 这对于更深刻地理解 Lie 代数自身的结构和揭示 Lie 代数与其它学科和分支之间的关系起着重要的作用. 量子环面是交换环面的量子化, 它是非交换几何的主要研究对象之一, 同时量子环面 $\mathbb{C}_q$ 可作为高维仿射 Lie 代数的坐标代数, 它在高维仿射 Lie 代数的结构与表示理论研究中起着重要的作用^[1].

在 q 是非单位根时 (即 $\forall n \in \mathbb{N}$, 都有 $q^n \neq 1$), 量子环面 Lie 代数 $\mathbb{C}_q$ 存在二维的非平凡泛中心扩张, 这个 Lie 代数与 Virasoro 代数的推广工作有着极其密切的关系^[2-4], 许多学者对此进行了大量的研究, 获得了许多结果^[5-12], 关于量子环面 $\mathbb{C}_q$ 及其导子代数的单性、导子结构及表示理论可参阅文献 [13-22]. 而当 $q = -1$ 时, 量子环面 Lie 代数 $\mathbb{C}_{-1}$ 与高维仿射 Lie 代数中的 TKK 代数 (即 Tits-Kantor-Koecher Lie 代数) 的结构和表示存在密切关系, 同时还和经典的 A 型仿射 Lie 代数主表示的构造之间存在密切关系.

本节首先回顾一些基本概念, 在第 2 节构造了以 Laurent 多项式环 $\mathbb{C}[x^{\pm 1}]$ 为表示空间的一类 $\mathbb{Z}$ -阶化中间序列 $\mathbb{C}_{-1}$ -模. 在第 3 和 4 节中, 确定了这个模的所有子模和商模, 从而得出该模是 Noether 模但非 Artin 模. 接着确定了其子模和商模间的全体模同态. 在最后一节, 利用模和表示的关系, 得到了 A_1 型 loop 代数的一类忠实表示.

本文所讨论的对象均在复数域 $\mathbb{C}$ 上考虑, 并用 $\mathbb{C}, \mathbb{Z}, \mathbb{Z}_+, \mathbb{N}$ 分别表示复数, 整数, 非负整数, 正整数.

量子环面 $\mathbb{C}_q$ 是复数域 $\mathbb{C}$ 上带单位元的结合代数, 其生成元为 $t_1^{\pm 1}, t_2^{\pm 1}$ (本文只考虑两个生成元的情况, 具体定义可看参考文献 [6]) 生成关系为

$$t_1 t_2 = q t_2 t_1, \quad t_j^{-1} t_j = t_j t_j^{-1} = 1, \quad 1 \leq j \leq 2.$$

按照通常的换位子可以把 $\mathbb{C}_q$ 看成一个 Lie 代数, 我们仍然将它记为 $\mathbb{C}_q$. 本文要构造和研究 $q = -1$ 的量子环面上的模. 为引用方便, 下面具体给出 $\mathbb{C}_{-1}$ 的一组基和基元之间的 Lie 运算.

定义 1 $\mathbb{C}_{-1} = \bigoplus_{m \in \mathbb{Z}} L_m$, 其中 $L_m = \text{span}\{t_1^m t_2^n \mid n \in \mathbb{Z}\}$, 其 Lie 关系为

$$[t_1^{m_1} t_2^{n_1}, t_1^{m_2} t_2^{n_2}] = ((-1)^{n_1 m_2} - (-1)^{n_2 m_1}) t_1^{m_1+m_2} t_2^{n_1+n_2}, \quad \forall m_1, m_2, n_1, n_2 \in \mathbb{Z},$$

则 $\mathbb{C}_{-1}$ 是一个 $\mathbb{Z}$ -阶化 Lie 代数.

定义 2 一个线性空间 $V = \bigoplus_{r \in \mathbb{Z}} V_r$, 如果满足以下条件:

- (1) V 是一个 $\mathbb{C}_{-1}$ -模;
- (2) $L_m \cdot V_r \subseteq V_{r+m}, \forall r, m \in \mathbb{Z}$;
- (3) $\dim V_r \leq 1, \forall r \in \mathbb{Z}$,

则称 V 为 $\mathbb{Z}$ -阶化中间序列 $\mathbb{C}_{-1}$ -模.

2 以 Laurent 多项式环 $\mathbb{C}[x^{\pm 1}]$ 为表示空间的一类 $\mathbb{C}_{-1}$ -模

设 i 为虚数单位, 即 $i^2 = -1$. 对任给 $\lambda \in \mathbb{C}$, 可以定义一个从 $\mathbb{Z}^3$ 到 $\mathbb{C}$ 的映射如下:

$$\begin{aligned} \psi_\lambda(m, n, r) &= \begin{cases} \lambda i^l \cos^2 \frac{l\pi}{2}, & m = 2l, n = 2k; \\ 2(-i)^l (ir)^{2k+1} \left(\cos^2 \frac{r\pi}{2} - i \cos^2 \frac{(r+1)\pi}{2} \right)^{2k} \cos^2 \frac{(r+l)\pi}{2}, & m = 2l, n = 2k+1; \\ \sqrt{2}(-1)^{nrl} i^l \left(\cos^2 \frac{l\pi}{2} + i \cos^2 \frac{(l+1)\pi}{2} \right) \left(ir \left(\cos^2 \frac{r\pi}{2} - i \cos^2 \frac{(r+1)\pi}{2} \right) \right)^n, & m = 2l+1. \end{cases} \end{aligned}$$

定理 1 令 $\mathbb{C}[x^{\pm 1}] = \bigoplus_{r \in \mathbb{Z}} \mathbb{C}x^r$, 定义双线性映射 $\rho_\lambda : \mathbb{C}_{-1} \times \mathbb{C}[x^{\pm 1}] \rightarrow \mathbb{C}[x^{\pm 1}]$ 使得 $\rho_\lambda(t_1^m t_2^n, x^r) = \psi_\lambda(m, n, r) x^{r+m}$, 简记 $\rho_\lambda(t_1^m t_2^n, x^r)$ 为 $t_1^m t_2^n \cdot x^r$, 则 ρ_λ 给出了一族以 $\mathbb{C}[x^{\pm 1}]$ 为表示空间的 $\mathbb{Z}$ -阶化中间序列 $\mathbb{C}_{-1}$ -模, 记该模为 V_λ .

证明 要证明 $\mathbb{C}[x^{\pm 1}]$ 是 $\mathbb{C}_{-1}$ -模, 则只要验证 $\forall t_1^{m_1} t_2^{n_1}, t_1^{m_2} t_2^{n_2} \in \mathbb{C}_{-1}, x^r \in \mathbb{C}[x^{\pm 1}]$, 都有

$$[t_1^{m_1} t_2^{n_1}, t_1^{m_2} t_2^{n_2}] \cdot x^r = t_1^{m_1} t_2^{n_1} \cdot (t_1^{m_2} t_2^{n_2} \cdot x^r) - t_1^{m_2} t_2^{n_2} \cdot (t_1^{m_1} t_2^{n_1} \cdot x^r),$$

即

$$\begin{aligned} &((-1)^{n_1 m_2} - (-1)^{n_2 m_1}) \psi_\lambda(m_1 + m_2, n_1 + n_2, r) \\ &= \psi_\lambda(m_1, n_1, m_2 + r) \psi_\lambda(m_2, n_2, r) - \psi_\lambda(m_2, n_2, m_1 + r) \psi_\lambda(m_1, n_1, r). \end{aligned}$$

记

$$\text{左边} = ((-1)^{n_1 m_2} - (-1)^{n_2 m_1}) \psi_\lambda(m_1 + m_2, n_1 + n_2, r),$$

$$\text{右边} = \psi_\lambda(m_1, n_1, m_2 + r) \psi_\lambda(m_2, n_2, r) - \psi_\lambda(m_2, n_2, m_1 + r) \psi_\lambda(m_1, n_1, r).$$

情形 1 当 m_1, m_2, n_1 和 n_2 都是偶数时, 记 $m_1 = 2l_1, m_2 = 2l_2$, 则

$$\text{右边} = \lambda i^{l_1} \cos^2 \frac{l_1 \pi}{2} \cdot \lambda i^{l_2} \cos^2 \frac{l_2 \pi}{2} - \lambda i^{l_2} \cos^2 \frac{l_2 \pi}{2} \cdot \lambda i^{l_1} \cos^2 \frac{l_1 \pi}{2}$$

$$= 0 = \text{左边}.$$

情形 2 当 m_1 和 m_2 都是偶数, n_1 和 n_2 都是奇数时, 记 $m_1 = 2l_1, m_2 = 2l_2, n_1 = 2k_1 + 1, n_2 = 2k_2 + 1$, 则

$$\begin{aligned} \text{右边} &= 4(-i)^{l_1+l_2} i^{m_2 n_1} i^{r(n_1+n_2)} \left(\cos^2 \frac{r\pi}{2} - i \cos^2 \frac{(r+1)\pi}{2} \right)^{2k_1+2k_2} \cos^2 \frac{(r+l_1)\pi}{2} \cos^2 \frac{(r+l_2)\pi}{2} \\ &\quad - 4(-i)^{l_1+l_2} i^{m_1 n_2} i^{r(n_1+n_2)} \left(\cos^2 \frac{r\pi}{2} - i \cos^2 \frac{(r+1)\pi}{2} \right)^{2k_1+2k_2} \cos^2 \frac{(r+l_1)\pi}{2} \cos^2 \frac{(r+l_2)\pi}{2} \\ &= ((-1)^{l_2} - (-1)^{l_1}) \cos^2 \frac{(r+l_1)\pi}{2} \cos^2 \frac{(r+l_2)\pi}{2} 4(-i)^{l_1+l_2} i^{r(n_1+n_2)} \\ &\quad \times \left(\cos^2 \frac{r\pi}{2} - i \cos^2 \frac{(r+1)\pi}{2} \right)^{2k_1+2k_2} \\ &= 0 \\ &= \text{左边}. \end{aligned}$$

情形 3 当 m_1 和 m_2 都是偶数, n_1, n_2 一奇一偶时, 不妨设 n_1 为奇数, n_2 为偶数, 记 $m_1 = 2l_1, m_2 = 2l_2, n_1 = 2k_1 + 1, n_2 = 2k_2$, 则

$$\begin{aligned} \text{右边} &= 2\lambda(-i)^{l_1} i^{l_2} (i^{m_2+r})^{2k_1+1} \left(\cos^2 \frac{r\pi}{2} - i \cos^2 \frac{(r+1)\pi}{2} \right)^{2k_1} \cos^2 \frac{(r+l_1)\pi}{2} \cos^2 \frac{l_2\pi}{2} \\ &\quad - 2\lambda(-i)^{l_1} i^{l_2} (i^r)^{2k_1+1} \left(\cos^2 \frac{r\pi}{2} - i \cos^2 \frac{(r+1)\pi}{2} \right)^{2k_1} \cos^2 \frac{(r+l_1)\pi}{2} \cos^2 \frac{l_2\pi}{2} \\ &= 2\lambda((-1)^{l_2} - 1) \cos^2 \frac{l_2\pi}{2} (-i)^{l_1} i^{l_2} (i^r)^{2k_1+1} \left(\cos^2 \frac{r\pi}{2} - i \cos^2 \frac{(r+1)\pi}{2} \right)^{2k_1} \cos^2 \frac{(r+l_1)\pi}{2} \\ &= 0 \\ &= \text{左边}. \end{aligned}$$

情形 4 当 m_1 和 m_2 都是奇数时, 记 $m_1 = 2l_1 + 1, m_2 = 2l_2 + 1$, 则

$$\begin{aligned} \text{右边} &= 2(-1)^{n_1(m_2+r)l_1+n_2rl_2} i^{l_1+l_2} i^{r(n_1+n_2)+m_2n_1} (-1)^{(r+1)n_1} i^{n_1} \\ &\quad \times \left(\cos^2 \frac{l_1\pi}{2} + i \cos^2 \frac{(l_1+1)\pi}{2} \right) \left(\cos^2 \frac{l_2\pi}{2} + i \cos^2 \frac{(l_2+1)\pi}{2} \right) \\ &\quad \times \left(\cos^2 \frac{r\pi}{2} - i \cos^2 \frac{(r+1)\pi}{2} \right)^{n_1+n_2} - 2(-1)^{n_1rl_1+n_2(m_1+r)l_2} i^{l_1+l_2} i^{r(n_1+n_2)+m_1n_2} \\ &\quad \times (-1)^{(r+1)n_2} i^{n_2} \left(\cos^2 \frac{l_1\pi}{2} + i \cos^2 \frac{(l_1+1)\pi}{2} \right) \left(\cos^2 \frac{l_2\pi}{2} + i \cos^2 \frac{(l_2+1)\pi}{2} \right) \\ &\quad \times \left(\cos^2 \frac{r\pi}{2} - i \cos^2 \frac{(r+1)\pi}{2} \right)^{n_1+n_2} \\ &= 2(1 - (-1)^{(n_1+n_2)(l_1+l_2+r)}) (-1)^{r(n_1l_1+n_2l_2)} i^{l_1+l_2} i^{r(n_1+n_2)} \\ &\quad \times \left(\cos^2 \frac{l_1\pi}{2} + i \cos^2 \frac{(l_1+1)\pi}{2} \right) \left(\cos^2 \frac{l_2\pi}{2} + i \cos^2 \frac{(l_2+1)\pi}{2} \right) \\ &\quad \times \left(\cos^2 \frac{r\pi}{2} - i \cos^2 \frac{(r+1)\pi}{2} \right)^{n_1+n_2}. \end{aligned}$$

子情形 1 当 $n_1 + n_2 \in 2\mathbb{Z}$ 时,

右边 = 0 = 左边.

子情形 2 当 $n_1 + n_2 \notin 2\mathbb{Z}$ 时, 不妨设 n_1 为偶数, n_2 为奇数, 则

$$\begin{aligned} \text{左边} &= 4(-i)^{l_1+l_2+1}(i^r)^{n_1+n_2} \left(\cos^2 \frac{r\pi}{2} - i \cos^2 \frac{(r+1)\pi}{2} \right)^{n_1+n_2-1} \cos^2 \frac{(r+l_1+l_2+1)\pi}{2}, \\ \text{右边} &= \begin{cases} 0, & r \in 2\mathbb{Z}, \quad l_1+l_2 \in 2\mathbb{Z}; \\ 0, & r \notin 2\mathbb{Z}, \quad l_1+l_2 \notin 2\mathbb{Z}; \\ 4i^{l_1+l_2+1}i^{r(n_1+n_2)}, & r \in 2\mathbb{Z}, \quad l_1+l_2 \notin 2\mathbb{Z}; \\ 4i^{l_1+l_2}i^{r(n_1+n_2)}(-i)^{n_1+n_2}, & r \notin 2\mathbb{Z}, \quad l_1+l_2 \in 2\mathbb{Z}, \end{cases} \\ &= \text{左边}. \end{aligned}$$

情形 5 当 m_1, m_2 一个为奇数, 一个为偶数时, 不妨设 m_1 为奇数, m_2 为偶数, 记 $m_1 = 2l_1 + 1$, $m_2 = 2l_2$.

子情形 1 当 n_2 为奇数时, 记 $n_2 = 2k_2 + 1$, 则

$$\begin{aligned} \text{左边} &= 2\sqrt{2}(-1)^{(n_1+n_2)r(l_1+l_2)}i^{l_1+l_2}i^{r(n_1+n_2)} \left(\cos^2 \frac{(l_1+l_2)\pi}{2} + i \cos^2 \frac{(l_1+l_2+1)\pi}{2} \right) \\ &\quad \times \left(\cos^2 \frac{r\pi}{2} - i \cos^2 \frac{(r+1)\pi}{2} \right)^{n_1+n_2}, \\ \text{右边} &= 2\sqrt{2} \left((-1)^{l_2n_1} \cos^2 \frac{(r+l_2)\pi}{2} - (-1)^{l_1} i \cos^2 \frac{(r+l_2+1)\pi}{2} \right) \\ &\quad \times (-1)^{n_1rl_1+l_2}i^{l_1+l_2}i^{r(n_1+n_2)} \left(\cos^2 \frac{l_1\pi}{2} + i \cos^2 \frac{(l_1+1)\pi}{2} \right) \\ &\quad \times \left(\cos^2 \frac{r\pi}{2} - i \cos^2 \frac{(r+1)\pi}{2} \right)^{n_1+n_2-1} \\ &= \begin{cases} 2\sqrt{2}i^{l_1+l_2}i^{r(n_1+n_2)}, & r \in 2\mathbb{Z}, \quad l_1+l_2 \in 2\mathbb{Z}; \\ 2\sqrt{2}i^{l_1+l_2+1}i^{r(n_1+n_2)}, & r \in 2\mathbb{Z}, \quad l_1+l_2 \notin 2\mathbb{Z}; \\ 2\sqrt{2}i^{l_1+l_2}i^{r(n_1+n_2)}(-i)^{n_1+n_2}, & r \notin 2\mathbb{Z}, \quad l_1+l_2 \in 2\mathbb{Z}; \\ 2\sqrt{2}i^{l_1+l_2+1}i^{r(n_1+n_2)}i^{n_1+n_2}, & r \notin 2\mathbb{Z}, \quad l_1+l_2 \notin 2\mathbb{Z}, \end{cases} \\ &= \text{左边}. \end{aligned}$$

子情形 2 当 n_2 为偶数时, 记 $n_2 = 2k_2$, 则

$$\begin{aligned} \text{右边} &= \sqrt{2}\lambda(-1)^{n(2l_2+r)l_1}i^{l_1+l_2}i^{2l_2n_1} \cos^2 \frac{l_2\pi}{2} \left(\cos^2 \frac{l_1\pi}{2} + i \cos^2 \frac{(l_1+1)\pi}{2} \right) \\ &\quad \times \left(i^r \left(\cos^2 \frac{r\pi}{2} - i \cos^2 \frac{(r+1)\pi}{2} \right) \right)^n - \sqrt{2}\lambda(-1)^{nr l_1}i^{l_1+l_2} \cos^2 \frac{l_2\pi}{2} \\ &\quad \times \left(\cos^2 \frac{l_1\pi}{2} + i \cos^2 \frac{(l_1+1)\pi}{2} \right) \left(i^r \left(\cos^2 \frac{r\pi}{2} - i \cos^2 \frac{(r+1)\pi}{2} \right) \right)^n \\ &= 0 = \text{左边}. \end{aligned}$$

综上所述, $\mathbb{C}[x^{\pm 1}]$ 是 $\mathbb{C}_{-1}$ -模. 又 $\forall r, m \in \mathbb{Z}$, 都有 $L_m \cdot \mathbb{C}x^r \subseteq \mathbb{C}x^{r+m}$, 所以 $\mathbb{C}[x^{\pm 1}]$ 是 $\mathbb{Z}$ -阶化中间序列 $\mathbb{C}_{-1}$ -模. 证毕. $\square$

定理 2 当 $\lambda \neq \mu$ 时, $\mathbb{C}_{-1}$ -模 V_λ 与 V_μ 不同构.

证明 设 $\mathbb{C}_{-1}$ -模 V_λ 与 V_μ 同构, 若 φ 是 V_λ 到 V_μ 的同构映射.

设 $\varphi(x^0) = \sum_{j=1}^k a_j x^{r_j}$, 因为

$$\varphi(t_1^0 t_2^2 \cdot x^0) = \varphi(\lambda x^0) = \lambda \sum_{j=1}^k a_j x^{r_j},$$

而

$$t_1^0 t_2^2 \cdot \varphi(x^0) = t_1^0 t_2^2 \cdot \sum_{j=1}^k a_j x^{r_j} = \mu \sum_{j=1}^k a_j x^{r_j}.$$

又因为 $\lambda \neq \mu$, 所以 $\varphi(t_1^0 t_2^2 \cdot x^0) \neq t_1^0 t_2^2 \cdot \varphi(x^0)$, 矛盾. 所以 V_λ 与 V_μ 不同构. 证毕. $\square$

3 $\mathbb{C}_{-1}$ -模 V_λ 的子模

为了方便研究, 我们把 $\psi_\lambda(m, n, r)$ 的取值情况用表 1 给出:

由表 1 可知, 对任给 $m, n, r, k \in \mathbb{Z}$, 有

$$\psi_\lambda(m, n, r) = \psi_\lambda(m, n, r + 4k), \quad (3.1)$$

$$\psi_\lambda(\pm 1, 0, r) = \sqrt{2}, \quad (3.2)$$

$$\psi_\lambda(m, n + 2k, r) = \psi_\lambda(m, n, r). \quad (3.3)$$

引理 1 若 W 是 V_λ 的任意子模, 则 W 为 Laurent 多项式环 $\mathbb{C}[x^{\pm 1}]$ 的一个理想.

证明 因为 W 是 V_λ 的子模, 所以要证 W 为 $\mathbb{C}[x^{\pm 1}]$ 的一个理想, 则只要证 $\forall f(x) \in W, x^j \in \mathbb{C}[x^{\pm 1}], j \in \mathbb{Z}$, 都有 $x^j f(x) \in W$ 即可.

根据定义有

$$xf(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} t_1^1 \cdot f(x) \in W, \quad x^{-1}f(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} t_1^{4(-1)+3} \cdot f(x) \in W,$$

所以由数学归纳法即可推导出 $x^j f(x) \in W$. 证毕. $\square$

约定 记由多项式 $f(x) \in \mathbb{C}[x]$ 所生成的 Laurent 多项式环 $\mathbb{C}[x^{\pm 1}]$ 上的理想为 $I_{f(x)}$.

表 1 $\psi_\lambda(m, n, r)$ 的取值情况

$\psi_\lambda(m, n, 2s)$	$m = 4h$	$m = 4h + 1$	$m = 4h + 2$	$m = 4h + 3$
$n = 2k$	$\lambda(-1)^h$	$\sqrt{2}(-1)^h$	0	$\sqrt{2}(-1)^{h+1}$
$n = 2k + 1$	$2(-1)^{h+s}$	$\sqrt{2}(-1)^{h+s}$	0	$\sqrt{2}(-1)^{h+s+1}$
$\psi_\lambda(m, n, 2s + 1)$	$m = 4h$	$m = 4h + 1$	$m = 4h + 2$	$m = 4h + 3$
$n = 2k$	$\lambda(-1)^h$	$\sqrt{2}(-1)^h$	0	$\sqrt{2}(-1)^{h+1}$
$n = 2k + 1$	0	$\sqrt{2}(-1)^{h+s}$	$2(-1)^{h+s}$	$\sqrt{2}(-1)^{h+s}$

定理 3 W 是 V_λ 的一个非零子模的充分必要条件是存在

$$f(x) = \sum_{s=0}^k a_s x^s \in \mathbb{C}[x],$$

其中 $a_0 = 1$, 使得 $W = I_{f(x^4)}$.

证明 充分性. 要证 $W = I_{f(x^4)}$ 是 V_λ 的一个子模, 只要证 $\forall t_1^m t_2^n \in \mathbb{C}_{-1}, j \in \mathbb{Z}$, 都有 $t_1^m t_2^n \cdot x^j f(x^4) \in W$ 即可.

不妨设 $f(x^4) = \sum_{s=0}^k a_s x^{4s}$, 则由 (3.1) 可得

$$\begin{aligned} t_1^m t_2^n \cdot x^j f(x^4) &= \sum_{s=0}^k a_s t_1^m t_2^n \cdot x^{4s+j} = \sum_{s=0}^k a_s \psi_\lambda(m, n, 4s+j) x^{4s+j+m} \\ &= \psi_\lambda(m, n, j) x^{j+m} \sum_{s=0}^k a_s x^{4s} = \psi_\lambda(m, n, j) x^{j+m} f(x^4) \in W. \end{aligned}$$

故 $W = I_{f(x^4)}$ 为 V_λ 的一个子模.

必要性. 因 Laurent 多项式环 $\mathbb{C}[x^{\pm 1}]$ 是主理想整环, 故由引理 1 可知, 存在

$$g(x) = \sum_{j=0}^{s_0} c_j^{(0)} x^{4j} + \sum_{j=0}^{s_1} c_j^{(1)} x^{4j+1} + \sum_{j=0}^{s_2} c_j^{(2)} x^{4j+2} + \sum_{j=0}^{s_3} c_j^{(3)} x^{4j+3} \in \mathbb{C}[x],$$

其中 $s_0, s_1, s_2, s_3 \in \mathbb{Z}_+, c_0^{(0)} = 1$, 使得 $W = I_{g(x)}$.

由表 1 可知,

$$t_1^{4(-h-1)+3} t_2^{2k} \cdot t_1^1 t_2^{2k} \cdot (t_1^{4h} t_2^{2k+1} \cdot g(x)) = 4 \left(\sum_{j=0}^{s_0} c_j^{(0)} x^{4j} - \sum_{j=0}^{s_2} c_j^{(2)} x^{4j+2} \right) \in W.$$

故 $\sum_{j=0}^{s_0} c_j^{(0)} x^{4j} - \sum_{j=0}^{s_2} c_j^{(2)} x^{4j+2} \in W$, 于是

$$t_1^{4(-h-1)+3} t_2^{2k} \cdot t_1^{4h+1} t_2^{2k+1} \cdot \left(\sum_{j=0}^{s_0} c_j^{(0)} x^{4j} - \sum_{j=0}^{s_2} c_j^{(2)} x^{4j+2} \right) = 2 \left(\sum_{j=0}^{s_0} c_j^{(0)} x^{4j} + \sum_{j=0}^{s_2} c_j^{(2)} x^{4j+2} \right) \in W,$$

因此 $\sum_{j=0}^{s_0} c_j^{(0)} x^{4j} \in W$.

又因为 $W = I_{g(x)}$, 所以有

$$g(x) \Big| \sum_{j=0}^{s_0} c_j^{(0)} x^{4j},$$

又 $c_0^{(0)} \neq 0$, 所以有 $g(x) = \sum_{j=0}^{s_0} c_j^{(0)} x^{4j}$. 证毕. $\square$

由定理 3 可知, V_λ 的非零子模集合与常数项为 1 的多项式集合 $\overline{\mathbb{C}[x]}$ 之间存在一一对应关系. 因而可直接得到下述推论.

推论 1 若 $W_1 = I_{f(x^4)}$, 其中 $f(x) \in \overline{\mathbb{C}[x]}$ 为 V_λ 的任意子模, 则 W_2 为 W_1 的子模的充分必要条件是存在 $g(x) \in \overline{\mathbb{C}[x]}$, 使得 $f(x) \mid g(x)$ 且 $W_2 = I_{g(x^4)}$.

由推论 1 可知 $\mathbb{C}_{-1}$ -模 V_λ 的子模升链与 $\overline{\mathbb{C}[x]}$ 中的因子降链一一对应, 所以可得下列结论.

推论 2 $\mathbb{C}_{-1}$ -模 V_λ 是 Noether 模但非 Artin 模.

定理 4 若 W 是 V_λ 的任意非零子模, 则 $W \cong V_\lambda$.

证明 首先由定理 3 可知, 存在常数项为 1 的多项式 $f(x)$, 使得 $W = I_{f(x^4)}$. 于是可定义线性空间 W 到 V_λ 的同构映射 $\varphi_1: W \rightarrow V_\lambda$, 使得 $\varphi_1(x^j f(x^4)) = x^j$.

任给 $t_1^m t_2^n \in \mathbb{C}_{-1}$, $x^j f(x^4) \in W$, 由 (3.1) 可得

$$\begin{aligned}\varphi_1(t_1^m t_2^n \cdot x^j f(x^4)) &= \varphi_1(\psi_\lambda(m, n, j) x^{m+j} f(x^4)) = \psi_\lambda(m, n, j) x^{m+j}, \\ t_1^m t_2^n \cdot \varphi_1(x^j f(x^4)) &= t_1^m t_2^n \cdot x^j = \psi_\lambda(m, n, j) x^{m+j}.\end{aligned}$$

故

$$t_1^m t_2^n \cdot \varphi_1(x^j f(x^4)) = \varphi_1(t_1^m t_2^n \cdot x^j f(x^4)).$$

证毕. $\square$

定理 5 若 $I_{f(x^4)}$ 和 $I_{g(x^4)}$ 为 $\mathbb{C}_{-1}$ -模 V_λ 的任意两个 nonzero 子模, 则由它们的模同态所构成的线性空间 $\text{Hom}_{\mathbb{C}_{-1}}(I_{f(x^4)}, I_{g(x^4)})$ 与 $\mathbb{C}[x^{\pm 1}]$ 同构, 进而有 V_λ 的自同态环 $\text{End}_{\mathbb{C}_{-1}}(V_\lambda)$ 与 $\mathbb{C}[x^{\pm 1}]$ 同构.

证明 任给 $h(x) \in \mathbb{C}[x^{\pm 1}]$, 定义 $I_{f(x^4)}$ 到 $I_{g(x^4)}$ 的线性映射 $\Phi_{h(x)}$, 使得

$$\Phi_{h(x)}(x^j f(x^4)) = x^j h(x^4) g(x^4).$$

于是由 (3.1) 得

$$\begin{aligned}\Phi_{h(x)}(t_1^m t_2^n \cdot x^j f(x^4)) &= \Phi_{h(x)}(\psi_\lambda(m, n, j) x^{m+j} f(x^4)) = \psi_\lambda(m, n, j) x^{m+j} h(x^4) f(x^4), \\ t_1^m t_2^n \cdot \Phi_{h(x)}(x^j f(x^4)) &= t_1^m t_2^n \cdot x^j h(x^4) g(x^4) = \psi_\lambda(m, n, j) x^{m+j} h(x^4) f(x^4).\end{aligned}$$

故 $\Phi_{h(x)} \in \text{Hom}_{\mathbb{C}_{-1}}(I_{f(x^4)}, I_{g(x^4)})$. 于是可定义线性映射

$$\begin{aligned}\Phi: \mathbb{C}[x^{\pm 1}] &\rightarrow \text{Hom}_{\mathbb{C}_{-1}}(I_{f(x^4)}, I_{g(x^4)}) \\ h(x) &\mapsto \Phi_{h(x)}.\end{aligned}$$

易知 Φ 为单射. 下证 Φ 为满射.

任给 $\varphi \in \text{Hom}_{\mathbb{C}_{-1}}(I_{f(x^4)}, I_{g(x^4)})$, 则可记

$$\varphi(f(x^4)) = h_0(x^4)g(x^4) + xh_1(x^4)g(x^4) + x^2h_2(x^4)g(x^4) + x^3h_3(x^4)g(x^4),$$

其中 $h_0(x), h_1(x), h_2(x), h_3(x) \in \mathbb{C}[x^{\pm 1}]$. 由于

$$\begin{aligned}\varphi(t_2 \cdot f(x^4)) &= \varphi(2f(x^4)) = 2h_0(x^4)g(x^4) + 2xh_1(x^4)g(x^4) + 2x^2h_2(x^4)g(x^4) + 2x^3h_3(x^4)g(x^4), \\ t_2 \cdot \varphi(f(x^4)) &= 2h_0(x^4)g(x^4) - 2x^2h_2(x^4)g(x^4),\end{aligned}$$

且 $\varphi(t_2 \cdot f(x^4)) = t_2 \cdot \varphi(f(x^4))$, 故 $h_1(x^4) = h_2(x^4) = h_3(x^4) = 0$, 即

$$\varphi(f(x^4)) = h_0(x^4)g(x^4).$$

接着利用等式 $\varphi(t_1 \cdot f(x^4)) = t_1 \cdot \varphi(f(x^4))$ 和 $\varphi(t_1^{-1} \cdot f(x^4)) = t_1^{-1} \cdot \varphi(f(x^4))$, 结合数学归纳法可得任给 $j \in \mathbb{Z}$ 有 $\varphi(x^j f(x^4)) = x^j h_0(x^4)g(x^4)$, 于是 $\varphi = \Phi_{h_0(x)}$, 即 Φ 是满射. 综上所述, Φ 为线性空间的同构.

特别地, 取 $f(x) = g(x) = 1$, 则 $I_{f(x^4)} = I_{g(x^4)} = V_\lambda$, 故 Φ 给出了环 $\mathbb{C}[x^{\pm 1}]$ 到环 $\text{End}_{\mathbb{C}_{-1}}(V_\lambda)$ 的一个线性同构, 又根据定义易证 $\Phi_{h_1(x)}\Phi_{h_2(x)} = \Phi_{h_1(x)h_2(x)}$, 因此 Φ 是环同构. 证毕. $\square$

4 $\mathbb{C}_{-1}$ -模 V_λ 的商模

由 Laurent 多项式环的性质可知 $\dim V_\lambda/I_{f(x^4)}$ 等于多项式 $f(x^4)$ 的次数. 本节接着讨论 $\mathbb{C}_{-1}$ -模 V_λ 的商模及它们间的模同态.

定理 6 (1) 任给 $f(x) \in \overline{\mathbb{C}[x]}$, 则 W 为商模 $V_\lambda/I_{f(x^4)}$ 的子模的充分必要条件是存在 $g(x) \in \overline{\mathbb{C}[x]}$, 使得 $g(x) \mid f(x)$ 且 $W = I_{g(x^4)}/I_{f(x^4)}$.

(2) 任给 $f(x), g(x) \in \overline{\mathbb{C}[x]}$ 使得 $g(x) \mid f(x)$, 则 W 为商模 $I_{g(x^4)}/I_{f(x^4)}$ 的子模的充分必要条件是存在 $h(x) \in \overline{\mathbb{C}[x]}$, 使得 $g(x) \mid h(x)$, $h(x) \mid f(x)$ 且 $W = I_{h(x^4)}/I_{f(x^4)}$.

证明 (1) 只需在结论 (2) 中取 $g(x) = 1$ 即可得结论 (1).

(2) 充分性由推论 1 直接可得. 下证必要性.

考虑 $\mathbb{C}_{-1}$ 模的自然同态 $\pi: I_{g(x^4)} \rightarrow I_{g(x^4)}/I_{f(x^4)}$. 任给商模 $I_{g(x^4)}/I_{f(x^4)}$ 的子模 $\overline{W}$, 则有 $I_{f(x^4)} \subseteq \pi^{-1}(\overline{W}) := W$, 且 W 为 $I_{g(x^4)}$ 的子模, 所以根据推论 1 可知, 存在 $h(x) \in \overline{\mathbb{C}[x]}$, 使得 $W = I_{h(x^4)}$ 且 $g(x) \mid h(x)$, 又因为 $I_{f(x^4)} \subseteq I_{h(x^4)}$, 所以有 $h(x) \mid f(x)$ 且 $W = I_{h(x^4)}/I_{f(x^4)}$. 证毕. $\square$

由定理 6 直接可得下述结论.

推论 3 (1) 任给 $f(x) \in \overline{\mathbb{C}[x]}$, 则商模 $V/I_{f(x^4)}$ 不可约的充分必要条件是 $f(x)$ 为不可约多项式, 即存在非零复数 a 使得 $f(x) = 1 + ax$.

(2) 若 $f(x), g(x) \in \overline{\mathbb{C}[x]}$ 满足 $g(x) \mid f(x)$, 则商模 $I_{g(x^4)}/I_{f(x^4)}$ 不可约的充分必要条件为存在非零复数 a 使得 $\frac{f(x)}{g(x)} = 1 + ax$.

此外, 根据一元 Laurent 多项式环的性质及本文模的定义还可得到下面结论.

定理 7 (1) 若 $f(x) \in \overline{\mathbb{C}[x]}$ 的标准分解式为 $f(x) = p_1^{n_1}(x)p_2^{n_2}(x) \cdots p_s^{n_s}(x)$, 其中 $s, n_j \in \mathbb{N}, p_j(x) = 1 + a_jx, a_j, j = 1, 2, \dots, s$ 为两两不同的非零复数, 则有

$$V_\lambda/I_{f(x^4)} \cong \bigoplus_{j=1}^s V_\lambda/I_{p_j^{n_j}(x^4)};$$

(2) 若 $p(x) = 1 + ax, 0 \neq a \in \mathbb{C}$, 则 $V/I_{p^n(x^4)}$ 是不可分解 $\mathbb{C}_{-1}$ -模.

定理 8 设 $\overline{V}_1 = V_\lambda/I_{f(x^4)}$ 和 $\overline{V}_2 = V_\lambda/I_{g(x^4)}$ 为 $\mathbb{C}_{-1}$ -模 V_λ 的任意两个商模, 则线性空间 $\text{Hom}_{\mathbb{C}_{-1}}(\overline{V}_1, \overline{V}_2)$ 同构于 $I_{\tilde{g}(x)}/I_{g(x)}$, 其中 $\tilde{g}(x) = \frac{g(x)}{(f(x), g(x))}$. 环 $\text{End}_{\mathbb{C}_{-1}}(\overline{V}_1)$ 同构于环 $\mathbb{C}[x^{\pm 1}]/I_{f(x)}$.

证明 记 $(f(x), g(x)) = h(x)$, 则存在 $\tilde{f}(x) \in \mathbb{C}[x]$, 使得 $f(x) = h(x)\tilde{f}(x)$. 因为 $\tilde{g}(x) = \frac{g(x)}{(f(x), g(x))}$, 所以 $g(x) = h(x)\tilde{g}(x)$ 且 $(\tilde{f}(x), \tilde{g}(x)) = 1$.

任给 $p(x) \in I_{\tilde{g}(x)}$, 则存在 $\tilde{p}(x) \in \mathbb{C}[x^{\pm 1}]$, 使得 $p(x) = \tilde{p}(x)\tilde{g}(x)$. 任意选取 $r(x) \in V_\lambda = \mathbb{C}[x^{\pm 1}]$, 满足 $f(x^4) \mid r(x)$, 则存在 $\tilde{r}(x) \in \mathbb{C}[x^{\pm 1}]$, 使得 $r(x) = f(x^4)\tilde{r}(x)$, 故

$$p(x^4)r(x) = \tilde{p}(x^4)\tilde{g}(x^4)f(x^4)\tilde{r}(x) = \tilde{p}(x^4)\tilde{g}(x^4)h(x^4)\tilde{f}(x^4)\tilde{r}(x),$$

于是 $g(x^4) \mid p(x)r(x)$. 因此

$$\begin{aligned} \Phi_{p(x)}: \overline{V}_1 &\rightarrow \overline{V}_2 \\ r(x) + I_{f(x^4)} &\mapsto p(x^4)r(x) + I_{g(x^4)}, \end{aligned}$$

给出了 $\overline{V}_1$ 到 $\overline{V}_2$ 的一个线性映射. 又由 (3.1) 可得

$$\Phi_{p(x)}(t_1^m t_2^n \cdot (x^j + I_{f(x^4)})) = \Phi_{p(x)}(\psi_\lambda(m, n, j)x^{m+j} + I_{f(x^4)})$$

$$\begin{aligned}
&= \psi_\lambda(m, n, j)p(x^4)x^{m+j} + I_{g(x^4)}, \\
t_1^m t_2^n \cdot \Phi_{p(x)}(x^j + I_{f(x^4)}) &= t_1^m t_2^n \cdot (p(x^4)x^j + I_{g(x^4)}) \\
&= \psi_\lambda(m, n, j)p(x^4)x^{m+j} + I_{g(x^4)},
\end{aligned}$$

故 $\Phi_{p(x)} \in \text{Hom}_{\mathbb{C}_{-1}}(\overline{V_1}, \overline{V_2})$, 于是可定义线性映射

$$\begin{aligned}
\Phi: I_{\tilde{g}(x)} &\rightarrow \text{Hom}_{\mathbb{C}_{-1}}(\overline{V_1}, \overline{V_2}) \\
p(x) &\mapsto \Phi_{p(x)}.
\end{aligned}$$

下证 Φ 为满射. 任给 $\varphi \in \text{Hom}_{\mathbb{C}_{-1}}(\overline{V_1}, \overline{V_2})$, 则存在 $h_0(x), h_1(x), h_2(x), h_3(x) \in \mathbb{C}[x^{\pm 1}]$, 使得

$$\varphi(1 + I_{f(x^4)}) = h_0(x^4) + xh_1(x^4) + x^2h_2(x^4) + x^3h_3(x^4) + I_{g(x^4)},$$

与定理 5 的证明方法类似, 可推出 $h_1(x) = h_2(x) = h_3(x) = 0$ 和

$$\varphi(x^j + I_{f(x^4)}) = x^j h_0(x^4) + I_{g(x^4)}.$$

于是

$$0 = \varphi(f(x^4) + I_{f(x^4)}) = f(x^4)h_0(x^4) + I_{g(x^4)},$$

故 $g(x^4) | f(x^4)h_0(x^4)$, 即 $h(x)\tilde{g}(x) | h(x)\tilde{f}(x)h_0(x)$. 因此 $\tilde{g}(x) | h_0(x)$, 故 $h_0(x) \in I_{\tilde{g}(x)}$. 进而可得到 $\varphi = \Phi_{h_0(x)}$, 故 Φ 为满射.

又由 Φ 的定义容易验证 $\ker \Phi = I_{g(x)}$, 所以 $\text{Hom}_{\mathbb{C}_{-1}}(\overline{V_1}, \overline{V_2}) \cong I_{\tilde{g}(x)}/I_{g(x)}$.

与定理 5 的证明方法类似可得环 $\text{End}_{\mathbb{C}_{-1}}(\overline{V_1})$ 同构于环 $\mathbb{C}[x^{\pm 1}]/I_{f(x)}$. 证毕. $\square$

推论 4 当 $a \neq b$ 时, $\mathbb{C}_{-1}$ -模 V_λ 的商模 V_λ/I_{ax^4+1} 与 V_λ/I_{bx^4+1} 不同构.

证明 当 $a \neq b$ 时, 则 $(ax^4 + 1, bx^4 + 1) = 1$, 根据定理 8 可知

$$\text{Hom}_{\mathbb{C}_{-1}}(V_\lambda/I_{ax^4+1}, V_\lambda/I_{bx^4+1}) = 0,$$

所以 V_λ/I_{ax^4+1} 与 V_λ/I_{bx^4+1} 不同构. 证毕. $\square$

定理 9 $\mathbb{C}_{-1}$ -模 $V_\lambda/I_{f(x^4)}$ 与 $I_{g(x^4)}/I_{f(x^4)g(x^4)}$ 同构.

证明 定义线性映射 $\tau: I_{g(x^4)} \rightarrow V_\lambda/I_{f(x^4)}$, 使得 $\tau(x^j g(x^4)) = x^j + I_{f(x^4)}$. 显然 τ 是一个满映射. 此外, 任给 $j \in \mathbb{Z}, t_1^m t_2^n \in \mathbb{C}_{-1}$, 都有

$$\tau(t_1^m t_2^n \cdot x^j g(x^4)) = \psi_\lambda(m, n, j)x^{m+j} + I_{f(x^4)} = t_1^m t_2^n \cdot \tau(x^j g(x^4)),$$

所以 τ 是 $\mathbb{C}_{-1}$ -模满同态. 易知 $\ker \tau = I_{f(x^4)g(x^4)}$, 所以 $\mathbb{C}_{-1}$ -模 $V_\lambda/I_{f(x^4)}$ 与 $I_{g(x^4)}/I_{f(x^4)g(x^4)}$ 同构. 证毕. $\square$

由定理 8 和 9 可以推出下述结论.

定理 10 若 $f(x), f_1(x), g(x), g_1(x) \in \overline{\mathbb{C}[x]}$, $\overline{V_1} = I_{f_1(x^4)}/I_{f(x^4)f_1(x^4)}$ 和 $\overline{V_2} = I_{g_1(x^4)}/I_{g(x^4)g_1(x^4)}$ 为 $\mathbb{C}_{-1}$ -模 V_λ 的商模, 则有

- (1) 线性空间 $\text{Hom}_{\mathbb{C}_{-1}}(\overline{V_1}, \overline{V_2})$ 同构于 $I_{\tilde{g}(x)}/I_{g(x)}$, 其中 $\tilde{g}(x) = \frac{g(x)}{(f(x), g(x))}$;
- (2) 环 $\text{End}_{\mathbb{C}_{-1}}(\overline{V_1})$ 同构于环 $\mathbb{C}[x^{\pm 1}]/I_{f(x)}$.

5 $\mathbb{C}_{-1}$ -模 V_λ 与 A_1 型 loop 代数的忠实表示

记与 $\mathbb{C}_{-1}$ -模 V_λ 对应的表示为

$$\begin{aligned}\bar{\rho}_\lambda : \mathbb{C}_{-1} &\rightarrow gl(\mathbb{C}[x^{\pm 1}]) \\ g &\mapsto \rho_\lambda(g, -).\end{aligned}$$

本节将研究 $\bar{\rho}_\lambda$ 的忠实性, 为此先给出关于 $\mathbb{C}_{-1}$ 结构的一些简单结论. 记

$$\begin{aligned}\mathcal{A} &= \text{span}\{t_1^m t_2^{j+2k} - t_1^m t_2^j \mid m, j, k \in \mathbb{Z}\}, \\ \mathcal{B} &= \text{span}\{t_1^{4m+2} t_2^{2k} \mid m, k \in \mathbb{Z}\}, \\ \mathcal{C} &= \text{span}\{t_1^{2k} t_2^{2j} \mid j, k \in \mathbb{Z}\},\end{aligned}$$

则 $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ 和 $\mathcal{C}$ 都是 $\mathbb{C}_{-1}$ 的理想. 分别将 $\mathbb{C}_{-1}/\mathcal{A}$ 中元素 $t_1^m t_2^0 + \mathcal{A}, t_1^m t_2^1 + \mathcal{A}$ 简记为 $t_1^m t_2^{\bar{0}}$ 和 $t_1^m t_2^{\bar{1}}$, 其中 $\bar{0}, \bar{1} \in \mathbb{Z}_2$, 则

$$\mathbb{C}_{-1}/\mathcal{A} = \left(\bigoplus_{m \in \mathbb{Z}} \mathbb{C} t_1^m t_2^{\bar{0}} \right) \oplus \left(\bigoplus_{m \in \mathbb{Z}} \mathbb{C} t_1^m t_2^{\bar{1}} \right).$$

关于 Lie 代数 $\mathbb{C}_{-1}/\mathcal{A}$ 的结构, 文献 [22] 证明了下述结论.

引理 2 [22, 引理 2.4] Lie 代数 $\mathbb{C}_{-1}/\mathcal{A}$ 可以分解为 $\mathcal{A} = \text{span}\{t_1^{2m} t_2^{\bar{0}} \mid m \in \mathbb{Z}\}$ 和 $\mathcal{B} = \text{span}\{t_1^m t_2^{\bar{1}}, t_1^{2m+1} t_2^{\bar{0}} \mid m \in \mathbb{Z}\}$ 的直和, 其中 $\mathcal{A}$ 是 Abel Lie 代数, $\mathcal{B} \cong sl_2(\mathbb{C}[x^{\pm 1}])$.

定理 11 (1) 当 $\lambda \neq 0$ 时, $\ker \bar{\rho}_\lambda = \mathcal{A} + \mathcal{B}$;

(2) 当 $\lambda = 0$ 时, $\ker \bar{\rho}_0 = \mathcal{A} + \mathcal{C}$.

证明 (1) 根据 (3.3) 和表 1 可得, 对于任给的 $m, j, k, r \in \mathbb{Z}$, 都有

$$(t_1^m t_2^{j+2k} - t_1^m t_2^j) \cdot x^r = 0, \quad t_1^{4m+2} t_2^{2k} \cdot x^r = 0,$$

所以 $\mathcal{A} + \mathcal{B} \subseteq \ker \bar{\rho}_\lambda$.

下证 $\ker \bar{\rho}_\lambda \subseteq \mathcal{A} + \mathcal{B}$. 因为 V_λ 是 $\mathbb{Z}$ -阶化模, 所以

$$\ker \bar{\rho}_\lambda = \bigoplus_{m \in \mathbb{Z}} \ker \bar{\rho}_\lambda \cap L_m.$$

任给 $g \in \ker \bar{\rho}_\lambda \cap L_m$, 则存在 $a, b \in \mathbb{C}$ 和 $g_1 \in \mathcal{A}$, 使得 $g = at_1^m + bt_1^m t_2 + g_1$. 于是对任意 $r \in \mathbb{Z}$, 都有 $0 = g \cdot x^r = (at_1^m + bt_1^m t_2) \cdot x^r$.

情形 1 当 $m = 4h$ 时, 由模的定义可得

$$\begin{aligned}0 &= (at_1^m + bt_1^m t_2) \cdot x = a\lambda(-1)^h x^{1+m}, \\ 0 &= (at_1^m + bt_1^m t_2) \cdot 1 = a\lambda(-1)^h x^m + 2b(-1)^h x^m,\end{aligned}$$

可得 $a = b = 0$, 故 $g \in \mathcal{A}$.

情形 2 当 $m = 4h + 1$ 或 $m = 4h + 3$ 时, 由

$$0 = (at_1^m + bt_1^m t_2) \cdot 1, \quad 0 = (at_1^m + bt_1^m t_2) \cdot x^2,$$

可得 $a = b = 0$, 故 $g \in \mathcal{A}$.

情形 3 当 $m = 4h + 2$ 时, $at_1^m \in \mathcal{B}$, 于是有 $0 = (at_1^m + bt_1^m t_2) \cdot x = 2b(-1)^h x^{1+m}$, 故 $b = 0$, 因此 $g \in \mathcal{A} + \mathcal{B}$.

综上所述, $\ker \bar{\rho}_\lambda = \mathcal{A} + \mathcal{B}$.

(2) 与结论 (1) 同理可证. 证毕. □

注 由引理 2 和定理 11 结合 $\mathbb{C}_{-1}$ 的结构性质可知

(1) 当 $\lambda \neq 0$ 时, $\mathbb{C}_{-1}/\ker \bar{\rho}_\lambda = (\bigoplus_{m \in \mathbb{Z}} \mathbb{C} t_1^{4m} t_2^0) \oplus \mathcal{B} \cong (\bigoplus_{m \in \mathbb{Z}} \mathbb{C} t_1^{4m} t_2^0) \oplus sl_2(\mathbb{C}[x^{\pm 1}]);$

(2) 当 $\lambda = 0$ 时, $\mathbb{C}_{-1}/\ker \bar{\rho}_0 = \mathcal{B} \cong sl_2(\mathbb{C}[x^{\pm 1}]).$

因此, 表示 $\bar{\rho}_\lambda$ 诱导出 A_1 型 loop Lie 代数 $sl_2(\mathbb{C}[x^{\pm 1}])$ 的一个忠实表示.

参考文献

- 1 Allison B N, Azam S, Berman S, et al. Extended affine Lie algebras and their root systems. *Mem Amer Mathe Soc*, 1997, 126: 1–122
- 2 Kirkman E, Procesi C, Small L. A q -analog for the Virasoro algebra. *Comm Algebra*, 1994, 22: 3755–3774
- 3 Zhao K. The q -Virasoro-like algebra. *J Algebra*, 1997, 188: 506–512
- 4 Jiang C, Meng D. The derivation algebra of the associative algebra $\mathbb{C}_q[X, Y, X^{-1}, Y^{-1}]$. *Comm Algebra*, 1998, 26: 1723–1736
- 5 Jiang C, Meng D. The automorphism group of the Derivation algebra the Virasoro-like algebra. *Adv Math (China)*, 1998, 27: 175–183
- 6 McConnell J, Pettit J. Crossed products and multiplicative analogues of Weyl algebra. *J London Math Soc*, 1988, 38: 47–55
- 7 Zhao K, Zhang H. Representations of the Virasoro-like algebra and its q -analog. *Comm Algebra*, 1996, 24: 4361–4372
- 8 Su Y. Classification of Harish-Chandra modules over the higher rank Virasoro algebras. *Comm Math Phys*, 2003, 240: 539–551
- 9 Chen Y, Xue M, Lin W, et al. The isomorphism and the automorphism group of a class of derivation Lie algebra over the quantum torus. *Chinese Ann Math Ser A*, 2005, 26: 755–764
- 10 Lin W, Tan S. Nonzero level Harish-Chandra modules over the q -analog of the Virasoro-like algebra. *J Algebra*, 2006, 297: 254–272
- 11 Lin W, Tan S. Nonzero level Harish-Chandra modules over the Virasoro-like algebra. *J Pure Appl Algebra*, 2006, 204: 90–105
- 12 Zhao K. Representations of the q -analog of the Virasoro algebra. *Northeast Math J*, 1997, 13: 197–204
- 13 Lin W, Tan S. Graded modules over the q -analog Virasoro-like algebra. *J Algebras Represent Theory*, 2008, 11: 505–517
- 14 Berman S, Gao Y, Krylyuk Y. Quantum tori and the structure of elliptic quasi-simple Lie algebras. *J Funct Anal*, 1996, 135: 339–389
- 15 Gao Y. Representations of extended affine Lie algebras coordinatized by certain quantum tori. *Compos Math*, 2000, 123: 1–25
- 16 Lin W, Tan S. Central extensions and derivations of Lie algebras of skew Derivations for the quantum torus. *Comm Algebra*, 2005, 33: 3919–3938
- 17 Eswara Rao S, Zhao K. Highest weight irreducible representations of rank 2 quantum tori. *Math Res Lett*, 2004, 11: 615–628
- 18 Su Y, Zhu L. Derivation algebras of centerless perfect Lie algebras are complete. *J Algebra*, 2005, 285: 508–515
- 19 Su Y, Zhao K. Isomorphism classes and automorphism groups of algebras of Weyl type. *Sci China Ser A*, 2002, 45: 953–963
- 20 Lin W, Tan S. Representations of the Lie algebra of derivations for quantum torus. *J Algebra*, 2004, 275: 250–274
- 21 Lin W, Tan S. The representations of the skew derivation Lie algebras over the quantum torus. *Adv Math (China)*, 2005, 34: 477–487
- 22 Lin W, Su Y. Modules for the core of extended affine Lie algebras for type A_1 with coordinates in rank 2 quantum tori. *Pacific J Math*, 2009, 242: 143–166

A class of Noether modules for quantum torus $\mathbb{C}_{-1}$

LIN ZhiPing & LIN WeiQiang

Abstract Let $\mathbb{C}_{-1}$ be the quantum torus lie algebra $\mathbb{C}_q$ with $q = -1$. Using the Laurent polynomial ring $\mathbb{C}[x^{\pm 1}]$ as representation space, we construct a class of modules which are Noether modules but not Artin modules. Then we determine all of their submodules and quotient modules and all the homomorphisms between these modules. Finally, we show the relationship between these modules and the faithful representations of the type A_1 loop algebra.

Keywords quantum torus, Noether module, Artin module, modules of the intermediate series, Laurent polynomial ring

MSC(2010) 17B10

doi: 10.1360/012012-131