

基于约束螺旋理论的机构自由度分析的普遍方法

黄真*, 刘靖芳, 曾达幸

燕山大学机器人研究中心, 秦皇岛 066004

* E-mail: huangz@ysu.edu.cn

收稿日期: 2007-08-06; 接受日期: 2008-02-19

国家自然科学基金资助项目(批准号: 50875227)

摘要 系统总结和陈述了基于约束螺旋理论的机构自由度分析的原理和方法, 并进一步用典型的 6 个疑难机构的自由度为例介绍这一方法的应用. 从这些例子可以看出, 这个方法简单有效, 相对别的方法更具有一般性. 此外, 这个方法对自由度瞬时性和连续性的判定也非常方便. 相对而言, 它成为当今有效分析自由度的一般方法, 具有重要的科学价值和实用意义.

关键词

自由度分析
冗余约束
并联机构

在机械工程学领域里, 对机构最基本的认识之一就是要知道它的自由度. 在 IFToMM 术语中, 自由度被定义为“确定机构或运动链位形的独立参数的数目”.

传统的自由度公式就是 Grübler-Kutzbach 公式 (G-K 公式)^[1,2], 人们用这个公式解出了许多平面和空间机构的自由度, 而且它仅仅基于算术运算. 然而 150 多年来人们发现这个公式不适合很多机构. 例如, Suh 和 Radcliffe^[3]在他们的书里写道: “在某些例子中, 用 G-K 公式得出的结果会误导人们”.

近年来, 并联机构吸引了人们广泛的兴趣. Hunt^[4]首先提出了一种 3 自由度 3-RPS 机构, 接着许多新的并联机构被相继提出^[5-15], 但是, 传统的自由度公式不能正确解决大部分并联机构的自由度, 人们不得不用个别的方法而不是用一般公式来计算它们的自由度, 甚至将机构模型建立之后才发现不是要求的自由度. 这样, 问题变得非常突出, 而且严重阻碍了当今并联机构的创新.

150 多年来很多学者在自由度研究方面做出了重要的贡献, 其中包括 19 世纪的 Chebychev^[16], Grübler^[1], 20 世纪的 Dobrovolski^[17], Kutzbach^[2], Hunt 和 Phillips^[18], Waldron^[19], Bagic^[20], Freudenstein 和 Alizade^[21], Hervé^[22],

Baker^[23], Davies^[24], Agrawal 和 Rao^[25], Angeles 和 Gosselin^[26], Tsai^[27], McCarthy^[28]等. 然而, 2005 年 Gogu^[29]系统地分析了这些人的贡献并指出: “我们注意到所有这些快速计算自由度的公式并不适合许多古典机构……和现代并联机构.” 他列举出这些机构, 比如 Bennett, Sarrus, Bricard, Myard, Goldberg, Altman, Baker, Waldron, Delta, Star, H4, Orthoglide, CPM 等.

Gogu 还认为, “我们不能继续认为不符合自由度公式的这些机构本身有着结构缺陷, 只能认为这些自由度公式有缺陷还不完善而且应当检查这些公式”. 一个自由度公式的真正意义和价值在于它能够作为一个普遍适用的公式来分析各种机构, 特别是“反常机构”的自由度. 这些“反常机构”包括古典机构和现代并联机构, 特别是 2000 年 Merlet^[30]指出的 3 个典型机构. Merlet 写道: “最著名的 3 个反例是 Cardan 铰链, Bennett 和 Goldberg 机构. 为了充分考虑几何条件, 人们想出了很多方法, 例如 Angele 和 Hervé 的方法, 但它们不具有普遍性”.

1997 年在文献^[31]中采用“公共约束螺旋”来定义机构的“阶”(公共约束螺旋本身为机构运动螺旋系的反螺旋); 2002 年, 文献^[32]提出了“修正的 Grübler-

Kutzbach公式”的概念; 2003 年, 文献[33]定义了“并联冗余约束”: 只有当 2 个以上的分支连接上下平台时, 才有可能产生这种“并联冗余约束”, 对修正的 G-K公式做了进一步的补充和完善. 这些概念和公式的提出, 为“基于约束螺旋理论求解自由度的基本原理”的形成奠定了基础. 用修正的Grübler-Kutzbach公式已经成功解决了许多疑难机构的自由度. 有代表性的是 Bennett, Delta, CPM^[34], Goldberg机构^[35]等. 特别是 Bennett 机构, 至今还没有别人能用他们的一般公式求解.

新世纪以来, 许多新的自由度的方法还不断地被提出. 如 2003 年 Rico 等人^[36,37]采用现代数学李群和李代数来分析, 取得较好的成绩; 2005 年 Kong 和 Gosselin^[38]提出一种方法也是基于螺旋理论; 2005 年 Gogu^[39]还建议采用线性变换的方法; Shukla 和 Whitney^[40]也提出了一种新方法. 这些方法是否真正有效还要在实践中检验.

“在现有的认知水平下, 一种理论越能解释或预测更多的事情, 它就越应该被认为是合理的”.

经过多年的努力, 应用修正的 G-K 公式已经成功地分析了 Gogu 提到的所有现代并列机构以及 Merlet 指出的 3 大著名反例的自由度, 从而有效地说明了该方法正确、简单, 更具有一般性. 并且在这个发展过程中总结形成了一套分析机构自由度的系统方法, 包括 1 个公式和 4 项关键技术. 事实证明这套方法是目前相对有效的机构自由度分析的通用方法而且易于掌握. 本文系统介绍这个机构自由度通用原理和方法.

1 螺旋理论基础及自由度分析原理

因为修正的 Grübler-Kutzbach 公式是基于约束螺旋理论提出的, 所以有必要对螺旋理论进行简要的描述^[41,42].

1.1 螺旋的基本概念及相关性

如图 1 所示, 空间一条直线可以由方向矢量 $\mathbf{S}$ 和位置相关矢量 $\mathbf{S}_0$ 来共同表示. 直线也叫做线矢或节距为零的螺旋, 表达式为

$$\mathbf{\$} = (\mathbf{S}; \mathbf{S}_0) = (\mathbf{S}; \mathbf{r} \times \mathbf{S}) = (l \ m \ n; p \ q \ r), \quad (1)$$

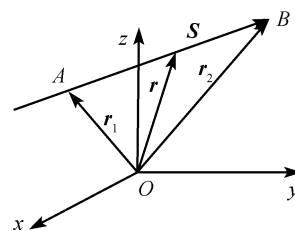


图 1 直线

当 $\mathbf{S} \cdot \mathbf{S} = 1$ 时, $\mathbf{\$}$ 为单位线矢量; 当 $\mathbf{S}_0 = 0$ 时, 直线经过原点. $(\mathbf{S}; \mathbf{S}_0)$ 也叫做直线的 Plücker 坐标, 共有 6 个分量.

在一般情况下, 节距不为零, 用 $h = \mathbf{S} \cdot \mathbf{S}_0 / (\mathbf{S} \cdot \mathbf{S})$ 来表示 1 个螺旋的节距, 而 $\mathbf{S}_0 = \mathbf{r} \times \mathbf{S} + h\mathbf{S}$. 其中节距为零时就是线矢, 可以用来表示 1 个转动副或者是 1 个约束力; 具有无穷大节距的螺旋表示为 $\mathbf{\$} = (0; \mathbf{S})$, $\mathbf{S}$ 是方向矢量, 这个螺旋可以表示 1 个移动副或约束力偶.

由于 1 个机构中转动副、移动副总是同时存在, 而且它们可以分别用线矢和偶量来表示, 因此总结一些不同几何条件下线矢和偶量的相关性是非常有用的. 考虑到用 Grassmann 线几何原理也可以判断直线的相关性^[43]. 表 1 给出了线矢和偶量组成的螺旋系在不同几何条件下的秩. 最后 2 行描述了线矢和偶量的关系.

1.2 两螺旋的互逆性

对于 2 个螺旋 $\mathbf{\$} = (\mathbf{S}; \mathbf{S}_0)$ 和 $\mathbf{\$}^r = (\mathbf{S}^r; \mathbf{S}_0^r)$, 它们的互易积记为^[44]

$$\mathbf{\$} \circ \mathbf{\$}^r = \mathbf{S} \cdot \mathbf{S}_0^r + \mathbf{S}^r \cdot \mathbf{S}_0, \quad (2)$$

运动螺旋和力螺旋的互易积正是这两螺旋产生的瞬时功率. “ $\circ$ ”是互易积的符号.

若两螺旋的互易积为零, 则它们互逆或互为反螺旋

$$\mathbf{\$} \circ \mathbf{\$}^r = 0. \quad (3)$$

对于 1 个运动螺旋 $\mathbf{\$}$ 的反螺旋 $\mathbf{\r , 如果它的节距为零, 则代表 1 个约束力, 限制了沿约束力方向的移动; 如果它的节距为无穷大, 则代表 1 个约束力偶, 限制了绕此力偶方向的转动.

表 1 线矢和偶量组成的螺旋系在不同几何条件下的秩

几何条件		秩	
几何特点	图示	线矢	偶量
共轴		1	1
共面平行		2	1
平面汇交		2	2
空间平行		3	1
共面不汇交		3	2
空间汇交		3	3
位于同一单叶双曲面上不相交		3	3
一般性空间不汇交		6	3
两条互相平行的直线和与它们垂直的偶量		2	
三个共面的线矢及垂直于此平面的偶量		3	

两螺旋互易积为零的解析式还可以表示为^[41]

$$(h_1 + h_2)\cos\alpha_{12} - a_{12}\sin\alpha_{12} = 0, \quad (4)$$

式中, h_1, h_2 分别是两螺旋的节距, α_{12} 是两螺旋的夹角, a_{12} 是公垂线长。

从(3)和(4)式可以得出两螺旋互逆的条件, 如表2所示。

表 2 两螺旋互逆的条件

数目	互逆条件
1	两线矢相逆的充要条件是它们共面
2	两个偶量必相逆
3	线矢和偶量仅当垂直才相逆
4	任何垂直相交的两旋量必相逆
5	线矢和偶量皆自逆

分析自由度时, 一般需要根据(3)式求出反螺旋系。但有时用表2给出的结论会更加方便。表2是(3)式的推论。值得注意的是表1和2不仅对于自由度分析很有用, 而且对奇异分析和多自由度机构的输入选择也很有帮助。

此外, 螺旋的相逆性和线性相关性与坐标系的选取无关, 在文献^[42]中曾有过证明。这个原理在自由度分析中十分有用。

1.3 修正的 G-K 公式及自由度分析的 4 项关键技术

修正的 Grübler-Kutzbach 公式表达为

$$M = d(n - g - 1) + \sum_{i=1}^g f_i + v, \quad (5)$$

这里, M 表示机构的自由度; n 表示包括机架的构件数目; g 表示运动副的数目; f_i 表示第 i 个运动副的自由度; d 表示机构的阶, 也称为公共约束因子; v 表示并联冗余约束数。其中,

$$d = 6 - \lambda, \quad (6)$$

(6)式表示机构的阶, λ 为机构的公共约束数。

1.3.1 确定公共约束和并联冗余约束

1) 单环机构

机构的 1 个公共约束就是这个机构所有运动螺旋的反螺旋, 机构的所有公共约束数为

$$\lambda = \text{rank}(\hat{S}^r) = \text{rank}\{\$^r \mid \$^r \circ \$ = 0, \$ \in \hat{S}\}, \quad (7)$$

这里, $\hat{S}$ 指机构的运动螺旋系。对于单环机构, $v=0$ 。

2) 多环并联机构

对于多环并联机构, 当且仅当每个分支都能提供 1 个相同的约束螺旋作用到运动平台时, 这个约束螺旋就是 1 个公共约束。如果这些约束螺旋都是约束力, 它们应该共轴; 如果它们是约束力偶, 则应具有相同的方向。

1 个分支所有的运动螺旋构成 1 个分支螺旋系, 此分支螺旋系的所有反螺旋构成了 1 个分支约束螺旋系。1 个并联机构的约束螺旋系包括所有分支约束螺旋系中的螺旋。当作用于动平台的除公共约束之外的其它 l 个约束形成 k 系螺旋时, $k \leq l$, 则存在的冗余约束数为 $l-k$ 。可以用下列公式计算机构的 v

$$v = \sum_{i=1}^p q_i - \lambda \cdot p - k, \quad (8)$$

这里, p 表示机构的分支数目, q_i 是第 i 分支约束螺旋的数目。

1.3.2 局部坐标系的选取。 为了应用螺旋理论求得运动螺旋系的反螺旋, 需要建立运动螺旋的 Plücker 坐标。选取合适的坐标系使描绘螺旋的 Plücker 坐标简单, 这成为自由度分析的关键, 也是基于约束螺旋方法的核心所在。因为空间机构的关节又多又呈空

间分布, 坐标系选择不当将无法得出结果, 导致分析失败. 选取合适的坐标系会大大简化自由度分析, 常常能用观察法直接得出结果.

作者曾经证明过螺旋的相逆和线性相关与坐标系的选择无关^[42], 基于此原理选择适当坐标系分析约束反螺旋就成为可能.

对于分支结构各不相同的非对称的并联机构, 对不同的分支应当分别建立各自适用的坐标系. 还特别注意应该寻求最便捷的分支坐标系, 使得螺旋表达式的 6 个元素有尽可能多的 0 和 1. 这样, 就能非常方便地进一步得到对应的反螺旋. 由于各个分支不同, 就要逐个分析求得各分支的反螺旋. 这些反螺旋都作用在动平台上. 注意, 这里得到的各个反螺旋表达式是建立在不同的坐标系上的. 为讨论这些反螺旋对动平台的作用, 必须有相同的坐标框架. 然而, 这里不能企图通过一般的数学上的变化坐标系来得到, 这是行不通的. 而是要通过概念上的逻辑推理, 这一点特别关键. 后面的例子有助于我们更好的领会这一点.

对于对称的并联机构, 在分析了第 1 个分支之后, 其它分支以及动平台的约束螺旋系可以直接通过观察和简单的逻辑推理而得到.

1.3.3 判定瞬时或连续自由度. 因为修正的 G-K 公式是基于约束螺旋理论提出来的, 具有瞬时性. 因此, 在应用修正的 G-K 公式计算完自由度后, 还应当进一步检验自由度的连续性. 这可以按照机构具有的自由度数目的性质给定机构一定大小的有限运动, 再检查加于动平台上的约束有没有发生变化, 来判断机构的自由度是否发生变化. 实际上, 从我们过去的文章以及本文的例子都可以说明这一过程并不困难.

1.3.4 分支闭环处理. 有一些并联机构的分支中含有闭环运动链. 例如著名的 Delta 机构的 3 个分支中都含有由 4 个球副构成的 4S 闭环. 闭环的出现进一步给机构的自由度分析造成困难. 当机构的某一分支含有 1 个闭环机构时, 可以将这个闭环机构看作 1 个广义运动副, 并以此闭环机构的自由度作为广义运动副的自由度.

当然广义运动副的自由度可以是 1, 也可以大于 1. 用相应自由度数目的单自由度运动副组成的开链

来等效代替广义运动副, 然后再用修正的 G-K 公式计算此机构的自由度. 实际上, 分支中任何复杂的封闭运动链都可以看作是广义运动副.

这 4 项关键技术是自由度分析方法的重要部分, 有益于正确应用修正的 G-K 公式而且也易于掌握.

对于含局部自由度的机构, 只需将上述结果减去局部自由度数就得到机构的名义自由度. 下面将通过 6 个典型机构的自由度分析, 来帮助理解这一系统方法的应用.

2 一些典型机构的自由度分析

2.1 3-CRR 机构

图 2 所示为 3-CRR 机构, 是由 Kong 和 Gosselin^[45]提出的. 此机构由 3 个 CRR 分支构成, 每个分支都包括 1 个圆柱副和 2 个转动副, 这 3 个运动副的轴线互相平行. 此外基础平台上的 3 个圆柱副的轴线互相垂直. 坐标系如图 2 所示, x, y, z 轴分别沿 3 个圆柱副的轴线.

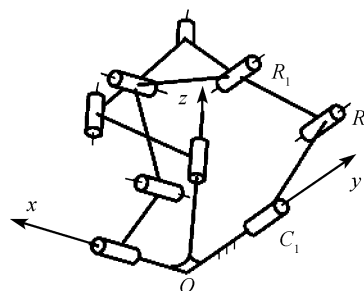


图 2 3-CRR 机构

首先来分析第 1 个分支. 因为圆柱副具有 2 个自由度, 它可以看作 1 个转动副和 1 个移动副的合成. 那么这个分支就包含 4 个单自由度的运动副. 这个分支的运动螺旋系可以表示为

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_1^1 &= (0 \ 0 \ 0; \ 0 \ 1 \ 0), \\ \mathcal{S}_2^1 &= (0 \ 1 \ 0; \ 0 \ 0 \ 0), \\ \mathcal{S}_3^1 &= (0 \ 1 \ 0; \ d_3 \ 0 \ f_3), \\ \mathcal{S}_4^1 &= (0 \ 1 \ 0; \ d_4 \ 0 \ f_4), \end{aligned} \quad (9)$$

这个螺旋系中的 4 个螺旋线性无关, 有 2 个反螺旋. 这样第 1 个分支的约束螺旋系为

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_{11}^r &= (0 \ 0 \ 0; \ 1 \ 0 \ 0), \\ \mathcal{S}_{12}^r &= (0 \ 0 \ 0; \ 0 \ 0 \ 1), \end{aligned} \quad (10)$$

此约束螺旋系包括 2 个约束力偶, 分别限制了绕垂直圆柱副轴线的 2 个方向的转动。

对于整个 3-CRR 机构, 因为每个分支提供 2 个约束力偶, 方向沿各个分支圆柱副轴线的 2 个垂直方向。因此共有 6 个约束力偶作用于动平台上, 但没有公共约束, $\lambda=0$ 。由(8)式可以算出存在 3 个并联冗余约束, $\nu=3$ 。用修正的 G-K 公式求得机构的自由度为

$$M = d(n-g-1) + \sum_{i=1}^g f_i + \nu = 6(8-9-1) + 12 + 3 = 3. \quad (11)$$

因为在机构运动过程中, 各个分支的运动副总保持平行且位于定平台上的圆柱副的轴线总是互相垂直, 所以总可以建立如图 2 所示的坐标系, 这样(9)和(10)式总保持不变。那么公共约束和冗余约束也不变。因此自由度是连续的。

2.2 Orthoglide 机构

如图 3 所示为 Orthoglide 机构^[46], 它包含 3 个分支并且每个分支都有 1 个平行四边形机构。

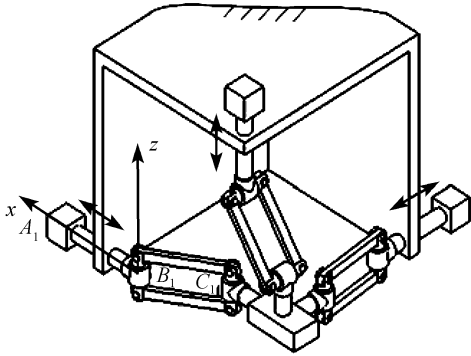


图 3 Orthoglide 机构

首先来分析由 4 个转动副连接的平行四边形机构, 如图 4 所示。这个四边形机构可以看作含有 2 个分支的并联机构。选择点 A 为坐标原点, x' 轴沿杆 AD, y' 轴位于平行四边形平面内, z' 轴沿转动副的轴线方向。对于此平行四边形的第 1 个分支, 它的运动螺旋系包含 2 个螺旋

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_A &= (0 \ 0 \ 1; \ 0 \ 0 \ 0), \\ \mathcal{S}_B &= (0 \ 0 \ 1; \ y_1 \ -x_1 \ 0), \end{aligned} \quad (12)$$

这里, $(x_1, y_1, 0)$ 是 B 点的坐标。第 1 个分支的约束螺旋系为

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_{11}^r &= (0 \ 0 \ 0; \ 1 \ 0 \ 0), \\ \mathcal{S}_{12}^r &= (0 \ 0 \ 0; \ 0 \ 1 \ 0), \\ \mathcal{S}_{13}^r &= (0 \ 0 \ 1; \ 0 \ 0 \ 0), \\ \mathcal{S}_{14}^r &= (x_1 \ y_1 \ 0; \ 0 \ 0 \ 0). \end{aligned} \quad (13)$$

第 2 个分支的运动螺旋系为

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_C &= (0 \ 0 \ 1; \ y_1 \ -(x_1+l) \ 0), \\ \mathcal{S}_D &= (0 \ 0 \ 1; \ 0 \ -l \ 0), \end{aligned} \quad (14)$$

l 代表杆 AD 的长度。第 2 个分支的约束螺旋系为

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_{21}^r &= (0 \ 0 \ 0; \ 1 \ 0 \ 0), \\ \mathcal{S}_{22}^r &= (0 \ 0 \ 0; \ 0 \ 1 \ 0), \\ \mathcal{S}_{23}^r &= (0 \ 0 \ 1; \ 0 \ 0 \ 0), \\ \mathcal{S}_{24}^r &= (x_1 \ y_1 \ 0; \ 0 \ 0 \ l y_1). \end{aligned} \quad (15)$$

综合(14)和(15)式, 可以得到整个平行四边形机构的约束螺旋系为

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_1^r &= (0 \ 0 \ 0; \ 1 \ 0 \ 0), \\ \mathcal{S}_2^r &= (0 \ 0 \ 0; \ 0 \ 1 \ 0), \\ \mathcal{S}_3^r &= (0 \ 0 \ 1; \ 0 \ 0 \ 0), \\ \mathcal{S}_4^r &= (x_1 \ y_1 \ 0; \ 0 \ 0 \ 0), \\ \mathcal{S}_5^r &= (x_1 \ y_1 \ 0; \ 0 \ 0 \ l y_1). \end{aligned} \quad (16)$$

对上式求反螺旋, 得

$$\mathcal{S}^g = (0 \ 0 \ 0; \ y_1 \ -x_1 \ 0), \quad (17)$$

它表示允许 BC 杆在 ABCD 平面内移动, 此平行四边形机构可以等效为 1 个广义移动副。

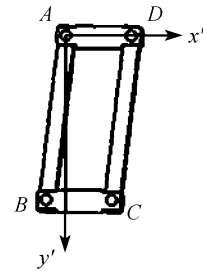


图 4 平行四边形铰链机构

通过上面的分析得知, 此 Orthoglide 机构的每个分支都可以等效为 1 个开链, 含有 4 个运动副: 与机架相联的移动副、1 个广义移动副以及联接平行四边形机构的 2 个转动副。此外, 机架上的 3 个移动副互相垂直。

选取如图 3 中所示的坐标系 B_1-xyz , x 轴沿移动副轴线方向, z 轴与转动副轴线方向相同. 那么 Orthoglide 机构的第 1 个分支的运动螺旋系可以表示为

$$\begin{aligned}\mathcal{S}_1^1 &= (0 \ 0 \ 0; 1 \ 0 \ 0), \\ \mathcal{S}_2^1 &= (0 \ 0 \ 1; 0 \ 0 \ 0), \\ \mathcal{S}_3^1 &= (0 \ 0 \ 0; d_3 \ e_3 \ f_3), \\ \mathcal{S}_4^1 &= (0 \ 0 \ 1; d_4 \ e_4 \ 0).\end{aligned}\quad (18)$$

这个分支的约束螺旋系包含 2 个螺旋

$$\begin{aligned}\mathcal{S}_{11}^r &= (0 \ 0 \ 0; 1 \ 0 \ 0), \\ \mathcal{S}_{12}^r &= (0 \ 0 \ 0; 0 \ 1 \ 0).\end{aligned}\quad (19)$$

这个分支作用于动平台 2 个约束力偶, 它们互相垂直且都与此分支的转动副轴线垂直.

对于整个 Orthoglide 机构, 3 个分支共有 6 个约束力偶作用于动平台上但并不会产生公共约束, $\lambda=0$, $\nu=3$. 此外, 由于其中的平行四边形机构可以等效为 1 个广义移动副, 整个机架可以看作包含 12 个运动副和 11 个包括机架在内的杆件, 也就是说, $n=11$ 和 $g=12$. 用修正的 G-K 公式求得 Orthoglide 机构的自由度为

$$\begin{aligned}M &= d(n-g-1) + \sum_{i=1}^g f_i + \nu \\ &= 6(11-12-1) + 12 + 3 = 3.\end{aligned}\quad (20)$$

很显然, 无论在机构的何种可能位形下, 在坐标系 B_1-xyz 下, (18)和(19)式不变, 从而不难判断机构的公共约束和并联冗余约束也不变, 所以自由度不是瞬时的.

2.3 Star 机构

如图 5 所示, Star 机构也有 3 个相同的分支^[47]. 每个分支中, 第 1 个转动副联结在机架上, 第 2 个螺旋副与第 1 个转动副共轴, 最后 1 个连接动平台的运动副也是转动副, 与前 2 个运动副平行, 且与螺旋副共同联接着 1 个平行四边形铰链机构. 类似于 Orthoglide 机构的分析过程, 铰链平行四边形机构可以等效为 1 个沿四边形平面的广义移动副 Pa. 这样, 每个分支就等效为 1 个 RHPaR 运动链. 此外, 3 个分支的螺旋副轴线共面且互成 120° .

将 x 轴建立在与机架相联的第 1 个转动副的轴线上, z 轴位于平行四边形平面内, 转动副的中心选择

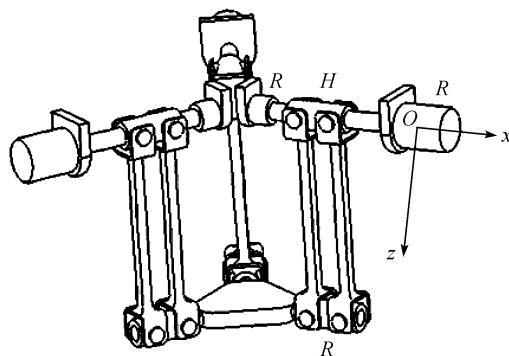


图 5 Star 机构

为原点. 则这个分支的运动螺旋系为

$$\begin{aligned}\mathcal{S}_1^1 &= (1 \ 0 \ 0; 0 \ 0 \ 0), \\ \mathcal{S}_2^1 &= (1 \ 0 \ 0; d_2 \ 0 \ 0), \\ \mathcal{S}_3^1 &= (0 \ 0 \ 0; d_3 \ 0 \ f_3), \\ \mathcal{S}_4^1 &= (1 \ 0 \ 0; 0 \ e_4 \ 0).\end{aligned}\quad (21)$$

它的反螺旋系为

$$\begin{aligned}\mathcal{S}_{11}^r &= (0 \ 0 \ 0; 0 \ 1 \ 0), \\ \mathcal{S}_{12}^r &= (0 \ 0 \ 0; 0 \ 0 \ 1).\end{aligned}\quad (22)$$

这个约束螺旋系包括 2 个约束力偶, 都与分支第 1 个转动副的轴线相垂直.

对于另外 2 个分支, 与第 1 个分支相类似, 每个分支也都提供了与这个分支上第 1 个转动副的轴线相垂直的 2 个约束力偶. 这 3 个分支共作用于动平台 6 个约束力偶, 由于不能同时提供相同的约束, 因此这个机构没有公共约束, 但产生了 3 个并联冗余约束, $\lambda=0$, $\nu=3$. 整个机架可以看作包含 12 个运动副和 11 个杆件包括机架, 也就是说, $n=11$ 和 $g=12$. 用修正的 G-K 公式求得 Star 机构的自由度为

$$\begin{aligned}M &= d(n-g-1) + \sum_{i=1}^g f_i + \nu \\ &= 6(11-12-1) + 12 + 3 = 3.\end{aligned}\quad (23)$$

无论在机构的何种可能位形下, 在坐标系 $O-xyz$ 下, (21)和(22)式始终保持不变, 那么机构的公共约束和并联冗余约束也不变. 所以此自由度不是瞬时的.

2.4 Carricato 机构

图 6 所示为 Carricato 机构^[48]. 用 3 个相同的 PRPR 分支和一个 6 自由度的 UPUR 支链联接机架和动平

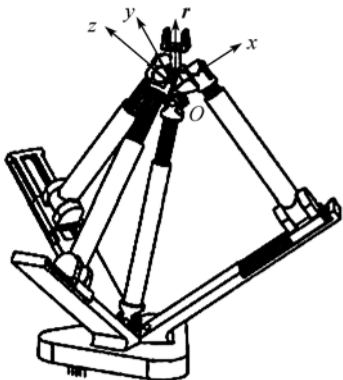


图6 Carricato 机构

台. 末端执行器由 1 个转动副联接在动平台上, 这个转动副方向沿 r 轴且由第 4 个 UPUR 分支驱动. 所以这个复杂的机构可以看作由 1 个开链和 1 个并联机构组成. 并联机构包含上面提到的 4 个分支, 开链只包含 1 个转动副, 即联接末端执行器和动平台的那个转动副. 建立坐标系 $O-xyz$, 使得 x, y, z 轴分别平行于 3 个滑轨.

首先来分析第 1 个分支, 这个分支最上面的转动副轴线与 x 轴重合. 4 个运动副用螺旋表示, 构成了这个分支的运动螺旋系

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_1^1 &= (0 \ 0 \ 0; 1 \ 0 \ 0), \\ \mathcal{S}_2^1 &= (1 \ 0 \ 0; 0 \ e_2 \ f_2), \\ \mathcal{S}_3^1 &= (0 \ 0 \ 0; 0 \ e_3 \ f_3), \\ \mathcal{S}_4^1 &= (1 \ 0 \ 0; 0 \ 0 \ 0). \end{aligned} \quad (24)$$

它的约束螺旋系为

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_{11}^r &= (0 \ 0 \ 0; 0 \ 1 \ 0), \\ \mathcal{S}_{12}^r &= (0 \ 0 \ 0; 0 \ 0 \ 1). \end{aligned} \quad (25)$$

此约束螺旋系包括 2 个约束力偶, 分别沿另外 2 个分支的滑轨. 可以用类似于这个分支的分析方法来分析与它结构相同的另外 2 个分支. 第 4 个分支的 6 个运动副相互独立, 对动平台没有作用任何约束. 所以 4 个分支一共作用于动平台 6 个约束力偶, 但并没有产生公共约束. 这 6 个约束力偶中有 3 个是相互独立的, 因此 $\nu=3$.

用修正的公式求得其中那个并联机构的自由度为

$$\begin{aligned} M_p &= d(n-g-1) + \sum_{i=1}^g f_i + \nu \\ &= 6(14-16-1) + 18 + 3 = 3. \end{aligned} \quad (26)$$

但是对于整个 Carricato 机构, 它的自由度等于其中的并联机构和开链机构的自由度之和. 那么 Carricato 机构的自由度为 4.

此外, 也可以直接用修正的 G-K 公式计算 Carricato 机构的自由度

$$\begin{aligned} M &= d(n-g-1) + \sum_{i=1}^g f_i + \nu \\ &= 6(15-17-1) + 19 + 3 = 4. \end{aligned} \quad (27)$$

与前面几个例子相类似, 在机构所有可能的位形配置下, 公共约束和并联冗余约束始终保持不变, 因此自由度是连续的.

需要指出的是, 这个机构实际上并不好, 因为每个分支中的 2 个移动副互相垂直, 这就使得受力不太好. 但是它的自由度分析还是比较难的.

2.5 Cardan 铰链

Merlet^[30]称 Cardan 铰链是除了 Bennett, Goldberg 机构之外的 3 大著名反例之一, 如图 7 所示. Cardan 铰链是 1 个串联链, 它由 4 个闭环串联 5 个杆件而成. 若把 2 杆 2 副形成的闭环看作 1 个广义运动副, 那么该串联链就是用 4 个广义副连接 5 个杆件的运动链.

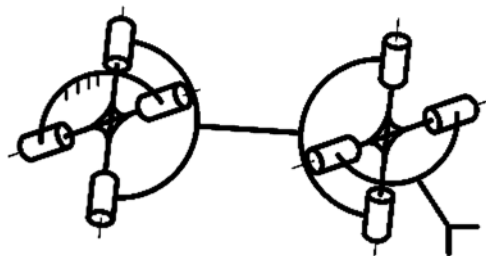


图7 Cardan 铰链

先来分析其中的 1 个闭环机构, 如图 8 所示. 以其中 1 个转动副的中心作为原点, 轴线作为 z 轴. 那么闭环机构的运动螺旋系包含 2 个螺旋, 将它们用 Plücker 坐标表示为

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_1 &= (0 \ 0 \ 1; 0 \ 0 \ 0), \\ \mathcal{S}_2 &= (0 \ 0 \ 1; 0 \ 0 \ 0). \end{aligned} \quad (28)$$

这 2 个螺旋具有完全相同的 Plücker 坐标, 根据螺旋理论, 它们线性相关只相当于 1 个螺旋, 因此这个闭环机构具有 1 个自由度, 即绕 z 轴的转动.

因为 Cardan 铰链由 4 个这样的闭环机构连续组

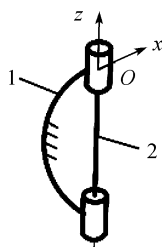


图 8 闭环机构

成, 即由 4 个单自由度的运动副组成, 所以 Cardan 铰链的自由度为 4.

2.6 Bennett 机构

因为 Bennett 机构是一个非常经典的疑难机构^[49], 是所有单环机构中过约束最多的, 因此有必要来简要回顾一下它的自由度分析过程^[34].

Bennett 机构是一个空间 4 杆机构, $AB=DC$, $BC=AD$, 4 个转动副的轴线都具有不同的方向并且对应垂直于与它相连的两杆, 如图 9 所示. 设对角线 $AC=2l$, $BD=2m$, AC 和 BD 的夹角为 β . 令 AC 和 BD 的中点分别为 E, F , 且 $EF=n$. 选取 E 为原点, x 轴沿向量 $\overrightarrow{EF}$, y 轴沿 $\overrightarrow{EA}$. 则点 A, B, C, D 的坐标为

$$\begin{aligned} A(0 \quad l \quad 0), \quad B(n \quad m\cos\beta \quad -m\sin\beta), \\ C(0 \quad -l \quad 0), \quad D(n \quad -m\cos\beta \quad m\sin\beta). \end{aligned} \quad (29)$$

另外 4 个转动副轴线的方向矢量可以表示为

$$\begin{aligned} \mathbf{S}_A = \mathbf{BA} \times \mathbf{AD}, \quad \mathbf{S}_B = \mathbf{CB} \times \mathbf{BA}, \\ \mathbf{S}_C = \mathbf{DC} \times \mathbf{CB}, \quad \mathbf{S}_D = \mathbf{AD} \times \mathbf{DC}. \end{aligned} \quad (30)$$

那么 Bennett 机构的运动螺旋系为

$$\begin{aligned} \mathbf{S}_A &= (l\sin\beta \quad n\sin\beta \quad n\cos\beta; \quad l\cos\beta \quad 0 \quad -l^2\sin\beta), \\ \mathbf{S}_B &= (m\sin\beta \quad 0 \quad n; \quad m\cos\beta \quad -m^2\sin^2\beta - n^2 \\ &\quad -m^2\sin\beta\cos\beta), \\ \mathbf{S}_C &= (-l\sin\beta \quad n\sin\beta \quad n\cos\beta; \quad -l\cos\beta \quad 0 \quad -l^2\sin\beta), \\ \mathbf{S}_D &= (-m\sin\beta \quad 0 \quad n; \quad -m\cos\beta \quad -m^2\sin^2\beta - n^2 \\ &\quad -m^2\sin\beta\cos\beta). \end{aligned} \quad (31)$$

显然有

$$m \cdot (\mathbf{S}_A - \mathbf{S}_C) = l \cdot (\mathbf{S}_B - \mathbf{S}_D). \quad (32)$$

这表明这 4 个螺旋线性相关, 且运动螺旋系的秩为 3.

所以机构的约束螺旋系包含 3 个螺旋, 即 $\lambda=3$. 用修正的 G-K 公式求得 Bennett 机构的自由度为

$$\begin{aligned} M &= d(n-g-1) + \sum_{i=1}^g f_i + v \\ &= 3(4-4-1) + 4 + 0 = 1. \end{aligned} \quad (33)$$

此外, 注意到不论 l, m, n, β 如何变化, (32) 式总不变. 所以 Bennett 机构的自由度总为 1.

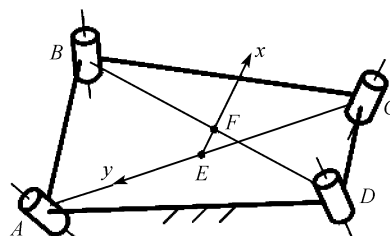


图 9 Bennett 机构

3 讨论

通过自由度分析过程, 可以看出基于约束螺旋理论的修正的 G-K 公式是非常简单有效的.

先来讨论它的有效性. 因为传统的 G-K 公式不能正确计算约束, 所以它不适合许多“过约束机构”. 事实上, 许多自由度计算方法的本质区别就在于如何确定约束. 该方法成功的解决了这一问题. 基于约束螺旋理论, 定义了公共约束和机构的“阶”. 另外着重强调了在并联机构中如何确定并联冗余约束, 也就是 v -并联冗余约束因子. 因此, 应用该方法, 可以非常正确方便的确定机构的约束. 这一方法从理论上讲是有效的. 此外, 应用修正的 G-K 公式本文已经成功地解决了许多疑难机构的自由度, 特别是 Bennett 机构、Goldberg 机构等许多机构的自由度. 这个事实论证了该方法更具有一般性.

这一方法的另一个优点是简单. 因为它仅仅基于螺旋理论的最基础部分, 因此它易于被广大机械师所掌握. 对比现在流行的群论和李代数方法, 不仅其至今难以分析像 Bennett 这样的机构, 而且自由度问题是机械工程最基本的问题, 每个机械工程师都要遇到, 群论和李代数方法, 却不容易掌握.

另外值得注意的是“阶”的定义: $d=6-\lambda$, λ 是机构的公共约束数. 为什么不像 Hunt^[50]那样直接定义 d 为机构运动螺旋系的秩呢? 比较一下这 2 种不同的定义,

也许有人会发现两者在理论上是相同的而且前者看起来似乎更复杂一些。但是, 当机构中含有很多运动副时, 用 Hunt 的定义常常会使自由度分析变得很难。例如, 对于像本文中提到的这几个多环并联机构, 它们都有很多运动副, 通过先求公共约束再来计算机构的“阶”会比直接从机构运动螺旋系求秩简单的多。事实上, 对于绝大多数的并联机构, 它们的运动副数目都多于 6, 求它们在同一个坐标系下运动螺旋系的秩非常困难。相反, 按照本文关于“阶”的定义可以大大简化自由度分析过程。

4 结论

对于有 150 多年历史的机构自由度分析问题, 关

键在于能否正确确定约束的数目。本文提出的方法将约束分为公共约束和并联冗余约束两部分, 从而成功地解决了这一关键问题。另外, 这一方法对于判断自由度的瞬时或连续性也很容易。整个自由度的分析过程简单有效。整体来看, 修正的 G-K 公式已经发展成为一套系统方法而不仅仅是一个公式。

到现在, 本文提出的自由度计算方法成功解决了 Gogu 所列出来的现代并联机构以及一些古典过约束机构的自由度, 这些古典机构包括著名的 Bennett, Goldberg 机构等。这就进一步说明了本文方法相对其他方法更具有一般性。然而更重要的意义在于, 本文提出的自由度计算方法有助于人们更好的开发和应用现代并联机构, 促进机构的创新。

参考文献

- 1 Grübler M. Allgemeine eigenschaften der zwangsläufigen ebenen kinematische kette: I. Civilingenieur, 1883, 29(1): 167—200
- 2 Kutzbach K. Mechanische leitungsverzweigung, ihre gesetze und anwendungen. Maschinenbau, Der Betrieb, 1929, 8(21): 710—716
- 3 Suh C H, Radcliffe C W. Kinematics and Mechanisms Design (Chapter 5). New York: John Wiley & Sons, 1978
- 4 Hunt K H. Structural kinematics of in-parallel-actuated robot-arms. Trans ASME J Mech Aut Des, 1983, 105(11): 705—712
- 5 Cox D, Tesar D. The dynamic model of a three degrees of freedom parallel robotics shoulder module. In: Proceedings of 4th International Conference on Advanced Robotics. Berlin: Springer-Verlag, 1989. 475—487
- 6 Gosselin C M, Angeles J. The optimum kinematic design of a spherical three-DOF parallel manipulator. Trans ASME J Mech Des, 1989, 111(2): 202—207
- 7 Tsai L W, Walsh G C, Stamper R E. Kinematics of a novel three DOF translational platform. In: Proceedings of IEEE International Conference on Robotics and Automation. Minneapolis: IEEE Press, 1996. 3446—3451
- 8 Kim H S, Tsai L W. Design optimization of a Cartesian parallel manipulator. Trans ASME J Mech Des, 2003, 125(3): 43—51 [DOI](#)
- 9 Hervé J M, Sparacino F. Structural synthesis of parallel robots generating spatial translation. In: Proceedings of 5th IEEE International Conference on Advanced Robotics. Italy: Pisa, 1991. 808—813
- 10 Clavel R. Delta, a fast robot with parallel geometry. In: Proceedings of the International Symposium on Industrial Robot. Switzerland: IFS Publications, 1988. 91—100
- 11 Rolland L. The manta and the kanuk: Novel 4-DOF parallel mechanisms for industrial handling. In: Proceedings of ASME Dynamic Systems and Control Division, 67, IMECE'99 Conference. USA: Nashville, 1999. 831—844
- 12 赵铁石, 黄真. 一种新型四自由度并联平台机构及其位置分析. 机械科学与技术, 2000, 19(6): 927—929
- 13 Zlatanov D, Gosselin C M. A new parallel architecture with four-DOF. In: Proceeding of the Workshop on Computational Kinematics. Seoul, 2001. 57—66
- 14 黄真, 李秦川. 两种新型对称五自由度并联机器人机构. 燕山大学学报, 2001, 25(4): 283—286
- 15 Kong X W, Gosselin C M, Richard P L. Type synthesis of parallel mechanisms with multiple operation modes. In: ASME Conference, MECE-99638. Chicago: ASME, 2006
- 16 Chebyshev P A. Théorie des mécanismes connus sous le nom de parallélogrammes. Mémoires présentés à l'Académie impériale des sciences de Saint-Petersbourg par divers savants, 1854
- 17 Dobrovolski V V. Dynamic analysis of statically constraint mechanisms (in Russian). Akad Nauk SSSR, Trudy Sem, Teorii Masini Mekhanizmov, 1949, 30(8): 252—259
- 18 Hunt K H, Phillips J R. Zur kinematic mechanischer verbindung für räumliche bewegung. Maschinenbau, 1965, 14(12): 657—664
- 19 Waldron K J. The constraint analysis of mechanisms. J Mechanisms, 1966, 1(2): 101—114
- 20 Bagci C. Degrees of freedom of motion in mechanisms. Trans ASME J Eng Industry, 1971, 93(2): 140—148

- 21 Freudenstein F, Alizade R. On the degree-of-freedom of mechanisms with variable general constraint. In: Proceedings of 4th World Congress on Theory of Machines and Mechanisms. Newcastle: Tyne, 1975
- 22 Hervé J M. Analyse structurelle des mécanismes par groupe des déplacements. *Mech Mach Theory*, 1978, 13(4): 437—450
- 23 Baker J E. On relative freedom between links in kinematic chains with cross-jointing. *Mech Mach Theory*, 1980, 15(3): 397—413 [\[DOI\]](#)
- 24 Davies T H. Mechanical networks—I: Passivity and redundancy. *Mech Mach Theory*, 1983, 18(2): 95—101 [\[DOI\]](#)
- 25 Agrawal V P, Rao J S. Structural classification of kinematic chains and mechanisms. *Mech Mach Theory*, 1987, 22(5): 489—496 [\[DOI\]](#)
- 26 Angeles J, Gosselin C M. Détermination du degré de liberté des chaînes cinématiques. *Trans CSME*, 1988, 12(4): 219—226
- 27 Tsai L W. *Robot Analysis: The Mechanics of Serial and Parallel Manipulators*. New York: John Wiley, 1999
- 28 McCarthy J M. *Geometric Design of Linkages*. New York: Springer-Verlag, 2000. 3—8
- 29 Gogu G. Mobility of mechanisms: A critical review. *Mech Mach Theory*, 2005, 40(9): 1068—1097
- 30 Merlet J P. *Parallel Robots*. Netherland: Kluwer Academic Publishers, 2000
- 31 黄真, 孔令富, 方跃法. 并联机器人机构学理论及控制. 北京: 机械工业出版社, 1997
- 32 Huang Z, Li Q C. General methodology for type synthesis of lower-mobility symmetrical parallel manipulators and several novel manipulators. *Int J Rob Research*, 2002, 21(2): 131—146 [\[DOI\]](#)
- 33 Huang Z, Li Q C. Type synthesis of symmetrical lower-mobility parallel mechanisms using constraint-synthesis method. *Int J Rob Research*, 2003, 22(1): 59—79
- 34 Huang Z, Xia P. The mobility analysis of some classical mechanism and recent parallel robots. In: ASME Conference, MECH-99109. Chicago: ASME, 2006
- 35 刘婧芳, 朱思俊, 曾达幸, 等. 包括 2 个新并联机构和一些反常机构的自由度分析. *燕山大学学报*, 2006, 30(6): 487—494
- 36 Rico J M, Ravani B. On mobility analysis of linkages using group theory. *Trans ASME J Mech Design*, 2003, 125(1): 70—80 [\[DOI\]](#)
- 37 Rico J M, Gallardo J, Ravani B. Lie algebra and the mobility of kinematic chains. *J Robotic Systems*, 2003, 20(8): 477—499 [\[DOI\]](#)
- 38 Kong X W, Gosselin C M. Mobility analysis of parallel mechanisms based on screw theory and the concept of equivalent serial kinematic chain. In: ASME conference, MECH-85337. Orlando: ASME, 2005
- 39 Gogu G. Chebychev-Grübler-Kutzbach's criterion for mobility calculation of multi-loop mechanisms revisited via theory of linear transformations. *European J Mechanics-A/Solids*, 2005, 24(3): 427—441 [\[DOI\]](#)
- 40 Shukla G, Whitney D E. The path method for analyzing mobility and constraint of mechanisms and assemblies. *IEEE Trans Autom Sci Eng*, 2005, 2(2): 184—192 [\[DOI\]](#)
- 41 Ball R S. *The Theory of Screws*. London: Cambridge University Press, 1900
- 42 黄真, 赵永生, 赵铁石. 高等空间机构学. 北京: 高等教育出版社, 2006
- 43 Merlet J P. Singular configurations of parallel manipulator and grassmann geometry. *Int J Rob Research*, 1989, 8(5): 45—56 [\[DOI\]](#)
- 44 Brand L. *Vector and Tensor Analysis*. New York: John Wiley & Sons, 1947
- 45 Kong X W, Gosselin C M. Generation of parallel manipulators with three translational degrees of freedom based on screw theory. In: Proceedings of IF to MM Symposium on Mechanisms, Machines, and Mechatronics. Canada: Saint-Hubert, 2001
- 46 Wenger P, Chablat D. Design strategies for the geometric synthesis of Orthoglide-type mechanisms. *Mech Mach Theory*, 2005, 40(8): 907—930 [\[DOI\]](#)
- 47 Hervé J M, Sparacino F. STAR, a new concept in robotics. In: The 3rd International Workshop on Advances in Robot Kinematics. Ferrara, 1992
- 48 Carricato M, Parenti-Castelli V. Singularity-free fully isotropic translational parallel mechanism. *Int J Rob Research*, 2002, 21(2): 161—174 [\[DOI\]](#)
- 49 Baker J E. The Bennett linkage and its associated quadric surfaces. *Mech Mach Theory*, 1988, 23(2): 147—156 [\[DOI\]](#)
- 50 Hunt K H. *Kinematic Geometry of Mechanisms*. Oxford: Oxford University Press, 1978