中国科学 : 数学 2013 年 第 43 卷 第 4 期 : 345 ∼ 354
www.springerlink.com math.scichina.com

《中国科学》杂志社
SCIENCE CHINA PRESS

综 述

反射天线设计的一个数学理论

张婷[①], 汪徐家[②*]

① 中国科学技术大学数学系, 合肥 230026;

② Centre for Mathematics and Its Applications, the Australian National University, Canberra 0200, Australia
E-mail: ztmarvel@mail.ustc.edu.cn, xu-jia.wang@anu.edu.au

收稿日期: 2012-11-08; 接受日期: 2013-01-17; * 通信作者
澳大利亚 ARC 创新基金 (批准号: DPl094303 和 DP120102718) 资助项目

摘要 本文讨论反射天线面设计中出现的一个偏微分方程, 这是一个完全非线性 Monge-Ampère 型方程. 我们先给出一个广义解的定义, 然后介绍如何得到广义解的存在性、唯一性和正则性, 最后我们给出求数值解的一个方法.

关键词 反射天线 Monge-Ampère 方程 解的存在性

MSC (2010) 主题分类 78A50, 35J96, 35J66

1 引言

我们考虑的模型是同步静止卫星上的一个反射天线. 以卫星上的信号发射器为坐标原点, 光线或无线信号从原点出发. 反射天线是一个曲面 Γ, 在极坐标下表示为

$$\Gamma = \{x \cdot \rho(x) : x \in \Omega\}, \tag{1.1}$$

其中 Ω 为单位球面 $\mathbb{S}^2$ 上的一个连通区域. 我们要求光线经 Γ 反射后照到地球上的一个给定区域, 比如中国版图. 以卫星为原点, 以中国版图为基形成一个锥. 这个锥和以坐标原点为中心的单位球面的相交面记为 $\Omega^* \subset \mathbb{S}^2$. 假设从原点出发的光线在 Ω 上的能量分布为函数 f, 光线经反射后在 Ω^* 上的能量分布为 g. 再设在反射过程中没有能量损失, 则我们有能量守恒

$$\int_\Omega f(x)dx = \int_{\Omega^*} g(y)dy. \tag{1.2}$$

我们考虑的数学问题是, 给定单位球面上的两个互不相交的区域 Ω, Ω^*, 以及定义在 Ω, Ω^* 上的两个非负函数 f, g, 满足条件 (1.2). 问是否存在反射面 Γ, 使从原点 O 处发出的具有能量分布 f 的光线, 经 Γ 反射后覆盖区域 Ω^*, 并且在区域 Ω^* 上具有能量分布 g. 如果 Γ 存在, 我们进一步问 Γ 是否唯一, 并且当 f, g 等已知量满足适当条件时, Γ 是否为光滑.

这是一个很实际的问题, 因此我们也想知道如何求出 Γ 的数值解.

本文的目的就是讨论上面提出的问题, 注意上述问题中 Ω, Ω^* 和 f, g 都任意给定. 一种特殊情形是 Ω^* 为一点, 这时 Γ 必为抛物面, 因为仅有抛物面才能把所有从原点出发的光线反射到同一方向.

英文引用格式: Zhang T, Wang X J. A mathematical theory in the reflector antenna design (in Chinese). Sci Sin Math, 2013, 43: 345–354, doi: 10.1360/012012-539

基于其应用背景, 这一问题在二战后受到很多研究, 比如英国以 Westcott 为首的研究小组发表了一系列文章, 具体参见文献 [1]. 从 20 世纪 80 年代以来, Oliker 和他的学生也发表了一系列文章[2]. 也可以参考文献 [3].

我们先推导出 Γ 满足的偏微分方程. 设 x 为从原点出发的一条光线, 它可看成一个单位向量, 也可以看成单位球面 $\mathbb{S}^2$ 上的一点. 光线 x 在 Γ 上的点 $x\cdot\rho(x)$ 处反射后, 反射方向为

$$T(x)=x-2\langle x,\vec{n}\rangle\vec{n}, \tag{1.3}$$

其中

$$\vec{n}=(\nabla\rho-\rho x)/\sqrt{\rho^2+|\nabla\rho|^2} \tag{1.4}$$

为 Γ 在点 $x\cdot\rho(x)$ 处的单位法向量, $\langle\cdot,\cdot\rangle$ 为 $\mathbb{R}^3$ 中的标准内积, 即

$$\langle x,y\rangle=x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3.$$

记 ∇ 为球面 $\mathbb{S}^2$ 上的协变导数, 因此可以算出

$$T(x)=\frac{2\rho\nabla\rho+(-\rho^2+|\nabla\rho|^2)x}{\rho^2+|\nabla\rho|^2}=\frac{\nabla\rho+(\tilde{\eta}-\rho)x}{\tilde{\eta}},$$

其中 $\tilde{\eta}=\frac{1}{2\rho}(\rho^2+|\nabla\rho|^2)$.

在研究这个问题时, 我们设 Ω 上任意不相交的两个子区域里的光线在反射后不重复, 则光线反射 $T:\Omega\to\Omega^*$ 是一个坐标变换. 因此对 Ω 中的任意子区域 $\omega\subset\Omega$, 有

$$\int_\omega f(x)dx=\int_{T(w)}g(y)dy=\int_\omega g(T(x))|\det J|dx, \tag{1.5}$$

其中第一式根据能量守恒, 第二式是由积分的坐标变换而来. 我们记 J 为坐标变换 T 的 Jacobi 矩阵. 由于 ω 为任意的子区域, 故我们有方程

$$\det J=f(x)/g(T(x)),\quad x\in\Omega. \tag{1.6}$$

(1.6) 左边为矩阵 J 的行列式. 直接计算 $\det J$ 很复杂, 但通过微分几何的协变导数可以算出

$$\det J=\eta^{-2}\det(\nabla_{ij}u+(u-\eta)\delta_{ij}), \tag{1.7}$$

其中

$$u=\frac{1}{\rho},\quad \eta=\frac{|\nabla u|^2+u^2}{2u},$$

∇_{ij} 为 $\mathbb{S}^2$ 上相对于标准正交基的二阶协变导数, δ_{ij} 为标准的 Kronecker's delta 符号, 即 $\delta_{ij}=1$, 当 $i=j$ 时; $\delta_{ij}=0$, 当 $i\neq j$ 时. 因此, 我们得到方程

$$\eta^{-2}\det(\nabla_{ij}u+(u-\eta)\delta_{ij})=f(x)/g(T(x)),\quad \forall\, x\in\Omega. \tag{1.8}$$

这是一个 Monge-Ampère 方程, 边界条件是

$$T(\partial\Omega)=\partial\Omega^*, \tag{1.9}$$

也就是映射 T 将边界 $\partial\Omega$ 映到边界 $\partial\Omega^*$. 这是一种很特殊的边界条件, 在研究其他偏微分方程中还没有出现过. Monge-Ampère 方程 (1.8) 是一类完全非线性方程. 因此边值问题 (1.8) 和 (1.9) 是研究其他偏微分方程的人所不熟悉的问题.

第 2 节先简单介绍一下 Monge-Ampère 方程. 在第 3 节中, 我们讨论问题 (1.8) 和 (1.9) 的解的存在唯一性. 第 4 节讨论解的正则性. 这些想法都来源于文献 [4], 它们后来被应用到更一般的最优运输问题[5]. 第 5 节把求方程 (1.8) 和 (1.9) 的数值解的问题转化成一个线性优化问题[6].

本文的目的是向有兴趣的读者介绍这一问题的数学研究进展, 我们仅给出证明的基本思想, 有关细节请参见文献 [4,6]. 基于这些思想, 近距离光线反射问题也取得了相应的结果, 比如 Karahanyan 和汪徐家证明了解的存在性和光滑性; 刘佳堃证明了近距离光线反射可化为非线性优化问题; Gutiérrez 等人则研究了相应的光线折射问题并证明了类似的结果.

2 Monge-Ampère 方程

经典的 Monge-Ampère 方程为

$$\det D^2 u = f(x, u, Du), \quad \forall\, x \in U, \tag{2.1}$$

其中 $D^2u = \{u_{x_i x_j}\}$ 为 u 的 Hessian 矩阵, U 为 $\mathbb{R}^n$ 中的区域. 这个方程关于最高阶导数为非线性, 这类方程被称为完全非线性方程. Monge-Ampère 方程应用非常广泛, 下面举几个例子.

例 1 设 $M = (x, u(x))$ 为 $\mathbb{R}^{n+1}$ 中的超曲面, 则 M 的 Gauss 曲率为

$$K = \frac{\det D^2 u}{(1 + |Du|^2)^{\frac{n+2}{2}}}.$$

因此, 方程 (2.1) 包含预定 Gauss 曲率方程为特例, 其中最知名的问题是 Minkowski 问题[7].

例 2 在仿射几何里, 仿射球面满足经典的 Monge-Ampère 方程, 仿射极大曲面满足一个由 Monge-Ampère 方程和线性化 Monge-Ampère 方程组成的方程组[7].

例 3 最优运输问题中的位势函数满足 Monge-Ampère 方程. 特别是当运输成本函数为 $c(x, y) = |x-y|^2$, 则相应的方程就是经典的 Monge-Ampère 方程 (2.1)[5].

例 4 一个经典的几何问题是一个二维的 Riemann 流形是否可以局部等距嵌入到 $\mathbb{R}^3$ 中, 这个问题也可以化为 Monge-Ampère 方程的解的存在性. 这个问题至今尚未完全解决.

还有许多其他完全非线性方程也都可以归结为 Monge-Ampère 方程家族的成员, 比如复 Monge-Ampère 方程、k-Hessian 方程和 k- 曲率方程等. 这些方程也都有变分结构. 由于 Monge-Ampère 方程的众多应用, 它吸引了许多著名数学家的研究, 从早期的 Lewy 和 Aleksandrov 到后来的 Calabi, Pogorelov, Nirenberg, Heinz, 郑绍远和丘成桐, 特别是 20 世纪 90 年代 Caffarelli 做了一系列重要工作. 但国内仅有少数几个人从事 Monge-Ampère 方程的研究, 比如复旦大学的洪家兴教授.

因为 Monge-Ampère 方程为完全非线性, 研究起来困难很大, 比如一个核心问题是对任何的光滑函数 f 定义在单位圆 $B_1(0)$ 上, 方程 (2.1) 在原点附近的一个邻域 $B_r(0)$ 上是否有一个光滑解. 注意这里 $r > 0$ 可以任意小, 并且对解不加任何边界条件. 这一问题至今尚未完全解决.

但如果我们限制到椭圆型 Monge-Ampère 方程, 则到目前为止已经取得比较满意的结果. 对一个一般形式的偏微分方程

$$F[u] =: F(D^2u, Du, u, x) = 0, \tag{2.2}$$

我们说 F 在函数 u 处为椭圆, 如果矩阵

$$\left\{\frac{\partial F}{\partial r_{ij}}(r,p,z,x)\right\}>0,\quad (r,p,z,x)=(D^2u(x),Du(x),u(x),x). \tag{2.3}$$

上面公式中 F 看成变量 $r=\{r_{ij}\}$, $p\in\mathbb{R}^n$, $z\in\mathbb{R}$ 和 $x\in U$ 的函数.

类似地, 如果矩阵 $\{\frac{\partial F}{\partial r_{ij}}\}(D^2u,Du,u,x)<0$, 则方程 (2.2) 也是椭圆的, 因为做变换 $F[u]\to -F[u]$ 就可以使相应的矩阵为正定.

对 Monge-Ampère 方程, 由上面的定义, 它为椭圆当且仅当矩阵 D^2u 的代数余子式为正定 (或负定), 这等价于 D^2u 本身为正定 (或负定), 也即当且仅当 u 为一致凸函数 (或凹函数).

当 u 为一致凸函数时, $\det D^2u=f>0$, 反之当 $f>0$ 时, 我们也可以限制到椭圆方程进行研究. 研究椭圆方程的最大优势是它满足极大值原理. 当 Monge-Ampère 方程 (2.2) 为椭圆时, 它的 Dirichlet 问题和 Neumann 问题都已解决[7]. 相应于 (1.9) 的边界条件是

$$Du(\partial U)=\partial V, \tag{2.4}$$

其中 U 和 V 为给定的区域. 当 U,V 和 f 满足适当的条件时, 问题 (2.1) 和 (2.4) 解的存在性、唯一性和正则性也都已解决, 可参见文献 [8–10]. 关于 Monge-Ampère 方程的进一步讨论, 可参见文献 [7,11].

3 方程 (1.8) 和 (1.9) 的广义解的存在性和唯一性

现在回到方程 (1.8). 利用 (2.3), 方程 (1.8) 为椭圆当且仅当矩阵

$$M=:\{\nabla_{ij}u+(u-\eta)\delta_{ij}\} \tag{3.1}$$

为正定或负定. 从应用中我们有 $f,g>0$, 故我们可以限制到椭圆方程. 下面我们刻画一下满足性质 $M>0$ 的曲面的几何性质. 首先注意到以单位向量 y_0 为轴线的抛物面 P 可表示为 $P=\{x\cdot p(x):x\in\mathbb{S}^2\}$, 其中

$$p(x)=\frac{c}{1-\langle x,y_0\rangle},\quad x\in\mathbb{S}^2, \tag{3.2}$$

这里 c 为正常数. 函数 p 的极小值在 $x=-y_0$ 时达到. 因此 $\frac{1}{2}c$ 是抛物面 p 到原点的距离. 由于抛物面把所有光线反射到同一方向, 故对应的 Jacobi 矩阵恒为 0.

现在设 Γ 为由 (1.1) 给出的曲面. 在 Γ 上任意一点 $x_0\cdot\rho(x_0)$ 处, 都存在一个抛物面 P 和 Γ 在 $x_0\cdot\rho(x_0)$ 处相切. 如果 Γ 在 $x_0\cdot\rho(x_0)$ 处为 C^1 光滑, 则这个抛物面为唯一. 如果矩阵 $M>0$, 则由上面叙述的抛物面的性质可知, 在点 $x_0\cdot\rho(x_0)$ 附近, 我们有

$$\begin{cases}\rho(x_0)=p(x_0),\\ \rho(x_0)\leqslant p(x).\end{cases} \tag{3.3}$$

由抛物面的性质可以进一步证明, 如果 (3.3) 对任何 $x_0\in\Omega$ 以及 x 在 x_0 附近成立, 则 (3.3) 对任何 $x_0\in\Omega$ 以及 $x\in\Omega$ 都成立. 因此我们引入如下定义.

定义 1 设 Γ 为 (1.1) 给出的曲面, x_0 为 Ω 中一点. 如果存在抛物面 $P=\{x\cdot p(x):x\in\mathbb{S}^2\}$, 使得 (3.3) 对任何 $x\in\Omega$ 都成立, 则称 P 为 Γ 在点 $x_0\cdot\rho(x_0)$ 处的支撑抛物面. 如果对于任意的点 $x_0\in\Omega$, 曲面 Γ 在点 $x_0\cdot\rho(x_0)$ 都有一个支撑抛物面, 则我们称 Γ 为 r- 凸.

r- 凸只是一个术语, 为的是下面的叙述方便, 在文献 [4] 中我们称之为容许的 (admissible). 这里我们用文献 [5] 中的术语. 为方便起见, 如果 Γ 为 r- 凸, 则我们也称函数 ρ 和 $u=1/\rho$ 为 r- 凸, 其中 ρ 为 (1.1) 中的函数.

上面的定义中设矩阵 M 为正定, 如果 M 为负定, 按我们的定义, 方程 (1.8) 也是椭圆的, 这时 (3.3) 改为

$$\begin{cases}\rho(x_0)=p(x_0),\\ \rho(x_0)\geqslant p(x).\end{cases} \tag{3.4}$$

满足 (3.4) 的曲面我们称之为 r- 凹.

在讨论问题 (1.8) 和 (1.9) 的解的存在性之前, 我们先了解一下边值条件 (1.9). 这个条件只有在反射面光滑的时候才会满足. 一般情况下解并不都光滑, 边界条件 (1.9) 也不总是严格满足, 比如下面几个例子.

例 5 设 $\Omega^*=\Omega_1^*\cup\Omega_2^*$, 即 Ω^* 为两个不相交区域的并. 设所有的量都关于平面 $x_1=0$ 对称, 并且解也关于 $x_1=0$ 对称, 这时由于 Ω_1^* 和 Ω_2^* 不相交, 故解 Γ 沿 $x_1=0$ 不全光滑, 而是有一条折线.

例 6 设 Ω^* 为一个环, Ω 为一个圆, 并设所有的量都是旋转对称. 则解 Γ 在点 $(0,0,\rho(e_3))$ 处必然形如一个锥, 其中 $e_3=(0,0,1)$ 是 $\mathbb{S}^2$ 上的北极点.

例 7 设 Ω 为一个环, Ω^* 为一个圆, 所有量都关于 x_3 轴旋转对称. 则 Γ 必将环 Ω 的内边界的点映到 Ω^* 内的北极点.

其实, 即使 Ω^* 是一个经典意义下严格凸的区域, Ω 为一个圆, f 和 g 都为正的光滑函数, 我们也可以找到例子使得解不一定光滑[4]. 故我们必须引进弱解的概念.

关于弱解, 对线性和拟线性方程, 一般都是在 Sobolev 空间或者相关的空间中定义的. 但 Monge-Ampère 方程为完全非线性, 我们不能利用 Sobolev 空间, 必须利用方程本身的特性来引进弱解.

对于经典的 Monge-Ampère 方程, Aleksandrov 引进了广义解的概念. 对于方程 (1.8), 我们参照经典的 Monge-Ampère 方程广义解的定义, 并结合方程 (1.8) 的光线反射背景来引入一种广义解.

对一个以原点为焦点的抛物面 P, 它总可以写成 (3.2) 的形式. 其中向量 y_0 为 P 的轴线方向, 从原点出发的所有光线都被反射到轴线方向. 利用这一性质, 对任意 r- 凸曲面 Γ, 我们都可以引进一个多值映射, 它是光线反射 T 这个映射的推广.

对任意一点 $q_0=x_0\cdot\rho(x_0)\in\Gamma$, 令 $\tilde{T}(x_0)$ 为点 q_0 处 Γ 的所有支撑抛物面的轴线方向的集合. 对任意子集 $\omega\subset\Omega$, 记 $\tilde{T}(\omega)=\bigcup_{x\in\omega}\tilde{T}(x)$. 再记

$$\mu(\omega)=\mu_{\rho,g}(\omega)=\int_{\tilde{T}(\omega)}g(y)dy. \tag{3.5}$$

可以证明, μ 为 Ω 上的一个测度.

定义 2 我们说 Γ 是方程 (1.8) 的广义解, 如果对任意 Borel 可测集合 $\omega\subset\Omega$, 都有

$$\mu(\omega)=\int_\omega f(x)dx, \tag{3.6}$$

也即 $\mu=fdx$.

(3.6) 只不过是将 (1.5) 推广到非光滑 r- 凸函数的情形. 要从数学上证明这样的定义合理, 需要说明不相交子集在映射 $\tilde{T}$ 下的像集的交集测度为 0. 关于边界条件 (1.9) 我们要求的是反射后的光线如

果不在 Ω^* 中, 则这样的光线的能量总和为 0. 另一方面, 由能量守恒条件, 我们要求反射光线覆盖整个区域 Ω^*, 因此边界条件应该写成

$$\Omega^* \subset \overline{T(\Omega)}, \quad |\{x \in \Omega : T(x) \notin \Omega^*\}| = 0, \tag{3.7}$$

其中 $\overline{T(\Omega)}$ 为 $T(\Omega)$ 的闭包, $|\Omega^*|$ 记集合 Ω^* 的测度.

利用上述定义, 我们把问题 (1.8) 和 (1.9) 的解化为问题 (3.6) 和 (3.7) 的解. 为了求 (3.6) 和 (3.7) 的解, 我们先证明测度 $\mu = \nu_{\rho,g}$ 的弱收敛性, 即如果有一列 r- 凸函数 $\rho_k \to \rho_0 > 0$, g_k 为一列一致有界可测函数, 设在 $L^1(\Omega^*)$ 中, $g_k \to g_0$, 则测度

$$\mu_{\rho_k,g_k} \xrightarrow{\text{弱}} \mu_{\rho_0,g_0}.$$

这个弱收敛性是研究广义解的基础. 利用这个弱收敛性, 我们可以证明广义解的存在性. 但在考虑解的存在性之前, 我们注意到如果 u 是一个解, 则从方程 (1.8) 可看出对任何正常数 c, 函数 cu 也满足方程 (1.8). 从 (1.3) 和 (1.4) 也可以看出光线反射映射 T 在函数乘以常数倍后也不变. 因此如果 u 是 (1.8) 和 (1.9) 的一个解, 则 cu 也是它的一个解. 如果 u 是 (3.6) 和 (3.7) 的 r- 凸的非光滑解, 则从定义不难看出 cu 也是 (3.6) 和 (3.7) 的一个非光滑解.

椭圆偏微分方程的主要特性是满足极大值原理和比较原理. 我们讨论的广义解也满足极大值原理和比较原理, 因此 Dirichlet 问题的广义解唯一. 对于边值问题 (3.6) 和 (3.7), 我们也可以证明解在相差一个常数倍的情况下是唯一的.

定理 3 设 Ω, Ω^* 为单位球面 $\mathbb{S}^2$ 上两个不相交的区域, 设 f, g 为 Ω, Ω^* 上的两个正函数并满足条件 (1.2), 则问题 (3.6) 和 (3.7) 的 r- 凸广义解在相差常数倍下是唯一的.

证明思想是如果有两个广义解 $\Gamma_1 = \{x \cdot \rho_1(x) : x \in \Omega\}$ 和 $\Gamma_2 = \{x \cdot \rho_2(x) : x \in \Omega\}$, 则可设 $\{\rho_1 > \rho_2\}$ 和 $\{\rho_1 < \rho_2\}$ 这两个集合非空. 记 $\rho = \min(\rho_1, \rho_2)$, 则 ρ 为 r- 凸并且从原点发出的光线经 $\Gamma = \{x \cdot \rho(x) : x \in \Omega\}$ 反射后覆盖 Ω^* 并且所有能量都落在 Ω^* 上. 另一方面, 用 $(1+\epsilon)\rho_1$ 代替 ρ_1, 并取适当的 ϵ, 可以说明集合 $G := \{\rho_1 = \rho_2\}$ 为零测集但 $\hat{T}_\rho(G)$ 为非零测集, 这和 (3.6) 矛盾.

现在我们讨论广义解的存在性.

定理 4 设 Ω, Ω^*, f 和 g 满足定理 3 中的条件, 则问题 (3.6) 和 (3.7) 存在一个 r- 凸广义解.

存在性可以用不同的方法证明[4,12]. 但我们觉得文献 [4] 中的方法比较简洁. 先对方程 (1.8) 作一小扰动, 即我们考虑方程

$$\eta^{-2} \det(\nabla_{ij} u + (u-\eta)\delta_{ij}) = \frac{f(x)}{g(T(x))} \mathrm{e}^{\epsilon(u-1)}, \tag{3.8}$$

其中 $\epsilon > 0$ 为参数. 对 $\epsilon > 0$, 方程 (3.8) 满足边界条件 (1.9) 的下解的集合为非空. 所有下解的上确界为 r- 凸, 并且是 (3.8) 的一个解. 令 $\epsilon \to 0$, 我们利用弱收敛性就得到广义解的存在性.

上面我们讨论了 r- 凸广义解的存在唯一性. 平行地, 我们也可以得到 r- 凹广义解的存在唯一性.

4 广义解的正则性

下面我们考虑广义解的正则性. 所谓正则性就是问在什么条件下解为光滑. 正则性往往是一个困难的问题, 做 Monge-Ampère 方程解的正则性往往分成两步. 第 1 步先证明如果 $\Gamma = \{x \cdot \rho(x) : x \in \Omega\}$ 是一个光滑解, 则我们可以证明 ρ 的二阶导数和三阶导数有一个上界, 这个上界仅依赖于能量分布函

数 f 和 g, 以及区域 Ω 和 Ω^*, 但不依赖于解函数 ρ 本身. 第 2 步是证明广义解 Γ 可以局部用光滑解逼近, 也就是说 $\forall x_0 \in \Omega$, $\exists$ 小圆 $B_r(x_0)$, 以及一个光滑的序列 ρ_k, 使得 $u_k = 1/\rho_k$ 满足方程

$$\eta^{-2}\det(\nabla_{ij}u_k + (u_k - \eta)\delta_{ij}) = \frac{f_k(x)}{g_k(T(x))}, \quad \forall x \in B_r(x_0),$$

其中 $f_k \to f$, $g_k \to g$, $\rho_k \to \rho$. 因为 ρ_k 为光滑, 故由第 1 步, ρ_k 的二阶导数和三阶导数有不依赖于 k 的上界. 取极限后, 我们就得到广义解 ρ 的二阶和三阶导数的估计.

关于第 1 步, 我们有如下定理.

定理 5　设 Ω, Ω^* 为 $\mathbb{S}^2$ 上两个不相交的区域, 设 f, g 分别为 Ω, Ω^* 上的两个正函数, 满足 $c_1 \leqslant f$, $g \leqslant c_2$. 令 $u \in C^4(\Omega)$ 为方程 (1.8) 在 Ω 中的解. 则我们有下面的先验估计, $\forall x_0 \in \Omega$, $\exists$ 常数 $C > 0$, 仅依赖于 $\mathrm{dist}(x_0, \partial\Omega)$, c_1, c_2, $\sup_\Omega |\nabla^2 f|$, $\sup_{\Omega^*} |\nabla^2 g|$, 使得

$$|\nabla^2 u(x_0)| + |\nabla^3 u(x_0)| \leqslant C.$$

我们这里没有限制条件 (1.2), 但实际上 (1.2) 是必要条件. 也就是说如果 (1.8) 和 (1.9) 有一个广义解, 则由定义 3, 条件 (1.2) 必然成立. 二阶导数上界的证明是取一个适当的辅助函数, 在极大值点利用极大值原理进行计算. 这是椭圆方程研究里常用的方法, 叫做 Bernstein 方法. 二阶导数有界以后, Monge-Ampère 方程具有了一致椭圆的性质, 因此利用 Krylov 关于完全非线性一致椭圆方程的正则性理论, 就可以得到三阶导数的界.

关于第 2 步, 我们需要对边界 $\partial\Omega^*$ 加条件.

定义 6　我们称 Ω^* 关于 Ω 为 r- 凸, 如果对任意点 $x_0 \in \Omega$, $y_1, y_2 \in \Omega^*$, 关于 x_0 的连接 y_1 和 y_2 的 r- 线落在 Ω^* 内.

这里 r- 线的定义如下. 令 $p_1(x) = \frac{c_1}{1-\langle x, y_1\rangle}$, $p_2(x) = \frac{c_2}{1-\langle x, y_2\rangle}$ 为满足 $p_1(x_0) = p_2(x_0)$ 的两个抛物面. 记 l 为抛物面 p_1 和 p_2 的交线, P_t 为过点 $x_0 \cdot \rho(x_0)$ 并与 l 相切的抛物面的集合, 则所有这样的抛物面的轴线方向就形成 $\mathbb{S}^2$ 上的一条曲线, 位于 y_1 和 y_2 之间的这一段就称为关于 x_0 的连接 y_1 和 y_2 的 r- 线.

定理 7　设 Ω, Ω^* 为 $\mathbb{S}^2$ 上两个不相交的区域, f, g 分别为 Ω, Ω^* 上的两个 C^2 光滑正函数. 设 Ω^* 为关于 Ω 中的任意点都为 r- 凸, 则反射曲面 Γ 为 C^3 光滑.

证明思想是求方程 (1.8) 在任意小圆 $B_r(x_0) \subset \Omega$ 上的 Dirichlet 问题的光滑解. 为此我们要建立这个 Dirichlet 问题的整体先验估计并利用连续性方法. 条件 Ω^* 关于 Ω 为 r- 凸使得方程 (1.8) 在经典的意义下满足, 也就是说使得所有的反射光线都落在区域 Ω^* 中. 当 Ω^* 不是 r- 凸时, 有可能有能量为 0 的部分光线反射后跑到 Ω^* 外面, 因此方程 (1.8) 在这些点没有意义. 可以证明, 当 Ω^* 关于 Ω 不是 r- 凸时, 存在光滑正函数 f, g 使得 Γ 不光滑. 比如说如果我们要求反射光线过于集中在两个点 y_1, y_2 附近, 但连接 y_1 和 y_2 的 r- 线又不完全落在 Ω^* 中, 那么这时反射面 Γ 就不光滑. 从广义解的定义我们知道 Γ 必为 Lipschitz 连续. 直观上看, Γ 不光滑指的是曲面出现折线, 像函数 $u(x) = |x_1|$ 一样.

上面我们讨论了 r- 凸的反射面的光滑解, 我们当然想知道 r- 凹的反射面是否有类似的光滑性质. 答案是没有. 可以证明对任意的区域 Ω, Ω^*, 都存在光滑正函数 f, g 使得反射面 Γ 为非光滑, 即使 Ω^* 关于 Ω 为 r- 凸.

从工程的角度人们会问, 能不能对 f 和 g 加条件, 使得 f, g 满足一定条件后 r- 凹的反射面为光滑. 我们的答案是不知道. 到目前为止, 我们研究正则性的手法都是在偏微分方程研究的几个框架下进行. 这个问题超出了我们研究的框架. 对这么一个复杂的方程, 就无从下手了.

5 反射天线的一个数值解法

由于这个问题的应用背景, 我们还想知道如何求问题 (1.8) 和 (1.9) 的数值解. 研究偏微分方程数值解是计算数学这个学科的主要内容. 对椭圆方程也已经有了几种比较成熟的方法, 其中最熟知的是有限元法和有限差分法, 其他的还有求变分极小法和解抛物问题的迭代法等.

但 Monge-Ampère 方程为完全非线性, 上面方法并不一定适用, 有些需要加新的限制. 研究 Monge-Ampère 方程数值解最麻烦的是保持解的凸性 (对反射天线问题我们指的是 r- 凸), 因为前面我们说过当解为凸或凹时方程才是椭圆的. 我们知道求解偏微分方程的数值解一般是化为一个代数方程组, 求解非线性代数方程组都需要利用某个迭代. 求方程 (2.1) 的迭代过程中, 解一旦失去凸性, 迭代一般没有收敛性, 比如有限元法是最常用的方法, 但对 Monge-Ampère 方程 (2.1), 一般来说根本无法解出系数. 因为相应的代数方程线性化后的系数矩阵不一定正定. 对于有限差分方法, 也有同样的问题, 而且即使能解出精确的数值解, 误差估计也未必可以建立, 因为可以找到例子说明这个数值解不一定保持凸性. 原因是通常的差分格式已经丢掉了 Monge-Ampère 方程的一个内在性质, 也就是方程 (2.1) 的左边为梯度映射 Du 的 Jacobi 矩阵, 方程 (1.8) 的左边为映射 T 的 Jacobi 矩阵.

一个自然的想法是迭代过程中当解失去凸性时, 我们用其凸包来代替, 一个定义在区域 Ω 上的连续函数 u 在经典意义下的凸包的定义是

$$\hat{u}(x)=\sup\{l(x): l(x)\ \text{为线性函数并且}\ l(x)\leqslant u(x), \forall\, x\in\Omega\}.$$

当然考虑反射面时我们指的是 r- 凸包, 也就是把上面的线性函数换成抛物面. 但从计算的角度来看, 计算一个函数凸包的计算量是很大的, 不亚于求一个一致椭圆偏微分方程的数值解[13]. 研究一个曲面的凸包是计算几何里的一个基本问题, 已有大量的研究成果, 也有现有的软件可以使用. 但对光线反射问题, 我们需要的是 r- 凸或 r- 凹, 尚没有任何研究成果.

最近几年已有若干篇文章做 Monge-Ampère 方程 (2.1) 的数值解, 但在数学上的误差估计到目前为止还没有任何工作, 而且由于上面所说的凸性原因, 并不能完全确信这些文章中的算法真的就对任意的初始条件都收敛. 某些算法可能仅是对部分初始数据收敛.

另外我们的边界条件 (1.9) 也有别于其他偏微分方程通常考虑的边界条件. 从理论研究的角度来看, 这个边界条件和 Neumann 边界条件以及斜微商边界条件应归于一类. 处理这个边界条件可以参考 Neumann 边值问题的方法, 但目前已知的工作还不多.

对于我们的光线反射问题, 方程 (1.8) 又比经典的 Monge-Ampère 方程 (2.1) 复杂很多. 方程 (1.8) 是叙述在球面上的, 并利用了微分几何中的协变导数. 如果要把它写成平面上的一个偏微分方程则更加复杂. 为方便起见, 设 Ω 在北半球, Ω^* 在南半球. 令 $\mathbb{R}^2$ 为北半球的切平面. 以原点为心, Ω 为底形成一个锥, 这个锥和 $\mathbb{R}^2$ 的交集记成 $\hat{\Omega}$. 再把 Ω 上的函数延拓到整个锥中使 $u(tx)=tu(x)$. 限制这个延拓后的函数到 $\hat{\Omega}$ 上, 我们得到 $\hat{u}$, 则可以计算出 $\hat{u}$ 在 $\hat{\Omega}$ 上满足方程

$$(\hat{u}_{x_1x_1}-\alpha)(\hat{u}_{x_2x_2}-\beta)-(\hat{u}_{x_1x_2}-\gamma)^2=h, \quad \forall\, x\in\hat{\Omega},$$

其中

$$\alpha=\frac{1+x_2^2}{(1+|x|^2)^{3/2}}\eta, \quad \beta=\frac{1+x_1^2}{(1+|x|^2)^{3/2}}\eta, \quad \gamma=\frac{x_1x_2}{(1+|x|^2)^{3/2}}\eta,$$
$$\eta=\frac{\sqrt{1+|x|^2}}{2\hat{u}}[\hat{u}_{x_1}^2+\hat{u}_{x_2}^2+(\hat{u}-x_1\hat{u}_{x_1}-x_2\hat{u}_{x_2})^2],$$

$$h=\eta^2(1+|x|^2)^{-2}f(X)/g(T(X)),\quad X=\left(\frac{x}{\sqrt{1+|x|^2}},\frac{1}{\sqrt{1+|x|^2}}\right).$$

这个方程很复杂, 也给我们做数值解带来很大的麻烦. 由于上面所叙述的原因, 求反射天线的数值解并非一件容易的事情.

下面我们介绍文献 [6] 中的一个结果, 它将问题 (1.8) 和 (1.9) 的求解化为一个线性规划问题, 即一个线性优化问题. 线性优化问题的求解已经很成熟了.

这个转化是建立在下面的变换基础之上的[4,14]. 设 ρ 为 Ω 上的一个 r- 凸函数. 记

$$\rho^*(y)=\inf_{x\in\Omega}\frac{1}{\rho(x)(1-\langle x,y\rangle)},\quad y\in\Omega^*. \tag{5.1}$$

定理 8 我们有下述结论:

(1) ρ^* 为 Ω^* 上的一个 r- 凸函数.

(2) $(\rho^*)^*=\rho$, 即

$$\rho(x)=\inf_{y\in\Omega^*}\frac{1}{\rho^*(y)(1-\langle x,y\rangle)},\quad x\in\Omega. \tag{5.2}$$

(3) 如果 ρ 是 (1.8) 的解, 则 ρ^* 为下面方程的解,

$$\eta^{*2}\det(\nabla_{ij}v+(v-\eta^*)\delta_{ij})=\frac{g(y)}{f(T^*(y))},\quad \forall\, y\in\Omega^*,$$

其中 $v=1/\rho^*$, 且

$$\eta^*=\frac{|\nabla v|^2+v^2}{2v},\quad T^*(y)=-\frac{\nabla v+(v-\eta^*)}{\eta^*}.$$

上面定理说的是 ρ^* 为 ρ 的对偶, T^* 为 T 的逆映射. 分别对 (5.1) 和 (5.2) 求对数, 我们有

$$\begin{cases}\psi(y)=\inf\{-\varphi(x)+c(x,y)\},\quad y\in\Omega^*,\\ \varphi(x)=\inf\{-\psi(y)+c(x,y)\},\quad x\in\Omega,\end{cases} \tag{5.3}$$

其中 $\varphi=\log\rho$, $\psi=\log\rho^*$, $c(x,y)=-\log(1-\langle x,y\rangle)$. 我们发现 (5.1) 正是最优传输问题中的对偶[15], c 为其成本函数. 利用最优传输问题中已知的结果, 我们就有如下定理.

定理 9 设 Ω,Ω^* 为 $\mathbb{S}^2$ 上两个不相交的区域, f, g 为 Ω,Ω^* 上的两个正函数且满足条件 (1.2). 记

$$I(u,v)=\int_\Omega f(x)u(x)dx+\int_{\Omega^*}g(y)v(y)dy.$$

我们有下面的结论:

(1) 线性泛函 I 在集合 $K^+=\{(u,v):u\in C(\Omega),v\in C(\Omega^*),\text{并且 }u(x)+v(y)\leqslant c(x,y)\}$ 中存在一个极大函数对 (φ_1,ψ_1), 并且 $\rho_1=\mathrm{e}^{\varphi_1}$ 是问题 (1.8) 和 (1.9) 的广义 r- 凸解;

(2) 线性泛函 I 在集合 $K^-=\{(u,v):u\in C(\Omega),v\in C(\Omega^*),\text{并且 }u(x)+v(y)\geqslant c(x,y)\}$ 中存在一个极小函数对 (φ_2,ψ_2), 并且 $\rho_2=\mathrm{e}^{\varphi_2}$ 是问题 (1.8) 和 (1.9) 的广义 r- 凹解.

函数对 (φ_1,ψ_1) 为极大函数对是指

$$I(\varphi_1,\psi_1)=\sup\{I(u,v):(u,v)\in K^+\}.$$

上面的定理说明要求问题 (1.8) 和 (1.9) 的广义解, 我们仅需要求线性泛函 I 在 K^+ 上的极大或 K^- 上的极小, 从而可把一个完全非线性问题化为一个线性优化问题. 利用第 3 节里面叙述的解的存在唯一性, 我们知道如果 u 是一个解, 则 cu 也是一个解, 其中 c 为任意正常数. 所以不管要构造多大尺寸的反射天线, 都可以用同样的计算程序.

我们也需要指出定理 5 给出的方法的一个缺点, 也就是把原来求 Ω 上函数 u 的数值解变成了求解 $\Omega\times\Omega^*$ 上的函数组 (u,v) 的数值解, 因此计算量也不小. 不过求泛函 I 的极值问题, 其离散化后为一个稀疏矩阵, 因此求 (u,v) 的数值解应当利用相关的数值方法.

参考文献

1 Westcott B S. Shaped Reflector Antenna Design. Letchworth: Research Studies Press, 1983

2 Oliker V I. On reconstructing a reflecting surface from the scattering data in the geometric optics approximation. Inverse Problems, 1989, 5: 51–65

3 Häkli J. Shaped reflector antenna design and antenna measurement at sub-mm wavelengths. PhD thesis. Helsinki: Helsinki University of Technology, 2006

4 Wang X J. On the design of a reflector antenna. Inverse Problems, 1996, 12: 351–375

5 Ma X N, Trudinger N S, Wang X J. Regularity of potential functions of the optimal transportation problem. Arch Ration Mech Anal, 2005, 177: 151–183

6 Wang X J. On the design of a reflector antenna, II. Calc Var Partial Differential Equations, 2004, 20: 329–341

7 Trudinger N S, Wang X J. The Monge-Ampère equation and its geometric applications. In: Handbook of Geometric Analysis. Advanced Lectures in Mathematics, vol. 7. Beijing: Higher Education Press, 2008, 467–524

8 Caffarelli L A. The regularity of mappings with a convex potential. J Amer Math Soc, 1992, 5: 99–104

9 Caffarelli L A. Boundary regularity of maps with convex potentials−II. Ann of Math, 1996, 144: 453–496

10 Urbas J. On the second boundary value problem for equations of Monge-Ampère type. J Reine Angew Math, 1997, 487: 115–124

11 Gutiérrez C E. The Monge-Ampère Equation. In: Progress in Nonlinear Differential Equations and Their Applications. Boston: Birkhäuser, 2001

12 Caffarelli L A, Oliker V I. Weak solutions of one inverse problem in geometric optics. J Math Sci, 2008, 154: 39–49

13 Oberman A M. Computing the convex envelope using a nonlinear partial differential equation. Math Models Methods Appl Sci, 2008, 18: 759–780

14 Guan P F, Wang X J. On a Monge-Ampère equation arising in geometric optics. J Differential Geom, 1998, 48: 205–223

15 Rachev S T, Rüschendorf L. Mass Transportation Problems, vol. I. New York: Springer-Verlag, 1998

A mathematical theory in the reflector antenna design

ZHANG Ting & WANG XuJia

Abstract In this paper, we discuss a partial differential equation arising in the design of a reflector antenna. It is a fully nonlinear equation of Monge-Ampère type. We first introduce a generalized solution, then consider the existence, uniqueness and regularity of generalized solutions. Finally, we present an approach to its numerical solution.

Keywords **reflector antenna, Monge-Ampère equation, existence of solution**

MSC(2010) **78A50, 35J96, 35J66**

doi: 10.1360/012012-539