



三体量子系统的量子导引方案

肖书, 郭志华*, 曹怀信*

陕西师范大学数学与信息科学学院, 西安 710119

*联系人, 郭志华, E-mail: guozhizhua@snnu.edu.cn; 曹怀信, E-mail: caohx@snnu.edu.cn

收稿日期: 2018-08-06; 接受日期: 2018-08-31; 网络出版日期: 2018-11-28

国家自然科学基金(批准号: 11871318, 11771009, 11571211, 11571213)、中央高校基本科研业务费专项资金(批准号: GK201703010, GK201801011)和陕西省青年科技新星项目(编号: 2018KJXX-054)资助

摘要 复合量子系统的量子导引(Quantum Steering), 又称量子操控, 是指通过某个子系统上的测量来导引(操控)另一系统的状态. 它是介于量子纠缠与Bell非局域性之间的一种非对称量子特性. 正是这一特点使得量子导引能在许多方面发挥重要作用, 因而备受学者的广泛关注. 两体系统中的量子导引已有许多研究, 而多体量子系统比两体系统拥有更加复杂的结构, 其中的导引方案更加多样化. 本文提出三体量子系统中的两种量子导引方案, 称为“单边设备独立导引方案”与“双边设备独立导引方案”. 根据局域隐态的可分性与局域隐变量的独立性, 每个导引方案又包括两个导引情景. 在描述物理思想的基础上, 提出了三体量子态不可导引与可导引的数学定义, 给出了量子态不可导引的充要条件及充分条件.

关键词 量子系统, 量子导引, 单边设备独立导引, 双边设备独立导引

PACS: 03.65.Ca, 03.65.Ta, 03.65.Ud, 03.75.Gg

1 引言

量子信息学是信息科学、量子力学、计算机科学及数学科学的交叉研究领域. 量子信息是被保存在量子系统状态中的信息, 并且可以使用被称为量子信息处理的工程技术来操纵. 随着这门学科的迅速发展, 它在许多方面得到了广泛的应用, 例如量子网络^[1-6]、量子编码和量子通信^[7]. 量子相干性作为量子信息处理场景中的关键资源, 得到了广泛地讨论^[8,9]. 基于量子信息论的量子计算是利用量子力学叠加、纠缠和量子关联等物理特性来实现的计

算^[10-14]. 在量子信息中, 广义的“量子关联”是指复合量子系统的子系统之间的关联关系, 包括量子非局域性、量子导引、量子纠缠以及量子失谐等. 量子纠缠是量子信息处理中的重要资源, 在量子通信与量子计算中有着极其重要的应用^[15-19].

量子导引(Quantum Steering), 又称量子操控, 是Schrödinger和Born^[20]于1935年研究EPR佯谬时所提出的一种量子特性, 它是介于纠缠和Bell非局域性之间的一种量子非局域性, 描述了对一个粒子进行测量能够非局域地影响另一个粒子状态的能力, 其测量结果无法用局部隐态模型来解释.

引用格式: 肖书, 郭志华, 曹怀信. 三体量子系统的量子导引方案. 中国科学: 物理学 力学 天文学, 2019, 49: 010301
Xiao S, Guo Z H, Cao H X. Quantum steering in tripartite quantum systems (in Chinese). Sci Sin-Phys Mech Astron, 2019, 49: 010301, doi: 10.1360/SSPMA2018-00277

Schrödinger指出: 对于纯态来说, 纠缠性可以描述量子导引和非局域性, 但在实验中, 量子态往往是混合态. 1989年, Werner^[21]证明了所有的纠缠态并不能完全描述Bell非局域性; 2007年, Wiseman等人^[22,23]给出了量子导引的定义, 并在实验中以任务的形式来解释量子导引. 与纠缠和Bell非局域性不同的是: 量子导引具有独特的非对称性, 因为两个观测者在导引实验中扮演不同的角色^[24], 甚至存在单向量子导引, 即一方可以成功地对另一方进行量子导引, 但反过来不行. 此后, 量子导引以它独特的优点在许多方面都具有重要的应用价值, 因此受到了越来越多的关注. 例如量子密钥分配^[25,26]、安全传送^[27]、纠缠辅助子信道区分^[28]. Chen等人^[29]证明了对于任何2-比特纠缠态, 如果存在投影测量使Bob的规范化条件状态变成两个不同的纯态, 那么Alice可以控制Bob的状态. Nguyen等人^[30]将文献^[29]中的结果推广到高维系统. Wu等人^[31]证明了对于 N -测量协议中任何给定的2-比特量子态, 如果它有一个局部隐变量模型, 那么就有一个隐态个数不大于 2^N 的局部隐态模型. Sun等人^[32]通过实验证明了一类2-比特量子导引性的不对称, 提出了一种实用的方法来量化可导引性, 提供一个EPR导引的充分必要条件. 2011年, Cavalcanti等人^[33]推广了Wiseman等人^[22]定义的两体系统中的量子导引, 并推导了一些不等式来检验Bell非局域性、量子导引和量子纠缠. 2013年, He和Reid^[34]开发了一般 N 体态的量子导引, 证明了某些多体纠缠态不具有的一些有用性质, 并应用到了单向无装置量子密钥分享中. 2015年, Cavalcanti等人^[35]利用多体量子导引的方法进行非对称量子网络中的多体纠缠检测. 2016年, Quan等人^[36]研究了投影测量环境下两体Bell对角态的可导引性, Chen等人^[37]证明Bell非局域态可以通过违反EPR导引不等式来检测, 且Bell非局域态可以由一些可导引态来构造. 2017年, Cavalcanti等人^[38]系统综述了量子导引中的半正定优化方法; 郑玉麟^[39]研究了量子纠缠与量子导引的判定问题. 2018年, Ren等人^[40]基于2-测量与3-测量协议的线性导引不等式与CHSH型导引不等式, 从数学上推导出了极大可导引2-比特混合态; 文献^[41]引入并研究了量子导引广义鲁棒性; 文

献^[42]给出了不可导引的必要条件和充分条件, 进而建立了一个EPR导引不等式. Cao与Guo^[43]提出了两体量子系统中的Bell非局域性及量子导引的数学定义, 并建立了它们的一系列等价刻画, 得到了可导引性的一些充分条件. 在多体量子导引的实验研究方面, Zeng等人^[44]在实验上首次观测到了高维非局域量子操控效应, 这是对现有量子非局域效应研究的一次重要补充.

本文研究三体量子系统 ABC 中两类导引方案: 单边设备独立导引方案与双边设备独立导引方案. 根据对局域隐态与局域隐变量的要求不同, 它们又可分 $A \rightarrow BC$ 导引与强 $A \rightarrow BC$ 可导; $AB \rightarrow C$ 导引与强 $AB \rightarrow C$ 导引. 我们将在给出这些导引方案的数学定义的基础上, 建立各种方案可行的等价刻画及充分条件.

2 单边设备独立导引方案

首先, 介绍一些要用到的数学符号与概念. 用 $\mathcal{H}_S$ 表示量子系统 S 的状态空间, 它是一个 d_S 维复Hilbert空间, I_S 表示 $\mathcal{H}_S$ 上的恒等算子, $\mathcal{D}_S$ 为系统 S 的所有量子态(空间 $\mathcal{H}_S$ 上迹为1的正算子)之集, 用 $\langle X, Y \rangle = \text{tr}(X^\dagger Y)$ 表示算子 X 与 Y 的Hilbert-Schmidt内积. 量子系统 ABC 的状态空间记为 $\mathcal{H}_{ABC} = \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B \otimes \mathcal{H}_C$, 以下用

$$\mathcal{M}_A = \left\{ \{M_{a|x}\}_{a=1}^{o_A} : x = 1, 2, \dots, m_A \right\} \equiv \{M_{a|x}\}_{a,x}$$

表示 A 系统上 m_A 个正算子值(POV)测量之集, 称为一个测量组合, 它表示Alice的一组测量设备. 其中, x 表示测量 $M^x = \{M_{a|x}\}_{a=1}^{o_A}$ 的标号(编号), 视为实验的输入, 它可与测量 M^x 等同; a 表示测量结果(测量仪器 M^x 上的一个刻度), 视为实验的输出; 空间 $\mathcal{H}_A$ 上的正算子 $M_{a|x}$ 为测量 x (即 M^x)的第 a 个测量算子, 它们必须满足“完备性条件”: $\sum_{a=1}^{o_A} M_{a|x} = I_A$. 为方便, 我们称一个正算子为一个“拟态”(Quasi-State). 于是, 非零的拟态除以它的迹之后就是一个标准量子态.

三体系统 ABC 中的单边设备独立导引方案的目的是: 系统的3个远距离观测者之一(比如Alice, 简称 A)通过在其子系统上的测量来操控其他两个观测者(比如Bob与Charlie, 简称 BC)的状态. 简称 A 导

引(操控) BC , 记为 $A \rightarrow BC$ 导引. 如果Alice用一组测量 $\mathcal{M}_A = \{M_{a|x}\}_{a,x}$ 来测量她的系统, 且测量前系统处于状态 ρ^{ABC} , 那么测量后就得到Bob与Charlie共享系统的一组拟态(称为“拟态组合”):

$$\rho_{a|x}^{BC} = \text{tr}_A[(M_{a|x} \otimes I_{BC})\rho^{ABC}].$$

进而分析她为Bob与Charlie准备的这些状态. 如果得到的拟态组合没有“局域隐态-隐变量”模型, 那么Alice就可用这一组测量来导引(操控)Bob与Charlie的状态. 否则, 她就必须寻找其他的测量组合实现对Bob与Charlie的状态的导引(操控). 我们称这种引导情景为 $A \rightarrow BC$ 导引方案, 参见图 1.

下面我们给出这种导引方案不可行性(即不可导性)与可行性(即可导性)的数学定义. 根据局域隐态的要求不同, 这种导引方案又分为“ $A \rightarrow BC$ 导引”与“强 $A \rightarrow BC$ 导引”.

定义2.1($A \rightarrow BC$ 导引) 对于量子态 ρ^{ABC} 及测量组合 $\mathcal{M}_A = \{M_{a|x}\}_{a,x}$, 若存在一个概率分布 $\{\pi(\lambda)\}_{\lambda=1}^d$ 和一组量子态 $\{\rho_\lambda^{BC}\}_{\lambda=1}^d \subset \mathcal{D}_{BC}$ 使得: $\forall x, a$, 总有

$$\rho_{a|x}^{BC} = \sum_{\lambda=1}^d \pi(\lambda) P_A(a|x, \lambda) \rho_\lambda^{BC}, \quad (1)$$

其中, $\{P_A(a|x, \lambda)\}_a$ 为测量输出 a 的概率分布, 则称 ρ^{ABC} 在测量组合 $\mathcal{M}_A$ 下是 $A \rightarrow BC$ 不可导引的. 否则, 称 ρ^{ABC} 在测量组合 $\mathcal{M}_A$ 下是 $A \rightarrow BC$ 可导引的.

如果 ρ^{ABC} 在任意测量组合下都是 $A \rightarrow BC$ 不可

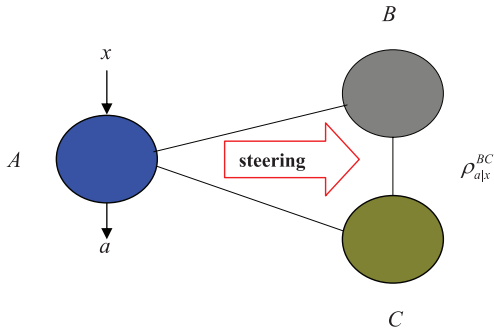


图 1 (网络版彩图)单边设备独立导引方案, 又称 $A \rightarrow BC$ 导引方案

Figure 1 (Color online) One-sided device-independent steering scenario, also called $A \rightarrow BC$ steering scenario.

导引的, 那么称 ρ^{ABC} 是 $A \rightarrow BC$ 不可导引的. 否则, 称 ρ^{ABC} 是 $A \rightarrow BC$ 可导引的.

式(1)称为局域隐变量-隐态模型(LHV-LHS模型), λ 称为隐变量(HV), ρ_λ^{BC} 称为隐态(HS).

注2.1 当 ρ^{ABC} 在测量组合 $\mathcal{M}_A$ 下是 $A \rightarrow BC$ 不可导引时, 对式(1)两边关于测量结果 a 求和得到 ρ^{ABC} 在系统 BC 上的约化密度算子 ρ^{BC} 有如下分解:

$$\rho^{BC} = \sum_{\lambda=1}^d \pi(\lambda) \rho_\lambda^{BC}.$$

注2.2 ρ^{ABC} 在测量组合 $\mathcal{M}_A$ 下是 $A \rightarrow BC$ 不可导引的当且仅当存在空间 $\mathcal{H}_{BC}$ 上的一组正算子 $\{\sigma_\lambda^{BC}\}_{\lambda=1}^d$ 使得

$$\text{tr}_A[(M_{a|x} \otimes I_{BC})\rho^{ABC}] = \sum_{\lambda=1}^d P_A(a|x, \lambda) \sigma_\lambda^{BC}, \quad \forall x, a, \quad (2)$$

其中, $\{P_A(a|x, \lambda)\}_a$ 是概率分布.

事实上, 必要性显然成立. 为证充分性, 设式(2)成立, 记

$$\pi(\lambda) = \text{tr}(\sigma_\lambda^{BC}), \quad \rho_\lambda^{BC} = \begin{cases} \frac{1}{\pi(\lambda)} \sigma_\lambda^{BC}, & \pi(\lambda) > 0, \\ \frac{1}{d_B d_C} I_{BC}, & \pi(\lambda) = 0. \end{cases}$$

则对于任意的 x, a , 式(1)成立, 从而 ρ^{ABC} 在 $\mathcal{M}_A$ 下是 $A \rightarrow BC$ 不可导引的.

以下, 用 $US^{A \rightarrow BC}(\mathcal{M}_A)$ 表示全体在测量组合 $\mathcal{M}_A$ 下的 $A \rightarrow BC$ 不可导引态之集, $US^{A \rightarrow BC}$ 表示全体 $A \rightarrow BC$ 不可导引态之集. 于是

$$US^{A \rightarrow BC} = \bigcap_{\mathcal{M}_A} US^{A \rightarrow BC}(\mathcal{M}_A),$$

这说明: ρ^{ABC} 是 $A \rightarrow BC$ 不可导引的, 当且仅当它在任意测量组合 $\mathcal{M}_A$ 下都是 $A \rightarrow BC$ 不可导引的.

再用 $S^{A \rightarrow BC}(\mathcal{M}_A)$ 表示全体在 $\mathcal{M}_A$ 下的 $A \rightarrow BC$ 可导引态之集, $S^{A \rightarrow BC}$ 表示全体 $A \rightarrow BC$ 可导引态之集. 于是

$$S^{A \rightarrow BC} = \bigcup_{\mathcal{M}_A} S^{A \rightarrow BC}(\mathcal{M}_A).$$

这说明: ρ^{ABC} 是 $A \rightarrow BC$ 可导引的, 当且仅当它在某个测量组合 $\mathcal{M}_A$ 下是 $A \rightarrow BC$ 是可导引的.

注2.3 对于系统A上的任意测量组合 $\mathcal{M}_A$, 用 Ω 表示从测量标号(输入)集 $S_m = \{1, 2, \dots, m_A\}$ 到测量结果标号(输出)集 $S_o = \{1, 2, \dots, o_A\}$ 中的所有映射之集, 它有 $N_A := o_A^{m_A}$ 元素, 因此可表示为 $\Omega = \{J_1, J_2, \dots, J_{N_A}\}$. 类似于[43, Theorem 3.3]知: Alice收到经典信息 λ 后, 选择第 x 个测量且得到结果 a 的概率 $P_A(a|x, \lambda)$ 可表示为

$$P_A(a|x, \lambda) = \sum_{k=1}^{N_A} p_A(k, \lambda) \delta_{a, J_k(x)}, \quad (3)$$

其中, $p_A(k, \lambda) \geq 0 (\forall k, \lambda)$ 且满足

$$\sum_{k=1}^{N_A} p_A(k, \lambda) = 1 (\forall \lambda).$$

进而可得以下结论.

$\rho^{ABC} \in US^{A \rightarrow BC}(\mathcal{M}_A)$ 当且仅当存在 BC 系统上的一组正算子 $\{\tau_k^{BC}\}_{k=1}^{N_A}$ 使得

$$\text{tr}_A[(M_{a|x} \otimes I_{BC})\rho^{ABC}] = \sum_{k=1}^{N_A} \delta_{a, J_k(x)} \tau_k^{BC}, \quad \forall x, a. \quad (4)$$

在式(4)中, 右边的 $\delta_{a, J_k(x)}$ 仅与Alice的测量组合 $\mathcal{M}_A$ 有关, 与量子态 ρ^{ABC} 无关; “条件隐态” τ_k^{BC} 与 $\mathcal{M}_A$ 无关, 仅与量子态 ρ^{ABC} 无关. 其次, 求和的项数是固定的, 仅与Alice的测量组合 $\mathcal{M}_A$ 有关, 与量子态 ρ^{ABC} 无关. 这些优点有利于我们研究不可导引态的整体性质. 例如, 由这一刻画很容易看到: 集合 $US^{A \rightarrow BC}(\mathcal{M}_A)$ 是 $\mathcal{D}_{ABC}$ 中的紧凸集, 于是, $US^{A \rightarrow BC}$ 是 $\mathcal{D}_{ABC}$ 中的紧凸集. 我们称方程组(4)为一个局域隐算子模型(LHOM).

在定义2.1中, 我们没有要求隐态 $\rho_\lambda^{BC} \in \mathcal{D}_{BC}$ 是乘积态. 如果加上这一要求, 则有下面的定义.

定义2.2(强 $A \rightarrow BC$ 导引) 对于量子态 ρ^{ABC} 及测量组合 $\mathcal{M}_A = \{M_{a|x}\}_{a,x}$, 若存在一个概率分布 $\{\pi(\lambda)\}_{\lambda=1}^d$ 和乘积态 $\rho_\lambda^B \otimes \rho_\lambda^C \in \mathcal{D}_{BC}$ 使得 $\forall x, a$, 有

$$\text{tr}_A[(M_{a|x} \otimes I_{BC})\rho^{ABC}] = \sum_{\lambda=1}^d \pi(\lambda) P_A(a|x, \lambda) \rho_\lambda^B \otimes \rho_\lambda^C, \quad (5)$$

其中, $\{P_A(a|x, \lambda)\}_a$ 为测量输出 a 的概率分布, 则称 ρ^{ABC} 在 $\mathcal{M}_A$ 下是强 $A \rightarrow BC$ 不可导引的. 否则, 称 ρ^{ABC} 在 $\mathcal{M}_A$ 下是强 $A \rightarrow BC$ 可导引的.

如果 ρ^{ABC} 在任意测量组合 $\mathcal{M}_A$ 下都是强 $A \rightarrow BC$ 不可导引的, 那么称 ρ^{ABC} 是强 $A \rightarrow BC$ 不可导引的. 否则, 称 ρ^{ABC} 是强 $A \rightarrow BC$ 可导引的.

注2.4 由定义2.2可知:

(1) ρ^{ABC} 在 $\mathcal{M}_A$ 下是强 $A \rightarrow BC$ 不可导引的当且仅当存在一个概率分布 $\{\pi(\lambda)\}_{\lambda=1}^d$ 和一组可分态 $\{\rho_\lambda^{BC}\}_{\lambda=1}^d$ 使得式(5)成立;

(2) 如果 ρ^{ABC} 在 $\mathcal{M}_A$ 下是强 $A \rightarrow BC$ 不可导引的, 那么在A的任意测量 x 及任意输出 a 下, $\text{tr}_A[(M_{a|x} \otimes I_{BC})\rho^{ABC}]$ 是0, 或准可分态(即除以它的迹后为可分态).

以下, 用 $SUS^{A \rightarrow BC}(\mathcal{M}_A)$ 表示在测量组合 $\mathcal{M}_A$ 下的全体强 $A \rightarrow BC$ 不可导引态之集, $SUS^{A \rightarrow BC}$ 表示全体强 $A \rightarrow BC$ 不可导引态之集. 于是

$$SUS^{A \rightarrow BC} = \bigcap_{\mathcal{M}_A} SUS^{A \rightarrow BC}(\mathcal{M}_A),$$

再用 $SS^{A \rightarrow BC}(\mathcal{M}_A)$ 表示在测量组合 $\mathcal{M}_A$ 下的全体强 $A \rightarrow BC$ 可导引态之集, $SS^{A \rightarrow BC}$ 表示全体强 $A \rightarrow BC$ 可导引态之集. 因而

$$SS^{A \rightarrow BC} = \bigcup_{\mathcal{M}_A} SS^{A \rightarrow BC}(\mathcal{M}_A).$$

由定义2.1与2.2可知:

$$SUS^{A \rightarrow BC}(\mathcal{M}_A) \subset US^{A \rightarrow BC}(\mathcal{M}_A),$$

$$SS^{A \rightarrow BC}(\mathcal{M}_A) \supset S^{A \rightarrow BC}(\mathcal{M}_A),$$

$$SUS^{A \rightarrow BC} \subset US^{A \rightarrow BC}, \quad SS^{A \rightarrow BC} \supset S^{A \rightarrow BC}.$$

注2.5 类似于[43, Theorem 3.3]的证明可知: $\rho^{ABC} \in SUS^{A \rightarrow BC}(\mathcal{M}_A)$ 当且仅当存在 BC 系统上的一组“可分正算子” $\{\tau_k^{BC}\}_{k=1}^{N_A}$ 使得

$$\text{tr}_A[(M_{a|x} \otimes I_{BC})\rho^{ABC}] = \sum_{k=1}^{N_A} \delta_{a, J_k(x)} \tau_k^{BC}, \quad \forall x, a, \quad (6)$$

其中, “可分正算子”是指乘积态的非负系数组合, 即与可分态相差一个正常数倍的算子. 例如, 式(2)右边的算子就是一个可分正算子.

由以上刻画可知: $SUS^{A \rightarrow BC}(\mathcal{M}_A)$ 是 $\mathcal{D}_{ABC}$ 中的紧凸集, 于是, $SUS^{A \rightarrow BC}$ 是 $\mathcal{D}_{ABC}$ 中的紧凸集.

例2.1 (1) 完全可分态

$$\rho^{ABC} = \sum_{\lambda} \pi(\lambda) \rho_\lambda^A \otimes \rho_\lambda^B \otimes \rho_\lambda^C$$

是强 $A \rightarrow BC$ 不可导引的(取 $P_A(a|x, \lambda) = \text{tr}(M_{a|x}\rho_\lambda^A)$), 从而是 $A \rightarrow BC$ 不可导引的.

(2) CXX-态[45, Theorem 2.1]

$$\rho^{ABC} = \sum_{\lambda} |e_{\lambda}\rangle\langle e_{\lambda}| \otimes \delta_{\lambda}$$

是 $A \rightarrow BC$ 不可导引的(取 $P_A(a|x, \lambda) = \langle e_{\lambda}|M_{a|x}|e_{\lambda}\rangle$).

(3) 三粒子GHZ态 $\rho^{ABC} = |GHZ_3\rangle\langle GHZ_3|$ 是强 $A \rightarrow BC$ 可导引的, 其中

$$|GHZ_3\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|000\rangle + |111\rangle).$$

这是因为: 当 $|\varphi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle)$ 时, 有

$$\text{tr}_A[(|\varphi\rangle\langle\varphi| \otimes I_{BC})\rho^{ABC}] = \frac{1}{2}|\psi\rangle\langle\psi|,$$

其中, $|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle)$, 它不是可分的. 因此, ρ^{ABC} 关于投影测量 $\{|\varphi\rangle\langle\varphi|, I - |\varphi\rangle\langle\varphi|\}$ 不是强 $A \rightarrow BC$ 不可导引的, 从而是强 $A \rightarrow BC$ 可导引的.

为了说明 $\rho^{ABC} = |GHZ_3\rangle\langle GHZ_3|$ 也是 $A \rightarrow BC$ 可导引的, 我们需要以下的 $A \rightarrow BC$ 可导引的充分条件.

命题2.1 对于三体态 $\rho^{ABC} \in \mathcal{D}_{ABC}$, 如果存在系统 A 上的两个正算子值测量 $P = \{P_i : i = 1, 2, \dots, o_A\}$ 与 $Q = \{Q_i : i = 1, 2, \dots, o_A\}$, 使得其测量输出满足:

$$\text{tr}_A[(P_i \otimes I_{BC})\rho^{ABC}] = c_i |e_i\rangle\langle e_i|, \quad (7)$$

$$\text{tr}_A[(Q_i \otimes I_{BC})\rho^{ABC}] = d_i |f_i\rangle\langle f_i|, \quad (8)$$

其中, $c_i, d_i \geq 0 (i = 1, 2, \dots, o_A)$, $\{|e_i\rangle\}_{i=1}^{o_A}$ 与 $\{|f_i\rangle\}_{i=1}^{o_A}$ 是系统 BC 的两组纯态, 且满足 $|e_i\rangle\langle e_i| \neq |f_j\rangle\langle f_j| (c_i d_j > 0)$, 那么 ρ^{ABC} 在任何包含 P 及 Q 的正算子值测量组合下是 $A \rightarrow BC$ 可导引的.

证明 假设 ρ^{ABC} 在某个包含 P 及 Q 的正算子值测量组合 $\mathcal{M}_A$ 下是 $A \rightarrow BC$ 不可导引的, 则存在概率分布 $\{\pi(\lambda)\}_{\lambda=1}^d$ 和量子态 $\{\sigma_{\lambda}^{BC}\}_{\lambda=1}^d \subset \mathcal{D}_{BC}$ 使得对于任意的 $M = \{E_i\}_{i=1}^m \in \mathcal{M}_A$, 都有

$$\text{tr}_A[(E_i \otimes I_{BC})\rho^{ABC}] = \sum_{\lambda=1}^d \pi(\lambda) P_A(i|M, \lambda) \sigma_{\lambda}^{BC},$$

其中, $\{P_A(i|M, \lambda)\}_{i=1}^m$ 是概率分布. 不妨设 $\pi(\lambda) > 0 (\lambda = 1, 2, \dots, d)$. 由于式(7)和(8)成立, 所以

$$\sum_{\lambda=1}^d \pi(\lambda) P_A(i|P, \lambda) \sigma_{\lambda}^{BC} = c_i |e_i\rangle\langle e_i|, \quad (9)$$

$$\sum_{\lambda=1}^d \pi(\lambda) P_A(j|Q, \lambda) \sigma_{\lambda}^{BC} = d_j |f_j\rangle\langle f_j|. \quad (10)$$

因此, 由式(9)和(10)得: 当 $c_i d_j > 0$ 时, 有

$$0 \leq c_i^{-1} \pi(\lambda) P_A(i|P, \lambda) \sigma_{\lambda}^{BC} \leq |e_i\rangle\langle e_i|,$$

$$0 \leq d_j^{-1} \pi(\lambda) P_A(j|Q, \lambda) \sigma_{\lambda}^{BC} \leq |f_j\rangle\langle f_j|.$$

所以, 存在 $a_{i,\lambda}, b_{j,\lambda} \in [0, 1]$ 使得

$$c_i^{-1} \pi(\lambda) P_A(i|P, \lambda) \sigma_{\lambda}^{BC} = a_{i,\lambda} |e_i\rangle\langle e_i|,$$

$$d_j^{-1} \pi(\lambda) P_A(j|Q, \lambda) \sigma_{\lambda}^{BC} = b_{j,\lambda} |f_j\rangle\langle f_j|.$$

于是

$$\pi(\lambda) P_A(i|P, \lambda) \sigma_{\lambda}^{BC} = c_i a_{i,\lambda} |e_i\rangle\langle e_i|, \quad (11)$$

$$\pi(\lambda) P_A(j|Q, \lambda) \sigma_{\lambda}^{BC} = d_j b_{j,\lambda} |f_j\rangle\langle f_j|. \quad (12)$$

根据(9)和(10)知: 当 $c_i = 0$ 时, 必有 $P_A(i|P, \lambda) = 0$, 此时, 取 $a_{i,\lambda} = 0$; 当 $d_j = 0$ 时, 必有 $P_A(j|Q, \lambda) = 0$, 此时, 取 $b_{j,\lambda} = 0$. 因此, 式(11)和(12)对所有的 i, j, λ 都成立. 因为

$$P_A(i|P, \lambda) \geq 0 (\forall \lambda, i), \quad \sum_{i=1}^m P_A(i|P, \lambda) = 1 (\forall \lambda),$$

$$P_A(j|Q, \lambda) \geq 0 (\forall \lambda, j), \quad \sum_{j=1}^m P_A(j|Q, \lambda) = 1 (\forall \lambda),$$

所以, 对每个 λ , 存在 i_{λ} 与 j_{λ} 使得

$$P_A(i_{\lambda}|P, \lambda) > 0, \quad P_A(j_{\lambda}|Q, \lambda) > 0.$$

由(11)和(12)知

$$\pi(\lambda) \sigma_{\lambda}^{BC} = \frac{c_{i_{\lambda}} a_{i_{\lambda}, \lambda}}{P_A(i_{\lambda}|P, \lambda)} |e_{i_{\lambda}}\rangle\langle e_{i_{\lambda}}|,$$

$$\pi(\lambda) \sigma_{\lambda}^{BC} = \frac{d_{j_{\lambda}} b_{j_{\lambda}, \lambda}}{P_A(j_{\lambda}|Q, \lambda)} |f_{j_{\lambda}}\rangle\langle f_{j_{\lambda}}|.$$

于是, $c_{i_{\lambda}} d_{j_{\lambda}} > 0$. 取迹得到

$$\sigma_{\lambda}^{BC} = |e_{i_{\lambda}}\rangle\langle e_{i_{\lambda}}| = |f_{j_{\lambda}}\rangle\langle f_{j_{\lambda}}| (\lambda = 1, 2, \dots, d).$$

这与条件 $|e_i\rangle\langle e_i| \neq |f_j\rangle\langle f_j| (c_i d_j > 0)$ 矛盾. 证毕.

例2.2 三粒子GHZ态 $\rho^{ABC} = |GHZ_3\rangle\langle GHZ_3|$ 是 $A \rightarrow BC$ 可导引的.

证明 设 $\{P, Q\}$ 是 A 的一个投影测量组合, 其中

$$P = \{|e_1\rangle\langle e_1|, |e_2\rangle\langle e_2|\}, Q = \{|f_1\rangle\langle f_1|, |f_2\rangle\langle f_2|\}$$

满足 $|e_i\rangle\langle e_i| \neq |f_j\rangle\langle f_j| (\forall i, j)$. 计算可得

$$\text{tr}_A[(|e_1\rangle\langle e_1| \otimes I_{BC})\rho^{ABC}] = \frac{1}{2}|e'_1\rangle\langle e'_1|,$$

$$\text{tr}_A[(|e_2\rangle\langle e_2| \otimes I_{BC})\rho^{ABC}] = \frac{1}{2}|e'_2\rangle\langle e'_2|,$$

$$\text{tr}_A[(|f_1\rangle\langle f_1| \otimes I_{BC})\rho^{ABC}] = \frac{1}{2}|f'_1\rangle\langle f'_1|,$$

$$\text{tr}_A[(|f_2\rangle\langle f_2| \otimes I_{BC})\rho^{ABC}] = \frac{1}{2}|f'_2\rangle\langle f'_2|,$$

其中,

$$|e'_1\rangle = \langle e_1|0\rangle|00\rangle + \langle e_1|1\rangle|11\rangle,$$

$$|e'_2\rangle = \langle e_2|0\rangle|00\rangle + \langle e_2|1\rangle|11\rangle,$$

$$|f'_1\rangle = \langle f_1|0\rangle|00\rangle + \langle f_1|1\rangle|11\rangle,$$

$$|f'_2\rangle = \langle f_2|0\rangle|00\rangle + \langle f_2|1\rangle|11\rangle.$$

显然, $|e'_i\rangle\langle e'_i| \neq |f'_j\rangle\langle f'_j| (\forall i, j)$. 因此, 由命题2.1知: ρ^{ABC} 在 $\{P, Q\}$ 下是 $A \rightarrow BC$ 可导引的. 由定义2.1知: ρ^{ABC} 是 $A \rightarrow BC$ 可导引的. 证毕.

注2.6 由定义2.2可以证明: ρ^{ABC} 在 $\mathcal{M}_A$ 下是强 $A \rightarrow BC$ 不可导引的当且仅当存在概率分布 $\{\pi(\lambda)\}_{\lambda=1}^d$ 及一组可分态 $\{\sigma_\lambda^{BC}\}_{\lambda=1}^d \subset \mathcal{D}_{BC}$ 使得 $\forall x, a$, 有

$$\text{tr}_A[(M_{a|x} \otimes I_{BC})\rho^{ABC}] = \sum_{\lambda=1}^d \pi(\lambda)P_A(a|x, \lambda)\sigma_\lambda^{BC}, \quad (13)$$

其中, $\{P_A(a|x, \lambda)\}_a (\forall x, \lambda)$ 是概率分布.

其实, 必要性显然成立. 为证充分性, 设存在概率分布 $\{\pi(\lambda)\}_{\lambda=1}^d$ 及一组可分态 $\{\sigma_\lambda^{BC}\}_{\lambda=1}^d \subset \mathcal{D}_{BC}$, 使得式(13)成立, 则 σ_λ^{BC} 可以表示为乘积态的凸组合:

$$\sigma_\lambda^{BC} = \sum_{i=1}^N c_{\lambda,i} \rho_{\lambda,i}^B \otimes \rho_{\lambda,i}^C (\lambda = 1, 2, \dots, d).$$

记 $p(\lambda, i) = \pi(\lambda)c_{\lambda,i}$, $P_A(a|x, \lambda, i) = P_A(a|x, \lambda)$, 则

$$\sum_{\lambda,i} p(\lambda, i) = \sum_{\lambda} \pi(\lambda) \sum_i c_{\lambda,i} = 1,$$

$$\sum_a P_A(a|x, \lambda, i) = \sum_a P_A(a|x, \lambda) = 1,$$

且由(13)知 $\forall x, a$, 都有

$$\text{tr}_A[(M_{a|x} \otimes I_{BC})\rho^{ABC}] = \sum_{\lambda,i} q(\lambda, i)P_A(a|x, \lambda, i)\rho_{\lambda,i}^B \otimes \rho_{\lambda,i}^C.$$

由定义2.2知: ρ^{ABC} 在 $\mathcal{M}_A$ 下是强 $A \rightarrow BC$ 不可导引的.

以下给出 $A \rightarrow BC$ 不可导引性的若干等价刻画.

定理2.1 设 $\rho^{ABC} \in \mathcal{D}_{ABC}$, 则 ρ^{ABC} 在测量组合 $\mathcal{M}_A$ 下是 $A \rightarrow BC$ 不可导引的当且仅当存在概率分布 $\{\pi(\lambda)\}_\lambda$, $\{P_A(a|x, \lambda)\}_a$ 以及量子态 $\{\rho_\lambda^{BC}\}_\lambda \subset \mathcal{D}_{BC}$, 使得对 BC 系统上的任意正算子值测量 $\{N_t\}_{t=1}^{o_{BC}}$ 以及任意的 x, a, t , 都有

$$\text{tr}[(M_{a|x} \otimes N_t)\rho^{ABC}] = \sum_{\lambda} \pi(\lambda)P_A(a|x, \lambda)\text{tr}(N_t\rho_\lambda^{BC}). \quad (14)$$

证明 必要性: 设 ρ^{ABC} 在 $\mathcal{M}_A$ 下是 $A \rightarrow BC$ 不可导引的, 则存在概率分布 $\{\pi(\lambda)\}_\lambda$, $\{P_A(a|x, \lambda)\}_a$ 以及 $\rho_\lambda^B \in D(H_B)$, $\rho_\lambda^{BC} \in \mathcal{D}_{BC}$, 使得式(1)成立. 因此, 对于任意的正算子值测量 $\{N_t\}_{t=1}^{o_{BC}}$, 及 $\forall x, a, t$, 都有

$$\begin{aligned} & \text{tr}[(M_{a|x} \otimes N_t)\rho^{ABC}] \\ &= \text{tr}[N_t \text{tr}_A((M_{a|x} \otimes I_B \otimes I_C)\rho^{ABC})] \\ &= \text{tr}\left[N_t \left(\sum_{\lambda} \pi(\lambda)P_A(a|x, \lambda)\rho_\lambda^{BC}\right)\right] \\ &= \sum_{\lambda} \pi(\lambda)P_A(a|x, \lambda)\text{tr}(N_t\rho_\lambda^{BC}). \end{aligned}$$

充分性: 设存在概率分布 $\{\pi(\lambda)\}_\lambda$, $\{P_A(a|x, \lambda)\}_a$ 和 $\rho_\lambda^{BC} \in \mathcal{D}_{BC}$, 使得对 BC 系统上的任意正算子值测量 $\{N_t\}_{t=1}^{o_{BC}}$ 都有式(14)成立. 令 $\{N_t\} = \{P, I - P\}$, 其中 P 为 BC 系统上的任意投影算子, 则

$$\begin{aligned} \text{tr}[(M_{a|x} \otimes P)\rho^{ABC}] &= \sum_{\lambda} \pi(\lambda)P_A(a|x, \lambda)\text{tr}(P\rho_\lambda^{BC}) \\ &= \text{tr}\left[P \left(\sum_{\lambda} \pi(\lambda)P_A(a|x, \lambda)\rho_\lambda^{BC}\right)\right] \\ &= \left\langle P, \sum_{\lambda} \pi(\lambda)P_A(a|x, \lambda)\rho_\lambda^{BC} \right\rangle. \end{aligned}$$

另一方面,

$$\text{tr}[(M_{a|x} \otimes P)\rho^{ABC}] = \text{tr}[P \text{tr}_A((M_{a|x} \otimes I_{BC})\rho^{ABC})]$$

$$= \langle P, \text{tr}_A[(M_{a|x} \otimes I_{BC})\rho^{ABC}] \rangle.$$

因此,

$$\begin{aligned} & \langle P, \text{tr}_A[(M_{a|x} \otimes I^{BC})\rho^{ABC}] \rangle \\ &= \left\langle P, \sum_{\lambda} \pi(\lambda) P_A(a|x, \lambda) \rho_{\lambda}^{BC} \right\rangle. \end{aligned}$$

于是, 对于任意的 x, a , 有

$$\text{tr}_A[(M_{a|x} \otimes I^{BC})\rho^{ABC}] = \sum_{\lambda} \pi(\lambda) P_A(a|x, \lambda) \rho_{\lambda}^{BC}.$$

故 ρ^{ABC} 在 $\mathcal{M}_A$ 下是 $A \rightarrow BC$ 不可导引的. 证毕.

根据注 2.4, 类似于定理 2.1 的证明可以得到以下定理:

定理 2.2 ρ^{ABC} 在测量组合 $\mathcal{M}_A$ 下是强 $A \rightarrow BC$ 不可导引的当且仅当存在概率分布 $\{\pi(\lambda)\}_{\lambda=1}^d$ 及一组可分态 $\{\rho_{\lambda}^{BC}\}_{\lambda=1}^d \subset \mathcal{D}_{BC}$, 使得对 BC 系统上的任意正算子值测量 $\{N_t\}_{t=1}^{o_{BC}}$ 及 $\forall x, a, t$, 都有

$$\text{tr}[(M_{a|x} \otimes N_t)\rho^{ABC}] = \sum_{\lambda=1}^d \pi(\lambda) P_A(a|x, \lambda) \text{tr}(N_t \rho_{\lambda}^{BC}),$$

其中, $\{P_A(a|x, \lambda)\}_a$ 是概率分布.

量子系统 S 上的测量组合 $\mathcal{M}_S = \{\{M_{s|x}\}_{s=1}^{o_S} : x = 1, 2, \dots, m_S\}$ 是相容的, 是指存在系统 S 上的一个正算子值测量 $\{G_{\lambda} : \lambda = 1, 2, \dots, h\}$ 使得

$$M_{s|x} = \sum_{\lambda=1}^h P_S(s|x, \lambda) G_{\lambda}, \quad \forall x, s,$$

其中, $\{P_S(s|x, \lambda)\}$ 为测量输出 s 的概率分布.

定理 2.3 相容测量组合不能导引任何量子态, 即当 $\mathcal{M}_A$ 是系统 A 上相容的测量组合时, 任何量子态 $\rho^{ABC} \in \mathcal{D}_{ABC}$ 在 $\mathcal{M}_A$ 下都是 $A \rightarrow BC$ 不可导引的.

证明 因为 $\mathcal{M}_A = \{\{M_{a|x}\}_{a=1}^{o_A} : x = 1, 2, \dots, m_A\}$ 是相容的, 所以存在系统 A 的正算子值测量 $\{G_{\lambda} : \lambda = 1, 2, \dots, h\}$ 使得

$$M_{a|x} = \sum_{\lambda=1}^h P_A(a|x, \lambda) G_{\lambda}, \quad \forall x, a,$$

其中, $P_A(a|x, \lambda) \geq 0 (\forall a, x, \lambda)$ 且

$$\sum_{a=1}^{o_A} P_A(a|x, \lambda) = 1 (\forall x, \lambda).$$

从而, 对任何 $\rho^{ABC} \in \mathcal{D}_{ABC}$ 及任意的 x, a , 都有

$$\text{tr}_A[(M_{a|x} \otimes I_{BC})\rho^{ABC}] = \sum_{\lambda=1}^h P_A(a|x, \lambda) \text{tr}_A[(G_{\lambda} \otimes I_{BC})\rho^{ABC}].$$

记 $\sigma_{\lambda}^{BC} = \text{tr}_A[(G_{\lambda} \otimes I_{BC})\rho^{ABC}]$, 则对于任意的 x, a , 式 (2) 成立, 故由注 2.2 知 ρ^{ABC} 在测量 $\mathcal{M}_A$ 下是 $A \rightarrow BC$ 不可导引的. 证毕.

对于系统 A 的正算子值测量组合 $\mathcal{M}_A$ 及 $\rho^{ABC} \in \mathcal{D}_{ABC}$, 记

$$\rho_{a|x} = \text{tr}_A[(M_{a|x} \otimes I_{BC})\rho^{ABC}],$$

则 $\sum_a \rho_{a|x} = \text{tr}_A(\rho^{ABC}) := \rho_{BC}$. 因此, $\forall x, a$, 有

$$\ker(\rho_{BC}) = \bigcap_{a=1}^{o_A} \ker(\rho_{a|x}) \subset \ker(\rho_{a|x}).$$

从而, $\forall x, a$, 有

$$\text{ran}(\rho_{BC}) = (\ker(\rho_{BC}))^{\perp} \supset (\ker(\rho_{a|x}))^{\perp} = \text{ran}(\rho_{a|x}).$$

记 $M := \text{ran}(\rho_{BC})$, 则关于 Hilbert 空间的正交分解 $\mathcal{H}_{BC} = M \oplus M^{\perp}$, 算子 ρ_{BC} 有以下的矩阵表示

$$\rho_{BC} = \begin{pmatrix} \eta & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \rho_{a|x} = \begin{pmatrix} f_{a|x} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

其中, $\eta = P_M \rho_{BC}|_M = \rho_{BC}|_M$ 是空间 M 上的正定算子且 $\text{tr}(\eta) = 1$, $f_{a|x} = P_M \rho_{a|x}|_M = \rho_{a|x}|_M$ 是 M 上的半正定算子且 $\text{tr}(f_{a|x}) = \text{tr}(\rho_{a|x}) \leq 1$. 记 $B'_{a|x} = \eta^{-\frac{1}{2}} f_{a|x} \eta^{-\frac{1}{2}}$, 定义

$$B_{a|x} = \begin{pmatrix} B'_{a|x} & 0 \\ 0 & \frac{1}{o_A} I_{M^{\perp}} \end{pmatrix},$$

则 $B_{a|x} \geq 0 (\forall x, a)$ 且 $\sum_a B_{a|x} = I_{BC} (\forall x)$. 因此,

$$\mathcal{K}_{BC} := \{\{B_{a|x}\}_{a=1}^{o_A} : x = 1, 2, \dots, m_A\}$$

构成了 BC 系统上的测量组合, 称其为由 $\mathcal{M}_A$ 及 ρ^{ABC} 诱导的测量组合.

定理 2.4 设 $\rho^{ABC} \in \mathcal{D}_{ABC}$, $\mathcal{M}_A$ 是系统 A 的测量组合, 则 ρ^{ABC} 在 $\mathcal{M}_A$ 下是 $A \rightarrow BC$ 不可导引的当且仅当由 $\mathcal{M}_A$ 及 ρ^{ABC} 诱导的测量组合 $\mathcal{K}_{BC}$ 是相容的.

证明 必要性: 设 ρ^{ABC} 在 $\mathcal{M}_A$ 下是 $A \rightarrow BC$ 不可导引的, 则存在概率分布 $\{\pi(\lambda)\}_{\lambda=1}^d$ 和量子态 $\rho_\lambda^{BC} \in \mathcal{D}_{BC}$ 使得

$$\rho_{a|x} = \sum_{\lambda=1}^d \pi(\lambda) P_A(a|x, \lambda) \rho_\lambda^{BC}, \forall x, a,$$

其中, $\{P_A(a|x, \lambda)\}$ 为测量输出 a 的概率分布. 于是, $\forall a, x$, 有

$$\begin{aligned} \eta^{-\frac{1}{2}} f_{a|x} \eta^{-\frac{1}{2}} &= \eta^{-\frac{1}{2}} P_M \rho_{a|x|M} \eta^{-\frac{1}{2}} \\ &= \sum_{\lambda=1}^d P_A(a|x, \lambda) \pi(\lambda) \eta^{-\frac{1}{2}} \rho_\lambda^{BC} |M \eta^{-\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

令

$$G_\lambda = \begin{pmatrix} \pi(\lambda) \eta^{-\frac{1}{2}} \rho_\lambda^{BC} |M \eta^{-\frac{1}{2}} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} (1 \leq \lambda \leq d),$$

$$G_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I_{M^\perp} \end{pmatrix}, P_A(a|x, 0) = \frac{1}{o_A},$$

则 $G_\lambda \geq 0 (0 \leq \lambda \leq d)$, $\sum_{\lambda=0}^d G_\lambda = I_{BC}$ 且

$$\begin{aligned} \sum_{\lambda=0}^d P_A(a|x, \lambda) G_\lambda &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{o_A} I_{M^\perp} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \eta^{-\frac{1}{2}} f_{a|x} \eta^{-\frac{1}{2}} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} B'_{a|x} & 0 \\ 0 & \frac{1}{o_A} I_{M^\perp} \end{pmatrix} \\ &= B_{a|x}. \end{aligned}$$

这就证明了

$$B_{a|x} = \sum_{\lambda=0}^d P_A(a|x, \lambda) G_\lambda, \forall x, a.$$

因此, 测量组合 $\mathcal{K}_{BC}$ 是相容的.

充分性: 设 $\mathcal{K}_{BC}$ 是相容的, 则存在量子测量 $\{G_\lambda : \lambda = 1, 2, \dots, h\}$ 使得

$$B_{a|x} = \sum_{\lambda=1}^h P_A(a|x, \lambda) G_\lambda, \forall x, a,$$

其中, $P_A(a|x, \lambda) \geq 0 (\forall a, x, \lambda)$ 且

$$\sum_{a=1}^{o_A} P_A(a|x, \lambda) = 1 (\forall x, \lambda),$$

则

$$B'_{a|x} = \sum_{\lambda=1}^h P_A(a|x, \lambda) P_M G_\lambda |M, \forall x, a,$$

$$f_{a|x} = \sum_{\lambda=1}^h P_A(a|x, \lambda) \eta^{\frac{1}{2}} P_M G_\lambda |M \eta^{\frac{1}{2}}, \forall x, a,$$

这时, 令

$$\rho_\lambda^{BC} = \begin{pmatrix} \eta^{\frac{1}{2}} P_M G_\lambda |M \eta^{\frac{1}{2}} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

则 $\rho_\lambda^{BC} \geq 0 (\forall \lambda)$ 且

$$\rho_{a|x} = \sum_{\lambda=1}^h P_A(a|x, \lambda) \rho_\lambda^{BC}, \forall x, a.$$

根据注2.2知, ρ^{ABC} 在 $\mathcal{M}_A$ 下是 $A \rightarrow BC$ 不可导引的. 证毕.

作为定理2.4的等价形式, 我们得到下面的可导引的充分必要条件.

定理2.5 设 ρ^{ABC} 在测量组合 $\mathcal{M}_A$ 下是 $A \rightarrow BC$ 可导引的当且仅当由 $\mathcal{M}_A$ 及 ρ^{ABC} 诱导的测量组合 $\mathcal{K}_{BC}$ 是不相容的.

3 双边设备独立导引方案

本节用

$$\mathcal{M}_A = \{\{M_{a|x}\}_{a=1}^{o_A} : x = 1, 2, \dots, m_A\} \equiv \{M_{a|x}\}_{a,x},$$

$$\mathcal{N}_B = \{\{N_{b|y}\}_{b=1}^{o_B} : y = 1, 2, \dots, m_B\} \equiv \{N_{b|y}\}_{b,y}$$

分别表示 A 系统与 B 系统的正算子值测量组合.

三体系统 ABC 中的双边设备独立导引方案的目的是: 系统的三个远距离观测者之二(比如 Alice 与 Bob, 简称 AB)通过他们的系统上的测量来操控另一观测者(比如 Charlie, 简称 C)的状态. 简称 AB 导引(操控) C , 记为 $AB \rightarrow C$ 导引. 如果 Alice 用一组测量 $\mathcal{M}_A$ 、同时 Bob 用一组测量 $\mathcal{N}_B$ 来测量各自的系统, 且测量前系统处于状态 ρ^{ABC} , 那么测量后就得到 Charlie 的一组拟态(称为“拟态组合”):

$$\rho_{ab|xy}^C = \text{tr}_{AB}[(M_{a|x} \otimes N_{b|y} \otimes I_C) \rho^{ABC}].$$

进而分析他们为Charlie准备的这些状态. 如果得到的拟态组合没有“局域隐态- 隐变量”模型, 那么Alice与Bob就可用他们的这组测量来导引(操控)Charlie的状态. 否则, 他们就必须寻找其他的测量组合实现对Charlie的状态的导引(操控). 我们称这种引导情景为 $AB \rightarrow C$ 导引方案, 参见图2.

首先给出这种导引方案不可行性(即不可导性)与可行性(即可导性)的数学定义. 根据局域隐变量的独立性要求不同, 这种导引方案又分为“ $AB \rightarrow C$ 导引”与“强 $AB \rightarrow C$ 导引”. 前者不要求局域隐变量的独立性, 而后者要求局域隐变量是独立的.

定义3.1($AB \rightarrow C$ 导引) 对于量子态 ρ^{ABC} 及A系统与B系统的测量组合 $\mathcal{M}_A$ 与 $\mathcal{N}_B$, 若存在概率分布 $\{\pi(\lambda, \mu)\}_{\lambda, \mu}$, $\{P_A(a|x, \lambda)\}_a$, $\{P_B(b|y, \mu)\}_b$ 以及量子态 $\{\rho_{\lambda\mu}^C\}_{\lambda, \mu} \subset \mathcal{D}_C$ 使得 $\forall x, a, y, b$, 有

$$\rho_{ab|xy} = \sum_{\lambda, \mu} \pi(\lambda, \mu) P_A(a|x, \lambda) P_B(b|y, \mu) \rho_{\lambda\mu}^C, \quad (15)$$

则称 ρ^{ABC} 在测量组合 $(\mathcal{M}_A, \mathcal{N}_B)$ 下是 $AB \rightarrow C$ 不可导引的. 否则, 称 ρ^{ABC} 在测量组合 $(\mathcal{M}_A, \mathcal{N}_B)$ 下是 $AB \rightarrow C$ 可导引的.

用 $US^{AB \rightarrow C}(\mathcal{M}_A, \mathcal{N}_B)$ 表示在测量组合 $(\mathcal{M}_A, \mathcal{N}_B)$ 下全体 $AB \rightarrow C$ 不可导引态之集, $US^{AB \rightarrow C}$ 表示全体 $AB \rightarrow C$ 不可导引态之集. 于是

$$US^{AB \rightarrow C} = \bigcap_{\mathcal{M}_A, \mathcal{N}_B} US^{AB \rightarrow C}(\mathcal{M}_A, \mathcal{N}_B),$$

再用 $S^{A \rightarrow BC}(\mathcal{M}_A, \mathcal{N}_B)$ 表示在测量组合 $(\mathcal{M}_A, \mathcal{N}_B)$ 下的全体 $AB \rightarrow C$ 可导引态之集, $S^{AB \rightarrow C}$ 表示全体 $AB \rightarrow C$

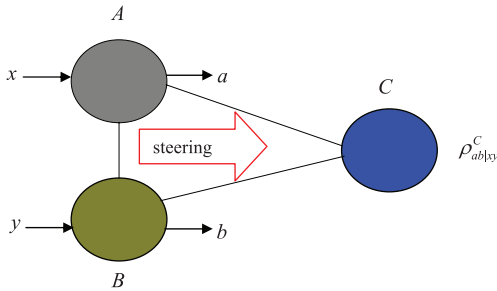


图2 (网络版彩图) 双边设备独立导引方案, 又称 $AB \rightarrow C$ 导引方案

Figure 2 (Color online) Two-sided device-independent steering scenario, also called $AB \rightarrow C$ steering scenario.

可导引态之集. 于是

$$S^{AB \rightarrow C} = \bigcup_{\mathcal{M}_A, \mathcal{N}_B} S^{AB \rightarrow C}(\mathcal{M}_A, \mathcal{N}_B).$$

注3.1 对于系统B上的任意测量组合 $\mathcal{N}_B$, 用 Ω_B 表示从测量标号(输入)集 $T_m = \{1, 2, \dots, m_B\}$ 到测量结果标号(输出)集 $T_o = \{1, 2, \dots, o_B\}$ 中的所有映射之集, 它有 $N_B := o_B^{m_B}$ 元素, 因此可表示为

$$\Omega_B = \{K_1, K_2, \dots, K_{N_B}\}.$$

于是, Bob收到经典信息 μ 后, 选择测量 N^y 且得到结果 b 的概率可表示为

$$P_B(b|y, \mu) = \sum_{j=1}^{N_B} p_B(j, \lambda) \delta_{b, K_j(y)},$$

其中, $N_B := o_B^{m_B}$. 由此可得:

$\rho^{ABC} \in US^{AB \rightarrow C}(\mathcal{M}_A, \mathcal{N}_B)$ 当且仅当存在C系统上的一组正算子 $\{\tau_{k,j}^C\}_{k,j=1}^{N_A, N_B}$ 使得 $\forall x, a, y, b$, 都有

$$\text{tr}_A[(M_{a|x} \otimes B_{b|y} \otimes I_C) \rho^{ABC}] = \sum_{k=1}^{N_A} \sum_{j=1}^{N_B} \delta_{a, J_k(x)} \delta_{b, K_j(y)} \tau_{k,j}^C.$$

由此可得: $US^{AB \rightarrow C}(\mathcal{M}_A, \mathcal{N}_B)$ 是一个紧凸集, 从而, $US^{AB \rightarrow C}$ 是一个紧凸集.

在定义3.1中, 我们没有要求A与B收到的经典信息 λ 与 μ 是独立的, 即概率分布 $\{\pi(\lambda, \mu)\}_{\lambda, \mu}$ 不必是可分的: $\pi(\lambda, \mu) \neq \pi_A(\lambda) \pi_B(\mu)$. 如果要求A与B依赖的局域隐变量(收到的经典信息) λ 与 μ 是独立的, 即 $\pi(\lambda, \mu) = \pi_A(\lambda) \pi_B(\mu)$, 那么可以引入下面的定义.

定义3.2(强 $AB \rightarrow C$ 导引) 对于量子态 ρ^{ABC} 及A系统与B系统的测量组合 $\mathcal{M}_A$ 与 $\mathcal{N}_B$, 若存在概率分布 $\{\pi_A(\lambda)\}_\lambda$, $\{\pi_B(\mu)\}_\mu$, $\{P_A(a|x, \lambda)\}_a$, $\{P_B(b|y, \mu)\}_b$ 以及量子态 $\rho_{\lambda\mu}^C \in \mathcal{D}_C$ 使得 $\forall x, a, y, b$, 有

$$\rho_{ab|xy} = \sum_{\lambda, \mu} \pi_A(\lambda) \pi_B(\mu) P_A(a|x, \lambda) P_B(b|y, \mu) \rho_{\lambda\mu}^C, \quad (16)$$

则称 ρ^{ABC} 在 $(\mathcal{M}_A, \mathcal{N}_B)$ 下是强 $AB \rightarrow C$ 不可导引的. 否则, 称 ρ^{ABC} 在 $(\mathcal{M}_A, \mathcal{N}_B)$ 下是强 $AB \rightarrow C$ 可导引的.

如果 ρ^{ABC} 在任意测量组合 $(\mathcal{M}_A, \mathcal{N}_B)$ 下都是强 $AB \rightarrow C$ 不可导引的, 那么称 ρ^{ABC} 是强 $AB \rightarrow C$ 不可导引的. 否则, 称 ρ^{ABC} 是强 $AB \rightarrow C$ 可导引的.

用 $SUS^{AB \rightarrow C}(\mathcal{M}_A, \mathcal{N}_B)$ 表示在测量组合 $(\mathcal{M}_A, \mathcal{N}_B)$ 下的全体强 $AB \rightarrow C$ 不可导引态之集; $SUS^{AB \rightarrow C}$ 表示全体强 $AB \rightarrow C$ 不可导引态之集. 于是

$$SUS^{AB \rightarrow C} = \bigcap_{\mathcal{M}_A, \mathcal{N}_B} SUS^{AB \rightarrow C}(\mathcal{M}_A, \mathcal{N}_B).$$

这说明: ρ^{ABC} 是强 $AB \rightarrow C$ 不可导引的, 当且仅当它在任何测量组合 $(\mathcal{M}_A, \mathcal{N}_B)$ 下都是强 $AB \rightarrow C$ 不可导引的. 再用 $SS^{A \rightarrow BC}(\mathcal{M}_A, \mathcal{N}_B)$ 表示在测量组合 $(\mathcal{M}_A, \mathcal{N}_B)$ 下的全体强 $AB \rightarrow C$ 可导引态之集, $SS^{AB \rightarrow C}$ 表示全体强 $AB \rightarrow C$ 可导引态之集. 于是

$$SS^{AB \rightarrow C} = \bigcup_{\mathcal{M}_A, \mathcal{N}_B} SS^{AB \rightarrow C}(\mathcal{M}_A, \mathcal{N}_B).$$

这说明: ρ^{ABC} 是强 $AB \rightarrow C$ 可导引的, 当且仅当它在某个测量组合 $(\mathcal{M}_A, \mathcal{N}_B)$ 下是强 $AB \rightarrow C$ 可导引的.

由定义 3.1 与 3.2 可知:

$$SUS^{AB \rightarrow C}(\mathcal{M}_A) \subset US^{AB \rightarrow C}(\mathcal{M}_A),$$

$$SS^{AB \rightarrow C}(\mathcal{M}_A) \supset S^{AB \rightarrow C}(\mathcal{M}_A),$$

$$SUS^{AB \rightarrow C} \subset US^{AB \rightarrow C}, SS^{AB \rightarrow C} \supset S^{AB \rightarrow C}.$$

例 3.1 任何完全可分态的三体量子态

$$\rho^{ABC} = \sum_{\lambda=1}^d c_{\lambda} \rho_{\lambda}^A \otimes \rho_{\lambda}^B \otimes \rho_{\lambda}^C$$

都是 $AB \rightarrow C$ 不可导引的.

证明 设 $c_{\lambda} > 0 (\lambda = 1, 2, \dots, d)$, 记

$$\pi(\lambda, \mu) = \delta_{\lambda\mu} \sqrt{c_{\lambda} c_{\mu}},$$

$$\rho_{\lambda\mu}^C = \frac{c_{\lambda}}{c_{\lambda} + c_{\mu}} \rho_{\lambda}^C + \frac{c_{\mu}}{c_{\lambda} + c_{\mu}} \rho_{\mu}^C,$$

则 $\rho_{\lambda\mu}^C \in \mathcal{D}_C$ 且 $\sum_{\lambda\mu} \pi(\lambda, \mu) = 1$, 且对任意的测量组合 $(\mathcal{M}_A, \mathcal{N}_B)$, 及任意的 x, a, y, b , 都有

$$\begin{aligned} \text{tr}_{AB}[(M_{a|x} \otimes N_{b|y} \otimes I_C) \rho^{ABC}] \\ = \sum_{\lambda\mu} \pi(\lambda, \mu) P_A(a|x, \lambda) P_B(b|y, \mu) \rho_{\lambda\mu}^C. \end{aligned}$$

由定义 3.1 知 ρ^{ABC} 在任意测量组合 $(\mathcal{M}_A, \mathcal{N}_B)$ 下都是 $AB \rightarrow C$ 不可导引的. 故 ρ^{ABC} 是 $AB \rightarrow C$ 不可导引的. 证毕.

按照定义 3.2, 完全乘积态显然是强不可导引的. 下面的例子说明反之不成立.

例 3.2 设 $\rho_A \in \mathcal{D}_A$, ρ_{BC} 是 BC 系统中的可分态, 即

$$\rho_{BC} = \sum_{\mu=1}^n c_{\mu} \sigma_{\mu}^B \otimes \sigma_{\mu}^C,$$

则三体量子态 $\rho_A \otimes \rho_{BC}$ 是强 $AB \rightarrow C$ 不可导引的.

这是因为, 对任意的测量组合 $(\mathcal{M}_A, \mathcal{N}_B)$, 及任意的 x, a, y, b , 都有

$$\begin{aligned} \text{tr}_{AB}[(M_{a|x} \otimes N_{b|y} \otimes I_C) \rho^{ABC}] \\ = \sum_{\lambda=1}^1 \sum_{\mu=1}^n \pi_A(\lambda) \pi_B(\mu) P_A(a|x, \lambda) P_B(b|y, \mu) \rho_{\lambda\mu}^C, \end{aligned}$$

其中

$$\pi_A(1) = 1, \pi_B(\mu) = c_{\mu}, \rho_{1\mu}^C = \sigma_{\mu}^C,$$

$$P_A(a|x, 1) = \text{tr}(M_{a|x} \rho_A), P_B(b|y, \mu) = \text{tr}(N_{b|y} \sigma_{\mu}^B).$$

因此, 由定义 3.2 知: $\rho_A \otimes \rho_{BC}$ 是强 $AB \rightarrow C$ 不可导引的. 证毕.

命题 3.1 对于三体态 $\rho^{ABC} \in \mathcal{D}_{ABC}$, 如果存在系统 A 上的两组量子测量 $P^A = \{P_i^A\}$ 和 $Q^A = \{Q_s^A\}$ 及和系统 B 上的两组量子测量 $P^B = \{P_j^B\}$ 和 $Q^B = \{Q_t^B\}$, 使其测量输出满足:

$$\text{tr}_A[(P_i^A \otimes P_j^B \otimes I_C) \rho^{ABC}] = c_{ij} |e_{ij}\rangle \langle e_{ij}|, \quad (17)$$

$$\text{tr}_A[(Q_s^A \otimes Q_t^B \otimes I_C) \rho^{ABC}] = d_{st} |f_{st}\rangle \langle f_{st}|, \quad (18)$$

其中 $c_{ij}, d_{st} \geq 0 (\forall i, j)$, $\{|e_{ij}\rangle\}$ 与 $|f_{st}\rangle$ 是系统 C 的两组纯态, 且满足 $|e_{ij}\rangle \langle e_{ij}| \neq |f_{st}\rangle \langle f_{st}| (c_{ij} d_{st} > 0)$, 那么 ρ^{ABC} 在测量组合 $(\{P^A, Q^A\}, \{P^B, Q^B\})$ 下是 $AB \rightarrow C$ 可导引的.

证明 假设 ρ^{ABC} 在测量组合 $(\{P^A, Q^A\}, \{P^B, Q^B\})$ 下是 $AB \rightarrow C$ 不可导引的, 则由定义 3.1 知: 存在概率分布 $\{\pi(\lambda, \mu)\}_{\lambda\mu}$ 和量子态 $\{\sigma_{\lambda\mu}\}_{\lambda\mu} \subset \mathcal{D}_C$ 使得对于任意的 $M = \{E_i\} \in \{P^A, Q^A\}$ 和 $N = \{F_j\} \in \{P^B, Q^B\}$, 都有

$$\begin{aligned} \text{tr}_{AB}[(E_i \otimes F_j \otimes I_C) \rho^{ABC}] \\ = \sum_{\lambda\mu} \pi(\lambda, \mu) P_A(i|M, \lambda) P_B(j|N, \mu) \sigma_{\lambda\mu}, \end{aligned}$$

其中, $\{P_A(i|M, \lambda)\}_i$ 与 $\{P_B(j|N, \mu)\}_j$ 都是概率分布. 结合式(17)与(18)得, 对于任意的 i, j, s, t , 有

$$\sum_{\lambda, \mu} \pi(\lambda, \mu) P_A(i|P^A, \lambda) P_B(j|P^B, \mu) \sigma_{\lambda, \mu} = c_{ij} |e_{ij}\rangle \langle e_{ij}|,$$

$$\sum_{\lambda, \mu} \pi(\lambda, \mu) P_A(s|Q^A, \lambda) P_B(t|Q^B, \mu) \sigma_{\lambda, \mu} = d_{st} |f_{st}\rangle \langle f_{st}|.$$

因为纯态是量子态之集的端点, 所以上式中的每一项都是右边纯态的倍数, 即存在 $h(i, j, \lambda, \mu) \geq 0$ 及 $g(s, t, \lambda, \mu) \geq 0$, 使得

$$P_A(i|P^A, \lambda) P_B(j|P^B, \mu) \sigma_{\lambda, \mu} = h(i, j, \lambda, \mu) c_{ij} |e_{ij}\rangle \langle e_{ij}|,$$

$$P_A(s|Q^A, \lambda) P_B(t|Q^B, \mu) \sigma_{\lambda, \mu} = g(s, t, \lambda, \mu) d_{st} |f_{st}\rangle \langle f_{st}|.$$

由于

$$\sum_i P_A(i|P^A, \lambda) = \sum_j P_B(j|P^B, \mu) = 1 (\forall \lambda, \forall \mu),$$

所以, 对于任意的 λ, μ , 存在 i_λ, j_μ 使得

$$P_A(i_\lambda|P^A, \lambda) > 0, P_B(j_\mu|P^B, \mu) > 0.$$

从而, 由

$$\begin{aligned} P_A(i_\lambda|P^A, \lambda) P_B(j_\mu|P^B, \mu) \sigma_{\lambda, \mu} \\ = h(i_\lambda, j_\mu, \lambda, \mu) c_{i_\lambda j_\mu} |e_{i_\lambda j_\mu}\rangle \langle e_{i_\lambda j_\mu}| \end{aligned}$$

知 $c_{i_\lambda j_\mu} > 0$ 且两边取迹后得到

$$\sigma_{\lambda, \mu} = |e_{i_\lambda j_\mu}\rangle \langle e_{i_\lambda j_\mu}|.$$

同理, 对于任意的 λ, μ , 存在 s_λ, t_μ 使得 $d_{s_\lambda t_\mu} > 0$ 且

$$\sigma_{\lambda, \mu} = |f_{s_\lambda t_\mu}\rangle \langle f_{s_\lambda t_\mu}|.$$

因此, $|e_{i_\lambda j_\mu}\rangle \langle e_{i_\lambda j_\mu}| = |f_{s_\lambda t_\mu}\rangle \langle f_{s_\lambda t_\mu}|$ 且 $c_{i_\lambda j_\mu} d_{s_\lambda t_\mu} > 0$. 这与条件 $|e_{ij}\rangle \langle e_{ij}| \neq |f_{st}\rangle \langle f_{st}| (c_{ij} d_{st} > 0)$ 矛盾. 证毕.

例3.3 三粒子GHZ态 $\rho^{ABC} = |\text{GHZ}_3\rangle \langle \text{GHZ}_3|$ 是 $AB \rightarrow C$ 可导引的, 从而它也是强 $AB \rightarrow C$ 可导引的.

证明 首先, 对任何 $|x\rangle \langle x| \in \mathcal{D}_A$, $|y\rangle \langle y| \in \mathcal{D}_B$, 计算可知

$$\text{tr}_{AB}[(|x\rangle \langle x| \otimes |y\rangle \langle y| \otimes I_C) |W\rangle \langle W|] = \frac{1}{2} |z_{xy}\rangle \langle z_{xy}|, \quad (19)$$

其中, $|z_{xy}\rangle = |x\rangle \langle 0| \langle y| \langle 0| \langle 0| + |x\rangle \langle 1| \langle y| \langle 1| \langle 1|$. 取

$$P^A = \{|0\rangle \langle 0|, |1\rangle \langle 1|\} := \{P_0^A, P_1^A\} \equiv \{P_i^A\},$$

$$P^B = \{|0\rangle \langle 0|, |1\rangle \langle 1|\} := \{P_0^B, P_1^B\} \equiv \{P_j^B\},$$

$$Q^A = \{|a\rangle \langle a|, |a^\perp\rangle \langle a^\perp|\} := \{Q_0^A, Q_1^A\} \equiv \{Q_s^A\},$$

$$Q^B = \{|b\rangle \langle b|, |b^\perp\rangle \langle b^\perp|\} := \{Q_0^B, Q_1^B\} \equiv \{Q_t^B\},$$

其中,

$$|a\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle), |a^\perp\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle),$$

$$|b\rangle = \sqrt{\frac{1}{3}}|0\rangle + \sqrt{\frac{2}{3}}|1\rangle, |b^\perp\rangle = \sqrt{\frac{2}{3}}|0\rangle - \sqrt{\frac{1}{3}}|1\rangle.$$

在测量 $P = P^A \otimes P^B$ 下, 有

$$|z_{00}\rangle = |0\rangle, |z_{01}\rangle = |z_{10}\rangle = 0, |z_{11}\rangle = |1\rangle,$$

从而, 由式(19)知

$$\text{tr}_{AB}[(P_i^A \otimes P_j^B | \otimes I_C) \rho^{ABC}] = c_{ij} |e_{ij}\rangle \langle e_{ij}|, \quad (20)$$

其中

$$c_{00} = \frac{1}{2}, |e_{00}\rangle = |z_{00}\rangle = |0\rangle,$$

$$c_{01} = 0, |e_{01}\rangle = |0\rangle,$$

$$c_{10} = 0, |e_{10}\rangle = |1\rangle,$$

$$c_{11} = \frac{1}{2}, |e_{11}\rangle = |z_{11}\rangle = |1\rangle.$$

在测量 $Q = Q^A \otimes Q^B$ 下, 有

$$|z_{a,b}\rangle = \sqrt{\frac{1}{6}}|0\rangle + \sqrt{\frac{1}{3}}|1\rangle,$$

$$|z_{a,b^\perp}\rangle = \sqrt{\frac{1}{3}}|0\rangle - \sqrt{\frac{1}{6}}|1\rangle,$$

$$|z_{a^\perp,b}\rangle = \sqrt{\frac{1}{6}}|0\rangle - \sqrt{\frac{1}{3}}|1\rangle,$$

$$|z_{a^\perp,b^\perp}\rangle = \sqrt{\frac{1}{3}}|0\rangle + \sqrt{\frac{1}{6}}|1\rangle.$$

它们都是模为 $\frac{1}{\sqrt{2}}$ 的向量. 从而, 由(19)式知

$$\text{tr}_{AB}[(Q_s^A \otimes Q_t^B | \otimes I_C) \rho^{ABC}] = d_{st} |f_{st}\rangle \langle f_{st}|, \quad (21)$$

其中, $d_{st} = \frac{1}{4}$, 且

$$|f_{00}\rangle = \sqrt{2}|z_{ab}\rangle, |f_{01}\rangle = \sqrt{2}|z_{ab^\perp}\rangle,$$

$$|f_{10}\rangle = \sqrt{2}|z_{a^+b^+}\rangle, |f_{11}\rangle = \sqrt{2}|z_{a^+b^+}\rangle.$$

显然, $|e_{ij}\rangle\langle e_{ij}| \neq |f_{st}\rangle\langle f_{st}|(\forall s, t)$. 因此, 由命题3.1知: ρ^{ABC} 在 $(\{P^A, Q^A\}, \{P^B, Q^B\})$ 下是 $AB \rightarrow C$ 可导引的. 从而, 由定义3.1知: ρ^{ABC} 是 $AB \rightarrow C$ 可导引的. 证毕.

下面给出 $AB \rightarrow C$ 不可导引性与强 $AB \rightarrow C$ 不可导引性的等价刻画.

定理3.1 $\rho^{ABC} \in US^{AB \rightarrow C}(\mathcal{M}_A, \mathcal{N}_B)$ 当且仅当存在概率分布 $\{\pi(\lambda, \mu)\}_{\lambda, \mu}$, $\{P_A(a|x, \lambda)\}_a$, $\{P_B(b|y, \mu)\}_b$ 以及量子态 $\{\rho_{\lambda, \mu}^C\}_{\lambda, \mu} \subset \mathcal{D}_C$ 使得对 C 系统的任何正算子值测量 $\{K_c\}_{c=1}^{o_C}$, 及任意的 x, a, y, b, c , 都有

$$\begin{aligned} & \text{tr}[(M_{a|x} \otimes N_{b|y} \otimes K_c) \rho^{ABC}] \\ &= \sum_{\lambda, \mu} \pi(\lambda, \mu) P_A(a|x, \lambda) P_B(b|y, \mu) \text{tr}(K_c \rho_{\lambda, \mu}^C). \end{aligned} \quad (22)$$

证明 必要性: 设 ρ^{ABC} 是在 $(\mathcal{M}_A, \mathcal{N}_B)$ 是 $AB \rightarrow C$ 不可导引的, 则由定义3.1知: 存在概率分布 $\{\pi(\lambda, \mu)\}_{\lambda, \mu}$, $\{P_A(a|x, \lambda)\}_a$, $\{P_B(b|y, \mu)\}_b$ 以及量子态 $\{\rho_{\lambda, \mu}^C\}_{\lambda, \mu} \subset \mathcal{D}_C$, 使得式(15)成立. 因此, 对于任意的正算子值测量 $\{K_c\}_{c=1}^{o_C}$, 及 $\forall x, a, y, b, c$, 都有

$$\begin{aligned} & \text{tr}[(M_{a|x} \otimes N_{b|y} \otimes K_c) \rho^{ABC}] \\ &= \text{tr}[K_c \text{tr}_{AB}((M_{a|x} \otimes N_{b|y} \otimes I_C) \rho^{ABC})] \\ &= \text{tr}\left[K_c \left(\sum_{\lambda, \mu} \pi(\lambda, \mu) P_A(a|x, \lambda) P_B(b|y, \mu) \rho_{\lambda, \mu}^C\right)\right] \\ &= \sum_{\lambda, \mu} \pi(\lambda, \mu) P_A(a|x, \lambda) P_B(b|y, \mu) \text{tr}(K_c \rho_{\lambda, \mu}^C). \end{aligned}$$

充分性: 设存在概率分布

$$\{\pi(\lambda, \mu)\}_{\lambda, \mu}, \{P_A(a|x, \lambda)\}_a, \{P_B(b|y, \mu)\}_b$$

以及 $\rho_{\lambda, \mu}^C \in \mathcal{D}_C$ 使得对 C 系统上的任意测量 $\{K_c\}_{c=1}^{o_C}$ 都有式(22)成立. 设 P 为 C 系统上的任意投影算子, 令 $\{K_c\} = \{P, I - P\}$, 则由式(22)得

$$\begin{aligned} & \text{tr}[(M_{a|x} \otimes N_{b|y} \otimes P) \rho^{ABC}] \\ &= \sum_{\lambda, \mu} \pi(\lambda, \mu) P_A(a|x, \lambda) P_B(b|y, \mu) \text{tr}(P \rho_{\lambda, \mu}^C) \\ &= \text{tr}\left[P \left(\sum_{\lambda, \mu} \pi(\lambda, \mu) P_A(a|x, \lambda) P_B(b|y, \mu) \rho_{\lambda, \mu}^C\right)\right] \\ &= \left\langle P, \sum_{\lambda, \mu} \pi(\lambda, \mu) P_A(a|x, \lambda) P_B(b|y, \mu) \rho_{\lambda, \mu}^C \right\rangle. \end{aligned}$$

另一方面,

$$\begin{aligned} & \text{tr}[(M_{a|x} \otimes N_{b|y} \otimes P) \rho^{ABC}] \\ &= \text{tr}[P \text{tr}_{AB}((M_{a|x} \otimes N_{b|y} \otimes I_C) \rho^{ABC})] \\ &= \left\langle P, \text{tr}_{AB}((M_{a|x} \otimes N_{b|y} \otimes I_C) \rho^{ABC}) \right\rangle. \end{aligned}$$

因此,

$$\begin{aligned} & \left\langle P, \text{tr}_{AB}[(M_{a|x} \otimes N_{b|y} \otimes I_C) \rho^{ABC}] \right\rangle_{HS} \\ &= \left\langle P, \sum_{\lambda, \mu} \pi(\lambda, \mu) P_A(a|x, \lambda) P_B(b|y, \mu) \rho_{\lambda, \mu}^C \right\rangle. \end{aligned}$$

于是, 对于任意的 x, a , 有

$$\begin{aligned} & \text{tr}_{AB}[(M_{a|x} \otimes N_{b|y} \otimes I_C) \rho^{ABC}] \\ &= \sum_{\lambda, \mu} \pi(\lambda, \mu) P_A(a|x, \lambda) P_B(b|y, \mu) \rho_{\lambda, \mu}^C. \end{aligned}$$

由定义3.1知: ρ^{ABC} 在 $(\mathcal{M}_A, \mathcal{N}_B)$ 下是 $AB \rightarrow C$ 不可导引的. 证毕.

类似于定理2.3可证: 如果 $\mathcal{M}_A$ 与 $\mathcal{N}_B$ 为系统 A 与 B 的相容测量组合, 那么任意量子态 $\rho^{ABC} \in \mathcal{D}_{ABC}$ 都是 $AB \rightarrow C$ 不可导引的. 同时, 类似于定理3.1可证以下定理成立.

定理3.2 $\rho^{ABC} \in S US^{AB \rightarrow C}(\mathcal{M}_A, \mathcal{N}_B)$ 当且仅当存在概率分布 $\{\pi_A(\lambda)\}_\lambda, \{\pi_B(\mu)\}_\mu, \{P_A(a|x, \lambda)\}_a, \{P_B(b|y, \mu)\}_b$, 以及量子态 $\rho_{\lambda, \mu}^C \in \mathcal{D}_C$ 使得对 C 系统的任意测量 $\{K_c\}_{c=1}^{o_C}$, 与任意的 x, a, y, b, c , 都有

$$\begin{aligned} & \text{tr}[(M_{a|x} \otimes N_{b|y} \otimes K_c) \rho^{ABC}] \\ &= \sum_{\lambda, \mu} \pi_A(\lambda) \pi_B(\mu) P_A(a|x, \lambda) P_B(b|y, \mu) \text{tr}(K_c \rho_{\lambda, \mu}^C). \end{aligned}$$

4 结论

本文研究了具有3个观测者Alice, Bob及Charles的三体量子系统的可导引性, 提出了两种量子导引方案, 称为“单边设备独立导引方案”与“双边设备独立导引方案”. 前者是Alice导引Bob与Charles的量子导引方案(称为 $A \rightarrow BC$ 导引), 后者是Alice与Bob联合导引Charles的量子导引方案(称为 $AB \rightarrow C$ 导引). 根据局域隐态的可分性与局域隐变量的独立性, 每个导引方案又包括两个不

级别的导引情景. 在描述物理思想的基础上, 给出了各种导引方案(可导引性)的数学定义, 建立了各种导引方案可行(可导引)的充要条件及充分条件. 结果表明: 如果Alice经过两组测量得到BC系统中完全不同的纯态, 那么她就可以利用这两个测量来操控Bob与Charlie的共享态; 如果Alice和Bob经过两个局部测量能够得到C系统中两组完全不同的

纯态, 那么他们就能利用这两个测量来操控Charles的状态. 作为结果的应用, 说明了完全可分态既是 $A \rightarrow BC$ 不可导引的, 又是 $AB \rightarrow C$ 不可导引的; 三粒子GHZ态既是 $A \rightarrow BC$ 可导引的, 又是 $AB \rightarrow C$ 可导引的. 本文的研究思路也可以用于更多粒子的量子系统的导引性研究, 我们希望相关结果对量子导引态的制备和操控有一定的指导意义.

参考文献

- 1 Blok M S, Kalb N, Reiserer A, et al. Towards quantum networks of single spins: Analysis of a quantum memory with an optical interface in diamond. *Faraday Discuss*, 2015, 184: 173–182
- 2 Deng D L, Li X, Das Sarma S. Quantum entanglement in neural network states. *Phys Rev X*, 2017, 7: 021021
- 3 Chiribella G, D'Ariano G M, Perinotti P. Theoretical framework for quantum networks. *Phys Rev A*, 2009, 80: 022339
- 4 Schuldt M, Sinayskiy I, Petruccione F. The quest for a quantum neural network. *Quantum Inf Proc*, 2014, 13: 2567–2586
- 5 Chen L B, Lu H. Quantum networks for implementing locally and conclusively a nonlocal qudit Toffoli gate: Designing and optimizing (in Chinese). *Sci Sin-Phys Mech Astron*, 2016, 46: 110301 [陈立冰, 路洪. 确定性地实现非局域高维量子Toffoli门的网络设计与优化. 中国科学: 物理学 力学 天文学, 2016, 46: 110301]
- 6 Chen L B, Lu H. Quantum networks for implementing efficiently a nonlocal N -qubit controlled unitary gate via non-symmetric quantum channels: Designing and optimizing (in Chinese). *Sci Sin-Phys Mech Astron*, 2017, 47: 120301 [陈立冰, 路洪. 基于非对称量子信道的非局域 N -qubit受控幺正门的网络设计与优化. 中国科学: 物理学 力学 天文学, 2017, 47: 120301]
- 7 Wang C, Deng F G, Li Y S, et al. Quantum secure direct communication with high-dimension quantum superdense coding. *Phys Rev A*, 2005, 71: 44305
- 8 Gong Z R, Zhang Z W, Xu D Z, et al. Spontaneous decoherence of coupled harmonic oscillators confined in a ring. *Sci China-Phys Mech Astron*, 2018, 61: 040311
- 9 Li B, Jiang S H, Fei S M, et al. A note on the Bloch representation of absolutely maximally entangled states. *Sci China-Phys Mech Astron*, 2018, 61: 040321
- 10 DiVincenzo D P. Quantum computation. *Science*, 1995, 270: 255–261
- 11 Zhou J, Liu B J, Hong Z P, et al. Fast holonomic quantum computation based on solid-state spins with all-optical control. *Sci China-Phys Mech Astron*, 2018, 61: 010312
- 12 Nielsen M A, Chuang I L. Quantum Computation and Quantum Information. 2nd ed. Cambridge: Cambridge University Press, 2010
- 13 Luo S. Using measurement-induced disturbance to characterize correlations as classical or quantum. *Phys Rev A*, 2008, 77: 022301
- 14 Guo Z H, Cao H X, Chen Z L, et al. Operational properties and matrix representations of quantum measures. *Chin Sci Bull*, 2011, 56: 1671–1678
- 15 Ye M Y, Zhang Y S, Guo G C. Quantum entanglement and quantum operation (in Chinese). *Sci China Ser G-Phys Mech Astron*, 2008, 51: 14–21 [叶明勇, 张永生, 郭光灿. 量子纠缠和量子操作. 中国科学G辑: 物理学 力学 天文学, 2008, 51: 14–21]
- 16 Chen X Y, Jiang L Z. Quantum separable criterion based on characteristic function (in Chinese). *Sci Sin-Phys Mech Astron*, 2018, 48: 020302 [陈小余, 蒋丽珍. 量子态可分离性的特性函数准则. 中国科学: 物理学 力学 天文学, 2018, 48: 020302]
- 17 Yu X Y, Cha X W, Che J L. A new method for constructing entangled states via orthogonal arrays (in Chinese). *Sci Sin-Phys Mech Astron*, 2018, 48: 020301 [于小媛, 查新未, 车峻岭. 一种新的用正交阵列构造纠缠态的方法. 中国科学: 物理学 力学 天文学, 2018, 48: 020301]
- 18 Wang W H, Cao H X, Chen Z L, et al. Quantitative conditions for time evolution in terms of the von Neumann equation. *Sci China-Phys Mech Astron*, 2018, 61: 070312
- 19 Yang Y, Cao H. Separability criteria of multipartite states. *Eur Phys J D*, 2018, 72: 143
- 20 Schrödinger E, Born M. Discussion of probability relations between separated systems. *Math Proc Camb Phil Soc*, 1935, 31: 555
- 21 Werner R F. Quantum states with Einstein-Podolsky-Rosen correlations admitting a hidden-variable model. *Phys Rev A*, 1989, 40: 4277–4281
- 22 Wiseman H M, Jones S J, Doherty A C. Steering, entanglement, nonlocality, and the Einstein-Podolsky-Rosen paradox. *Phys Rev Lett*, 2007, 98: 140402
- 23 Jones S J, Wiseman H M, Doherty A C. Entanglement, Einstein-Podolsky-Rosen correlations, Bell nonlocality, and steering. *Phys Rev A*, 2007,

76: 052116

- 24 Bowles J, Vértesi T, Quintino M T, et al. One-way Einstein-Podolsky-Rosen steering. [Phys Rev Lett](#), 2014, 112: 200402
- 25 Branciard C, Cavalcanti E G, Walborn S P, et al. One-sided device-independent quantum key distribution: Security, feasibility, and the connection with steering. [Phys Rev A](#), 2012, 85: 010301
- 26 Law Y Z, Thinh L P, Bancal J D, et al. Quantum randomness extraction for various levels of characterization of the devices. [J Phys A-Math Theor](#), 2014, 47: 424028
- 27 Reid M D. Signifying quantum benchmarks for qubit teleportation and secure quantum communication using Einstein-Podolsky-Rosen steering inequalities. [Phys Rev A](#), 2013, 88: 062338
- 28 Piani M, Watrous J. Necessary and sufficient quantum information characterization of Einstein-Podolsky-Rosen steering. [Phys Rev Lett](#), 2015, 114: 060404
- 29 Chen J L, Ye X J, Wu C, et al. All-Versus-nothing proof of Einstein-Podolsky-Rosen steering. [Sci Rep](#), 2013, 3: 2143
- 30 Nguyen H C, Luoma K. Pure steered states of Einstein-Podolsky-Rosen steering. [Phys Rev A](#), 2017, 95: 042117
- 31 Wu C, Chen J L, Ye X J, et al. Test of Einstein-Podolsky-Rosen steering based on the all-Versus-nothing proof. [Sci Rep](#), 2015, 4: 4291
- 32 Sun K, Ye X J, Xu J S, et al. Experimental quantification of asymmetric Einstein-Podolsky-Rosen steering. [Phys Rev Lett](#), 2016, 116: 160404
- 33 Cavalcanti E G, He Q Y, Reid M D, et al. Unified criteria for multipartite quantum nonlocality. [Phys Rev A](#), 2011, 84: 032115
- 34 He Q Y, Reid M D. Genuine multipartite Einstein-Podolsky-Rosen steering. [Phys Rev Lett](#), 2013, 111: 250403
- 35 Cavalcanti D, Skrzypczyk P, Aguilar G H, et al. Detection of entanglement in asymmetric quantum networks and multipartite quantum steering. [Nat Commun](#), 2015, 6: 7941
- 36 Quan Q, Zhu H, Liu S Y, et al. Steering Bell-diagonal states. [Sci Rep](#), 2016, 6: 22025
- 37 Chen J L, Ren C, Chen C, et al. Bell's nonlocality can be detected by the violation of Einstein-Podolsky-Rosen steering inequality. [Sci Rep](#), 2016, 6: 39063
- 38 Cavalcanti D, Skrzypczyk P. Quantum steering: A review with focus on semidefinite programming. [Rep Prog Phys](#), 2017, 80: 024001
- 39 Zheng Y L. Criteria for Quantum Entanglement and Quantum Steering (in Chinese). Dissertation for Doctoral Degree. Hefei: University of Science and Technology of China, 2017 [郑玉麟. 量子纠缠与量子导引的判据研究. 博士学位论文. 合肥: 中国科学技术大学, 2017]
- 40 Ren C, Su H Y, Shi H, et al. Maximally steerable mixed state based on the linear steering inequality and the Clauser-Horne-Shimony-Holt-like steering inequality. [Phys Rev A](#), 2018, 97: 032119
- 41 Zheng C, Guo Z, Cao H. Generalized steering robustness of bipartite quantum states. [Int J Theor Phys](#), 2018, 57: 1787–1801
- 42 Li Z W, Guo Z H, Cao H X. Some characterizations of EPR steering. [Int J Theor Phys](#), 2018, 57: 3285–3295
- 43 Cao H X, Guo Z H. Characterizing Bell nonlocality and EPR steering. [Sci China-Phys Mech Astron](#), 2019, 62: 30311
- 44 Zeng Q, Wang B, Li P, et al. Experimental high-dimensional Einstein-Podolsky-Rosen steering. [Phys Rev Lett](#), 2018, 120: 030401
- 45 Guo Z, Cao H. A classification of correlations of tripartite mixed states. [Int J Theor Phys](#), 2013, 52: 1768–1779

Quantum steering in tripartite quantum systems

XIAO Shu, GUO ZhiHua* & CAO HuaiXin*

School of Mathematics and Information Science, Shaanxi Normal University, Xi'an 710119, China

Quantum steering is a kind of quantum feature between quantum entanglement and Bell non-locality. Due to its special asymmetry, quantum steering plays an important role in many aspects of quantum information processing and thus has been widely concerned. There are many contributions on quantum steering in bipartite systems up to now, while tripartite systems have more complex structures than bipartite systems and then have more diversified steering scenarios. In this paper, two types of quantum steering scenarios are introduced for a tripartite quantum system, named “one-sided device-independent steering” and “two-sided device-independent steering”. Each of them contains two levels according to the separability of the local hidden states and the independence of the local hidden variables, respectively. Based on giving the mathematical definitions of these steering scenarios, some necessary and sufficient conditions for a state to be unsteerable are obtained and sufficient conditions for a state to be steerable are also established.

quantum system, quantum steering, one-sided device-independent steering, two-sided device-independent steering

PACS: 03.65.Ca, 03.65.Ta, 03.65.Ud, 03.75.Gg

doi: [10.1360/SSPMA2018-00277](https://doi.org/10.1360/SSPMA2018-00277)