

承受斜撞击的悬臂梁的 力学分析模型*

余 同 希

(北京大学力学系, 北京 100871)

摘 要

结构受到飞射物的斜撞击, 是工程中经常遇到的重要问题。作为理论分析的第一步, 本文对刚-线性强化悬臂梁端部承受刚性块斜撞击的问题建立了力学分析模型。这是一个将 Parkes 模型与 Taylor 模型结合起来的“双铰模型”, 其运动受控于 4 个非线性代数方程的联立方程组。给出的算例显示了双铰运动的规律和杆端速度变化的历史。

关键词: 斜撞击, 悬臂梁, 刚-线性强化, 双铰模型

一、引 言

在许多民用和国防工程中都关心结构在冲击、碰撞、爆炸等强动载荷作用下的动力响应问题。当施加的动载荷短促而强烈时, 结构发生的塑性变形通常远较弹性变形为显著, 这时可以忽略其弹性性质而采用刚塑性材料模型。40 年来, 对结构刚塑性动力响应的研究已取得极大进展(例如可参见新近的综述^[1]); 但已有的研究绝大多数限于结构承受横向载荷的情形。事实上, 在工程实际中经常遇到结构承受飞射物的斜撞击的问题。例如在汽车碰撞事故中, 即使对整车而言是迎面正撞击, 对结构元件而言撞击力通常也是倾斜的; 又如在飞行器的软着陆, 核电站安全壳受飞射物撞击等问题中, 撞击方向亦可能与结构法线成各种不同的角度。对于结构承受斜撞击的这类问题, 迄今为止还未见到一种完整的理论模型可以作为分析计算的依据。

为了填补结构塑性动力学上这一理论空白, 作为理论分析的第一步, 本文对刚-线性强化悬臂梁端部承受刚性块斜撞击的问题建立了力学分析模型及相应的数学描述, 并给出了算例。本文建立的模型有可能推广到较复杂的结构承受斜撞击的分析, 为动力响应的计算提供理论基础。

二、问题和假设

我们考察的问题如图 1 所示。设有均匀矩形截面悬臂梁, 长为 L , 单位长度的质量为 ρ ,

本文 1989 年 9 月 20 日收到, 1990 年 1 月 12 日收到修改稿。

* 国家教委博士点基金项目。

在其自由端受到刚性块(集中质量) G 的斜撞击. 撞击时刚性块的初速度 V_{ro} 可分解为轴向分量 U_0 和横向分量 V_0 . 假设:

1. 梁的材料是刚塑性的, 有微弱的线性强化, 其线性强化模量 E_p 与屈服应力 σ_s 相比量阶相同或较低;

2. 撞击发生后, 在梁发生塑性动力响应的时间间隔内, 刚性块附着在梁端上并与梁一起运动;

3. 梁的变形运动符合平截面假定, 忽略剪力对变形和截面屈服的影响;

4. 截面的内力只有弯矩 M 和轴力 N ; 由于已假设材料的强化很微弱, 所以仍可近似地按材料的初始屈服应力 σ_s 确定截面的塑性极限弯矩 M_0 和塑性极限拉力 N_0 , 而截面的屈服由弯矩与轴力的线性交互作用来决定, 即

$$\left| \frac{M}{M_0} \right| + \left| \frac{N}{N_0} \right| = 1. \quad (1)$$

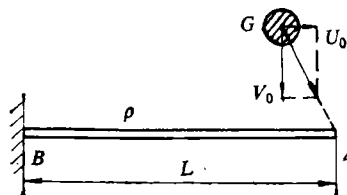


图 1 承受斜撞击的悬臂梁

三、变形模式

Taylor^[2] 曾研究过刚-线性强化的圆柱形弹体撞击到一刚性固壁上后塑性扰动传播的过程. 他指出, 轴向扰动是以塑性波前(plastic front)的形式从撞击端传播出去的; 当材料为线性强化时, 塑性波前的移动速度 $c_p = \sqrt{E_p/\rho_0}$ 是一个常数. 这里 E_p 是线性强化模量, ρ_0 是材料的体积密度. 对于我们所研究的梁受到斜撞击的问题, 可以类似于 Taylor 模型, 假设梁受到的轴向扰动将以塑性波前的形式, 以常速 c_p 从自由端(撞击端)向梁根部传播.

对横向撞击引起的扰动在刚塑性悬臂梁内的传播问题, 50 年代 Parkes^[3] 曾就理想塑性情形作过分析并给出封闭形式的解析解. Parkes 解的特点是, 横向撞击发生后有一个移行塑性铰从撞击端出发向梁根部移动, 其间只有移行铰与撞击端之间的区段具有横向运动速度. 显然, 在 Parkes 模型中, 移行铰正相当于横向扰动的塑性波前.

作为对 Parkes 解的推广, Stronge 和余同希^[4] 新近分析了刚-线性强化悬臂梁受到刚性块横向撞击后的塑性动力响应, 发现在撞击后, 梁内将出现一个逐渐收缩的塑性加载区和一个逐渐扩展的卸载区, 这二者的交界面由撞击端向梁根部移动; 当材料的强化很微弱, 即满足上一节中的假设 1 时, 这一移行交界面的运动规律与理想塑性梁中的移行铰的运动规律几乎完全一致; 也就是说, 当材料强化很微弱时, 上述移行交界面就退化为 Parkes 的移行铰. 所以, 在具有微弱强化的刚塑性梁中采用具有移行铰的 Parkes 变形模式, 仍然是合理的、有根据的.

综合以上两方面的研究背景, 根据斜撞击问题的特点和上节所作的几条假设, 我们有理由提出下述将 Taylor 模型和 Parkes-Stronge-Yu 模型结合起来的变形模式:

撞击引起的轴向扰动以塑性波前的形式按速度 c_p 由撞击端向梁根部传播, 这与 Taylor 模型相似; 同时, 横向扰动则以移行铰(作为线性强化梁中的移行交界面的退化态)的形式由撞击端向梁根部传播, 这与 Parkes-Stronge-Yu 模型相似. 这两种传播过程不是独立无关的, 它们通过动力学方程以及 M 和 N 间的交互作用发生耦合.

其中 ρ 为单位长度的梁的质量。

2. HH_1 段相对于 H 点的力矩平衡给出

$$M_0 - M_1 = Q_1(s - s_1) - \int_0^{s-s_1} \rho \omega \xi d\xi,$$

用(4)和(5)式代入后得

$$M_0 - M_1 = \frac{1}{6} \rho \frac{d}{dt} [\omega_0(s - s_1)^3] + \frac{1}{2} \rho \omega_0 c_p (s - s_1)^2. \quad (6)$$

3. HA 段相对于 A 点的力矩平衡给出

$$M_0 = \int_0^s \rho (\dot{\omega}_0 \xi + \omega_0 \dot{s}) (s - \xi) d\xi + \int_0^{s_1} \rho (\dot{\omega}_1 \xi_1 + \omega_1 c_p) (s_1 - \xi_1) d\xi_1,$$

经演化后得到

$$M_0 = \frac{1}{6} \rho \frac{d}{dt} (\omega_0 s^3) + \frac{1}{6} \rho \frac{d}{dt} (\omega_1 s_1^3).$$

对 t 积分并注意到 $t = 0$ 时 $s = s_1 = 0$, 就得到

$$\omega_0 s^3 + \omega_1 s_1^3 = \frac{6M_0 t}{\rho}. \quad (7)$$

4. HA 段在横向的力平衡给出

$$\frac{1}{2} \rho \frac{d}{dt} (\omega_0 s^2 + \omega_1 s_1^2) + G \frac{d}{dt} V = 0,$$

对 t 积分并注意到 $t = 0$ 时 $V = V_0$, 就得到

$$\omega_0 s^2 + \omega_1 s_1^2 = \frac{2G}{\rho} (V - V_0). \quad (8)$$

这里 V_0 和 V 分别表示 $t = 0$ 时刻和 t 时刻刚性块 G 的横向速度。

此外, 由自由端的速度连续性条件易知

$$\omega_0 s + \omega_1 s_1 = V. \quad (9)$$

上面导出的(6)–(9) 4 个独立方程中, $s_1 = c_p t$ 是自变量 t 的已知函数, 但还包含 ω_0 , ω_1 , s , V 和 M_1 5 个未知函数, 因此还需要补充一个方程, 这可以由屈服条件和流动法则来得到。

五、屈服条件和流动法则

根据前面的假设 4, 在 H_1 截面上应用 M 和 N 交互作用的(1)式就得到

$$\frac{M_1}{M_0} + \frac{N_1}{N_0} = 1 \quad (10)$$

(如图 3 所示); 相应的流动法则给出

$$\frac{U}{\omega_1} = -\frac{dM}{dN} = \frac{M_0}{N_0} = \frac{h}{4}, \quad (11)$$

其中 U 和 ω_1 分别为广义塑性铰 H_1 处的伸长率和角速度。 $M_0/N_0 = h/4$ 得自矩形截面梁的性质, 即 $M_0 = \sigma_s b h^2/4$, $N_0 = \sigma_s b h$, b 和 h 分别为梁截面的宽度和厚度。

(10)和(11)式可分别改写为

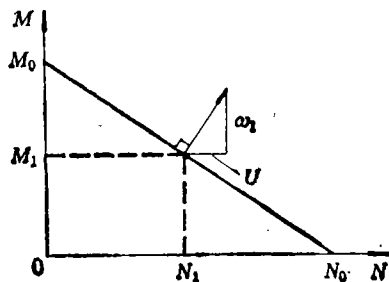


图 3 弯矩和轴力的交互作用

$$M_0 - M_1 = N_1 \cdot \frac{M_0}{N_0} = \frac{h}{4} N_1, \quad (12)$$

$$\omega_1 = \frac{4}{h} U. \quad (13)$$

(12)和(13)式给出了两个新的方程,但也引入了两个新的未知数 N_1 和 U . 注意,由于 H_1 是塑性波前,因而 BH_1 段未受到轴向扰动,所以 H_1 处的伸长率 U 恰恰就是 H_1A 段的轴向速度.

对 H_1A 段建立轴向运动平衡,就有

$$\begin{aligned} -N_1 &= \frac{d}{dt} [(G + \rho s_1)U] \\ &= (G + \rho s_1)\dot{U} + \rho U \dot{s}_1, \end{aligned} \quad (14)$$

其中 $(G + \rho s_1)$ 是 H_1A 段的总质量. 利用(13)和(14)式可将(12)式改写为

$$M_0 - M_1 = -\left(\frac{h}{4}\right)^2 [(G + \rho s_1)\dot{\omega}_1 + \rho \omega_1 \dot{s}_1]. \quad (15)$$

将其与(6)式比较,经整理后可得

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left[\frac{1}{6} \rho \omega_0 (s - s_1)^3 + \left(\frac{h}{4}\right)^2 (G + \rho s_1) \omega_1 \right] \\ + \frac{1}{2} \rho \omega_0 \dot{s}_1 (s - s_1)^2 = 0. \end{aligned} \quad (16)$$

在材料微弱强化的条件下, c_p 远较 s 为小,于是可略去方程(16)的第二项,积分后得到

$$\frac{1}{6} \rho \omega_0 (s - s_1)^3 + \left(\frac{h}{4}\right)^2 (G + \rho s_1) \omega_1 = \left(\frac{h}{4}\right)^2 G U_0, \quad (17)$$

其中用到 $t = 0$ 时 $s = s_1 = 0$, $U = U_0$ 和 $\omega_1 = \frac{4}{h} U_0$.

至此为止,(7)–(9)和(17)式构成了本问题的基本方程组,自变量为 t ,未知函数为 ω_0 , ω_1 , s 和 V ,方程组封闭,且均为代数方程.

六、方程组求解

为求解方便,先将方程组无量纲化. 引入

$$\xi = G/\rho L, \quad \lambda = 4L/h, \quad \phi_0 = U_0/V_0,$$

$$T_0 = \rho L^2 V_0/M_0, \quad \tau = t/T_0,$$

$$\beta = \frac{1}{2} G V_0^2/M_0, \quad \gamma = (2\beta/\xi)(c_p/V_0),$$

$$z = s/L, \quad x = \omega_0 s/V_0, \quad u = U/V_0, \quad v = V/V_0,$$

则基本方程组的无量纲形式为

$$\begin{cases} x + \lambda u \gamma \tau = v, \\ xz + \lambda u \gamma^2 \tau^2 = 2\xi(1 - v), \\ xz^2 + \lambda u \gamma^3 \tau^3 = 6\tau, \\ \lambda x(z - \gamma \tau)^3 + 6(\xi + \gamma \tau)uz = 6\xi \phi_0 z. \end{cases} \quad (18)$$

显然, ζ (质量比), λ , γ 和 ϕ_0 都是应事先给定的参数; x , z , u 和 v 是未知函数, 无量纲时间 τ 则为自变量。

在 4 个参数中, ζ 表征撞击物质量与全梁质量之比, λ 表征梁自身长度与厚度之比。 $\gamma = (2\beta/\zeta)(c_p/V_0)$ 既反映了撞击的能量比 $\beta = \frac{1}{2} GV_0^2/M_0$, 又反映了材料的塑性波前速度 c_p , 因而当撞击能量较大或材料强化较显著时 γ 值较大。 $\phi_0 = U_0/V_0$ 表征撞击的倾斜程度, 当 $\phi_0 = 0$ 时问题退化为文献[3,4]考察过的横向撞击情形。

在四个未知函数中, x 表征塑性铰 H 引起的端点横向速度在整个端点横向速度 V 中所占的份额; 显然, 塑性能量消耗在两个铰上的分配与 x 值密切相关。 z 表征 H 铰的相对位置。 u 和 v 是梁端的轴向和横向的无量纲速度, 它们都具有清晰的物理意义。

对于每一组给定的参数 ζ , λ , γ 和 ϕ_0 , 可以从 $\tau = 0$ 开始, 对 τ 赋予一系列数值, 相应地由非线性代数方程组(18)求解出此时刻的 x , z , u 和 v , 便得到了整个响应历程。求解过程到 $u = 0$ 或 $z = 1$ 时可告一段落。

事实上, $u = 0$ 意味着轴向运动停止, 此后梁内只有横向动量, 因而将遵循 Parkes 解的规律^[3]继续运动。

若在 $u > 0$ 时便已达到 $z = 1$, 则意味着轴向运动尚未停止时移行铰已到达梁的根部。在此时刻 $\tau = \tau^*$ 之后, 基本方程组(18)中的第二个方程不再有效, 因为该方程来自 H 处 $Q = 0$ 时的平衡关系, H 到达梁根部以后 Q 不再为 0。删去这一方程, 同时以 $z = 1$ 代入其余方程, 有

$$\begin{cases} x + \lambda u \gamma \tau = v, \\ x + \lambda u \gamma^3 \tau^3 = 6\tau, \\ \lambda x(1 - \gamma \tau)^3 + 6(\zeta + \gamma \tau)u = 6\zeta \phi_0. \end{cases} \quad (19)$$

在 $\tau \geq \tau^*$ 时继续求解(19)式可以得到相应于每一 τ 值的 x , u 和 v , 直至 u 和 v 都减小至 0, 动能全部消耗完毕, 运动终止。

如果直到塑性波前到达梁根部, 即 $s_1 = L$ 时仍有 $u > 0$, 那么还会发生塑性纵波在固定端的反射。但这是已有成熟解答的问题, 此处不再赘述。

七、算例和讨论

算例 1. 给定 $\zeta = 1$, $\lambda = 100$, $\gamma = 5$ 和 $\phi_0 = 0.5$, 计算结果如图 4 所示。我们看到, 轴向速度 u 的衰减要比横向速度 v 的衰减来得迅速。一当 $u = 0$ 后, 梁的运动就完全遵循 Parkes 解。在图 4 中也画出了 v 和 z 按照 Parkes 解变化的曲线。可以看出, 由于轴向扰动的影响, 塑性铰的运动规律 $z = z(\tau)$ 与 Parkes 解有很大不同, 但端点横向速度的变化规律 $v = v(\tau)$ 所受的影响很小。这就是说, 由于第二个铰 H_1 的出现, 大大影响了第一个铰 H 的运动规律, 但端点横向运动的响应历程变化不大。

算例 2. 与上例相比, 撞击物的质量加大至 10 倍, 但保持撞击输入能量不变, 即

$$\beta = \frac{1}{2} GV_0^2/M_0$$

不变。这时 $\zeta = 10$, 由 β 不变可知 V_0 应减小至 $1/\sqrt{\zeta} = 1/\sqrt{10}$ 倍, 相应地 $\gamma = (2\beta/\zeta) \times$

(c_p/V_0) 也应减小至 $1/\sqrt{\zeta} = 1/\sqrt{10}$ 倍。于是, 参数可取为

$$\zeta = 10, \lambda = 100, \gamma = 5/\sqrt{10} \simeq 1.58, \phi_0 = 0.5.$$

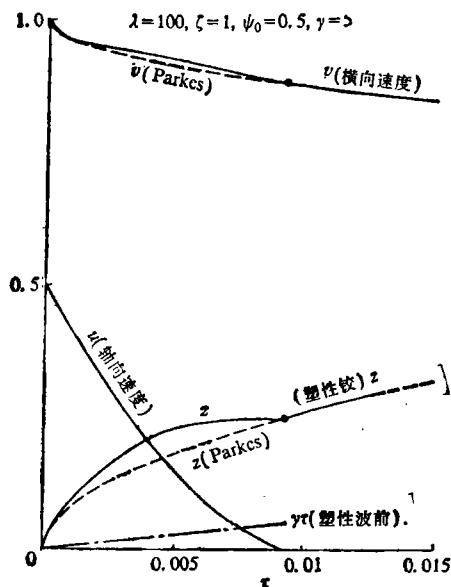


图4 算例1的计算结果

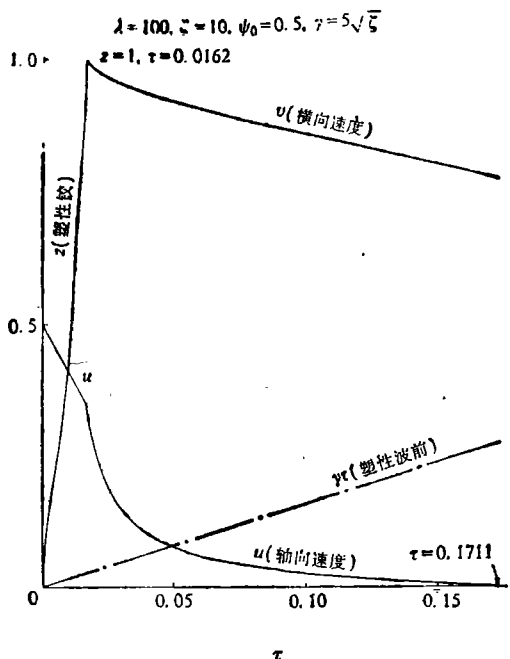


图5 算例2的计算结果

在这组参数下的计算结果如图5所示。当 $\tau = \tau^* = 0.0162$ 时 $z = 1$ 而 $u > 0$, 因此当 $\tau > \tau^*$ 时应采用方程组(19)代替(18)。从图5中看到, 轴向速度 u 先是很快衰减, 但随后减慢, 经过很长时间才最终衰减为0。这一现象可解释如下: 当铰 H 到达梁根部并固定于该处之后, 铰 H_1 与它的距离渐渐减小, 两铰上的弯矩差 $(M_0 - M_1)$ 随之减小; 于是, 从图3可知 H_1 处的轴力 N_1 逐渐减小, 从(14)式可知轴向速度 U 的变化将越来越缓慢。

以上两个算例表明, 撞击物质量与梁的质量之比对解的性质影响很大。撞击物轻而快时, 轴向运动衰减得十分迅速; 反之, 撞击物重而慢时, 轴向运动的衰减要迟缓得多。

在以上两个算例中, 都证实了移行铰 H 比塑性波前 H_1 移动得快, 因而图2假设的运动图象是合理的。

八、结 论

本文对刚-线性强化悬臂梁端部承受刚性块斜撞击的问题建立了力学分析模型。这是一个将 Parkes-Stronge-Yu 模型与 Taylor 模型结合起来的“双铰模型”, 横向扰动和轴向扰动分别以移行铰和塑性波前(也是一个广义塑性铰)的形式在梁内传播。文中说明了, 当材料的强化微弱(具体来说就是强化模量 E_p 的量阶与屈服应力 σ_s 的量阶相同或更低)时, 这样的双铰模型是一个合理的近似。文中也说明了, 两种扰动传播过程不是互不相关的, 它们通过包含双铰的速度连续性方程、动力学方程以及包含弯矩和轴力的屈服条件、流动法则而互相耦合。

算例表明,当撞击物轻而快时,轴向运动衰减得很快,此后梁的运动遵循 Parkes 解;当撞击物质量大,或输入动能大,或轴向初速大时,移行铰将先达到梁的根部,此后梁的轴向运动还要持续相当长的一段时间。

本文未考虑弹性效应,同时假设材料强化是微弱的,所以这一分析当然只是一种近似。但对工程中经常遇到的结构受飞射物斜撞击的问题,本文第一次提出了力学分析模型,相信对理解斜撞击下的结构塑性动力响应的力学机理有所教益。有关的实验验证工作已在英国剑桥大学工程系实验室进行,结果将另行报道。

参 考 文 献

- [1] Jones, N., *Appl. Mech. Rev.*, 42(1989), 95—115.
- [2] Taylor, G. I., *Proc. R. Soc., Series A*, 194(1948), 289.
- [3] Parkes, E. W., *Proc. R. Soc., Series A*, 228(1955), 462.
- [4] Stronge, W. J. & Yu, T. X. (余同希), *Int. J. Solids Struct.*, 25(1989), 769—782.
- [5] Hua, Y. L. (华云龙), Yu, T. X. (余同希) & Reid, S. R., *Int. J. Impact Engng.*, 7(1988), 401—413.