中国科学: 数学　2019 年　第 49 卷　第 2 期: 267～280

SCIENTIA SINICA Mathematica

综　述

二维不可压热传导黏性流体边界层的数学分析

献给齐民友教授 90 华诞

王亚光*, 朱世勇

上海交通大学数学科学学院, 科学工程计算教育部重点实验室, 上海 200240

E-mail: ygwang@sjtu.edu.cn, shiyong_zhu@sjtu.edu.cn

收稿日期: 2018-04-02; 接受日期: 2018-12-04; 网络出版日期: 2018-12-29; * 通信作者

国家自然科学基金 (批准号: 11631008 和 11826019) 资助项目

摘要　本文总结我们对二维不可压热传导黏性流体的运动在小黏性和小热传导极限下的边界层的数学理论分析. 在黏性系数和热传导系数为同阶小量的假设下, 首先利用多尺度方法得到二维不可压热传导黏性流场的速度边界层和温度边界层所满足的方程; 其次在边界层切向速度场关于法向变量单调的假设下, 通过运用 Crocco 变换及能量方法得到此边界层方程在有限阶光滑函数类中的局部适定性; 在速度场没有单调性假设的情形下, 利用 Littlewood-Paley 理论建立此边界层方程在关于切向变量解析的函数类中的局部适定性; 最后对于一类非单调的解析初值, 利用 Lyapunov 泛函方法得到此边界层方程的解在有限时间内发生爆破的结果, 这说明前面得到的解析解一般只能是局部存在的.

关键词　Navier-Stokes-Fourier 方程　速度层与温度层　适定性　解的爆破

MSC (2010) 主题分类　35Q35, 76D10, 76D03, 76N20

1　引言

本文分析二维不可压热传导黏性流场在小黏性和小热传导极限下的边界层问题. 考察下述半空间 $\{(t,x,y)\mid t>0, x\in\mathbb{R}, y>0\}$ 中描述黏性不可压热传导流体运动的 Navier-Stokes-Fourier 方程:

$$\begin{cases}\partial_x u+\partial_y v=0,\\ \partial_t u+u\partial_x u+v\partial_y u+\dfrac{1}{\rho}\partial_x p+\nu g_x(\theta-\theta_\infty)=\epsilon\dfrac{1}{\rho}(\partial_x^2u+\partial_y^2u),\\ \partial_t v+u\partial_x v+v\partial_y v+\dfrac{1}{\rho}\partial_y p+\nu g_y(\theta-\theta_\infty)=\epsilon\dfrac{1}{\rho}(\partial_x^2v+\partial_y^2v),\\ \rho c(\partial_t\theta+u\partial_x\theta+v\partial_y\theta)=\kappa(\partial_x^2\theta+\partial_y^2\theta)+\epsilon\Phi(t,x,y),\end{cases}\tag{1.1}$$

英文引用格式: Wang Y G, Zhu S Y. Mathematical analysis of boundary layers in two-dimensional incompressible viscous heat conducting flows (in Chinese). Sci Sin Math, 2019, 49: 267–280, doi: 10.1360/N012018-00079

　

其中 ρ 表示密度, p 表示压强, c 为比热容, ϵ 为黏性系数, κ 为热传导系数, 耗散函数 $\Phi(t,x,y)$ 定义为

$$\Phi(t,x,y)=2[(\partial_x u)^2+(\partial_y v)^2]+(\partial_y u+\partial_x v)^2.$$

$\nu g_x(\theta-\theta_\infty)$ 和 $\nu g_y(\theta-\theta_\infty)$ 来自浮力, θ_∞ 为参考温度, ν 表示流体温度为 θ_∞ 时的热膨胀系数, $\boldsymbol{g}=(g_x,g_y)$ 为重力加速度. 不失一般性, 本文假设 (1.1) 中 $\rho=c=\nu=1$, θ_∞ 为常数. 关于 (1.1) 详细的物理背景可参见文献 [1].

当流体黏性和热传导作用比较小时, 流体在远离物理边界 $\{y=0\}$ 的区域由于所受摩擦力较小, 故其运动可近似地由如下 Euler 方程来描述:

$$\begin{cases}\partial_x u+\partial_y v=0,\\ \partial_t u+u\partial_x u+v\partial_y u+\dfrac{1}{\rho}\partial_x p+\nu g_x(\theta-\theta_\infty)=0,\\ \partial_t v+u\partial_x v+v\partial_y v+\dfrac{1}{\rho}\partial_y p+\nu g_y(\theta-\theta_\infty)=0,\\ \rho c(\partial_t\theta+u\partial_x\theta+v\partial_y\theta)=0.\end{cases}\tag{1.2}$$

一般而言, 在边界 $\{y=0\}$ 附近这种近似是不成立的. 在边界附近极小的区域内, 流体黏性导致的摩擦力会阻碍流体的运动, 使得流体的速度在此区域内发生快速变化, 即流体存在速度边界层. 此外, 流体的热传导以及摩擦产生的热量也会使得流体的温度在边界附近区域内发生快速变化, 即流体存在温度边界层. 本文的目的就是分析由 (1.1) 刻画的不可压黏性热传导流体的运动在边界附近的性态. 显然, 流体在边界附近的性态要受到边界条件的影响. 对于方程 (1.1) 的速度场 (u,v), 一种经典的边界条件为无滑移边界条件:

$$u\,|_{y=0}=v\,|_{y=0}=0.\tag{1.3}$$

而对于温度的边界条件, 一种简单的情形是流体在边界的温度是给定的:

$$\theta\,|_{y=0}=\bar{\theta}(t,x).\tag{1.4}$$

另外一种情形是流体在边界具有热交换, 满足

$$(\partial_y\theta+b(t,x)\theta)\,|_{y=0}=0.\tag{1.5}$$

边界层的概念最早是由 Prandtl 于 1904 年在文献 [2] 中提出的. 对于满足无滑移边界条件的不考虑热传导效应的不可压黏性流体, Prandtl 得到一个退化的抛物方程与椭圆方程耦合的方程组, 即著名的 Prandtl 方程来描述边界层内流体的运动. 自 Prandtl 边界层理论提出以来, 很多数学工作者致力于建立它的数学理论. 最早的工作是由文献 [3,4] 对于二维 Prandtl 方程的初边值问题在切向速度关于法向变量严格单调递增的假设下通过引入 Crocco 变换得到的局部适定性. 最近, 在此单调性假设下, 文献 [5,6] 分别发展能量方法得到了二维 Prandtl 方程在有限阶 Sobolev 空间中的局部适定性. Prandtl 观察到, 在单调性假设下, 如果外流压强是顺压, 即由边界层外场 Euler 流决定的压强在边界上关于边界层的切向流向是单调下降的, 边界层则会比较稳定. Xin 和 Zhang [7] 针对这种情形得到了 Prandtl 方程的整体解的存在性. 如果二维 Prandtl 边界层的切向速度场关于法向不满足单调性假设, 则 Prandtl 方程在解析函数类或 Gevery 类中有一些局部适定性结果. 这方面最早是由 Sammartino 和 Caflisch [8] 利用抽象的 Cauchy-Kowalevski 理论对于解析初值得到的局部适定性. 注意到 Prandtl 方程

的退化性主要发生在关于边界的切向方向, Lombardo 等 [9] 将文献 [8] 中的适定性对初值解析的要求放宽到仅需关于边界的切向变量是解析的. 最近对于切向变量解析的小初值, 也有一些关于 Prandtl 方程较长时间内适定性的工作 (参见文献 [10,11]). 除解析类中的讨论以外, 最近也有一些有意思的适定性工作是在 Gevrey 类中展开的, 参见文献 [12–14]. 此外, 在二维 Prandtl 边界层的切向速度场没有单调性假设时, 有一些在有限阶 Sobolev 空间中不适定或解的爆破的结果, 参见文献 [15–17]. 这些结果表明切向速度场的单调性假设可能是二维 Prandtl 方程在 Sobolev 空间中适定的必要条件. 对于三维 Prandtl 边界层方程的适定性也有一些讨论, 参见文献 [18,19] 及参考文献.

现实中的流场大多具有热传导性, 因此对热传导黏性流体的研究具有重要的理论意义及应用背景. 本文就是总结最近我们对具有热传导的二维不可压黏性流体的边界层进行的一些数学理论分析. 具体而言, 我们将考察带无滑移边界条件 (1.3) 和 (1.4) 或者 (1.3) 和 (1.5) 的不可压 Navier-Stokes-Fourier 方程 (1.1) 在黏性系数与热传导系数同时趋于零时的边界层所满足的问题以及相应的适定性理论. 为了聚焦速度层与温度层的相互作用, 本文将只针对黏性系数 ϵ 和热传导系数 κ 为同一量级的情形来进行讨论.

本文随后几节的安排如下: 第 2 节中将利用多尺度方法推导出 (1.1) 带边界条件 (1.3) 和 (1.4) 或者 (1.3) 和 (1.5) 的边界层方程. 从中可以看到速度层与温度层互相干扰的性态. 然后在第 3 节中, 我们在切向速度场关于法向变量严格单调的假设下通过利用 Crocco 变换及能量方法得到边界层方程在有限阶光滑函数类中的局部适定性. 在切向速度场关于法向变量不一定单调时, 第 4 节利用 Littlewood-Paley 理论得到边界层方程在关于边界切向变量解析的函数类中的局部适定性. 最后在第 5 节中, 对于一类切向速度场关于法向变量非单调的解析初值, 我们介绍一个解在有限时间爆破的结果, 这一结果说明此边界层方程的解析解一般只是局部存在的.

2 边界层方程的导出

本节将针对黏性系数和热传导系数均为 ϵ 的情形, 给出带边界条件 (1.3) 和 (1.4) 或者 (1.3) 和 (1.5) 的方程 (1.1) 的解的渐近性态, 利用多尺度方法得到边界层方程.

如文献 [2], 通过比较方程 (1.1) 中的对流项与耗散项关于 ϵ 的量阶, 可知速度边界层与温度边界层具有相同的量阶 $O(\sqrt{\epsilon})$. 为此假设 (1.1) 的解有如下形式展式:

$$\begin{cases} u(t,x,y)=\displaystyle\sum_{i=0}^{1}\epsilon^{\frac{i}{2}}\left(u^{I,i}(t,x,y)+u^{B,i}\left(t,x,\frac{y}{\sqrt{\epsilon}}\right)\right)+o(\sqrt{\epsilon}),\\ v(t,x,y)=\displaystyle\sum_{i=0}^{1}\epsilon^{\frac{i}{2}}\left(v^{I,i}(t,x,y)+v^{B,i}\left(t,x,\frac{y}{\sqrt{\epsilon}}\right)\right)+o(\sqrt{\epsilon}),\\ p(t,x,y)=\displaystyle\sum_{i=0}^{1}\epsilon^{\frac{i}{2}}\left(p^{I,i}(t,x,y)+p^{B,i}\left(t,x,\frac{y}{\sqrt{\epsilon}}\right)\right)+o(\sqrt{\epsilon}),\\ \theta(t,x,y)=\displaystyle\sum_{i=0}^{1}\epsilon^{\frac{i}{2}}\left(\theta^{I,i}(t,x,y)+\theta^{B,i}\left(t,x,\frac{y}{\sqrt{\epsilon}}\right)\right)+o(\sqrt{\epsilon}),\end{cases} \tag{2.1}$$

其中 $(u^{B,i},v^{B,i},p^{B,i},\theta^{B,i})(t,x,Y)$ 在 $Y=\frac{y}{\sqrt{\epsilon}}\to\infty$ 时是快速衰减的. 将形式展开 (2.1) 代入到 (1.1)

中, 并令 $\epsilon\to 0$, 可得

$$\begin{cases}\partial_x u^{I,0}+\partial_y v^{I,0}=0,\\ \partial_t u^{I,0}+u^{I,0}\partial_x u^{I,0}+v^{I,0}\partial_y u^{I,0}+\partial_x p^{I,0}+g_x(\theta^{I,0}-\theta_\infty)=0,\\ \partial_t v^{I,0}+u^{I,0}\partial_x v^{I,0}+v^{I,0}\partial_y v^{I,0}+\partial_y p^{I,0}+g_y(\theta^{I,0}-\theta_\infty)=0,\\ \partial_t\theta^{I,0}+u^{I,0}\partial_x\theta^{I,0}+v^{I,0}\partial_y\theta^{I,0}=0.\end{cases}\tag{2.2}$$

此即为不可压非等熵 Euler 方程, 它描述边界层外流体的运动.

将形式展开 (2.2) 代入到 $(1.1)_1$, 可得

$$\partial_Y v^{B,0}=0,$$

再由 $\lim_{Y\to\infty}v^{B,0}(t,x,Y)=0$, 得到

$$v^{B,0}=0,\tag{2.3}$$

由边界条件 (1.3) 和 (2.3), 得到

$$v^{I,0}(t,x,0)=0,\tag{2.4}$$

这就是求解不可压非等熵 Euler 方程 (2.2) 的边界条件.

将形式展开 (2.1) 代入到 $(1.1)_3$, 再利用 (2.3), 我们有

$$\partial_Y p^{B,0}=0,$$

再由 $\lim_{Y\to\infty}p^{B,0}(t,x,Y)=0$, 得到

$$p^{B,0}(t,x,Y)=0.\tag{2.5}$$

利用 (2.3) 和 (2.5), 由形式展开 (2.1) 和方程 (1.1), 可以得到

$$\begin{cases}u^p(t,x,Y)=u^{B,0}(t,x,Y)+u^{I,0}(t,x,0),\\ v^p(t,x,Y)=v^{B,1}(t,x,Y)+v^{I,1}(t,x,0)+Y\partial_y v^{I,0}(t,x,0),\\ \theta^p(t,x,Y)=\theta^{B,0}(t,x,Y)+v^{I,0}(t,x,0)\end{cases}\tag{2.6}$$

满足下述边界层方程:

$$\begin{cases}\partial_x u^p+\partial_Y v^p=0,\\ \partial_t u^p+u^p\partial_x u^p+v^p\partial_Y u^p+\partial_x P+g_x(\theta^p-\theta_\infty)=\partial_Y^2 u^p,\\ \partial_t\theta^p+u^p\partial_x\theta^p+v^p\partial_Y\theta^p=\partial_Y^2\theta^p+(\partial_Y u^p)^2,\end{cases}\tag{2.7}$$

其中 $P(t,x)=p^{I,0}(t,x,0)$ 是外场的 Euler 流 (2.2) 和 (2.4) 确定的压强在边界上的值.

再根据解的渐近展开 (2.1), 我们得到:

(1) 若方程 (1.1) 边界条件为 (1.3) 和 (1.4), 则 (2.7) 具有如下的边界条件:

$$\begin{cases} u^p\,|_{Y=0}=0, \quad v^p\,|_{Y=0}=0, \quad \theta^p\,|_{Y=0}=\bar{\theta}, \\ \lim\limits_{Y\to\infty} u^p = u^{I,0}(t,x,0), \\ \lim\limits_{Y\to\infty} \theta^p = \theta^{I,0}(t,x,0); \end{cases} \tag{2.8}$$

(2) 若方程 (1.1) 边界条件为 (1.3) 和 (1.5), 则 (2.7) 的边界条件为

$$\begin{cases} u^p\,|_{Y=0}=0, \quad v^p\,|_{Y=0}=0, \quad \partial_Y\theta^p\,|_{Y=0}=0, \\ \lim\limits_{Y\to\infty} u^p = u^{I,0}(t,x,0), \\ \lim\limits_{Y\to\infty} \theta^p = \theta^{I,0}(t,x,0). \end{cases} \tag{2.9}$$

综上所得, 我们有如下结论:

命题 2.1 假设问题 (1.1) 中 $\kappa=\epsilon$, 则在 $\epsilon\to 0$ 时, 其解 (u,v,p,θ) 有如下形式展开式:

$$\begin{cases} u(t,x,y)=u^{I,0}(t,x,y)+u^{B,0}\left(t,x,\dfrac{y}{\sqrt{\epsilon}}\right)+O(\sqrt{\epsilon}), \\ v(t,x,y)=v^{I,0}(t,x,y)+\epsilon^{\frac12}\left(v^{I,1}(t,x,y)+v^{B,1}\left(t,x,\dfrac{y}{\sqrt{\epsilon}}\right)\right)+O(\sqrt{\epsilon}), \\ p(t,x,y)=p^{I,0}(t,x,y)+O(\sqrt{\epsilon}), \\ \theta(t,x,y)=\theta^{I,0}(t,x,y)+\theta^{B,0}\left(t,x,\dfrac{y}{\sqrt{\epsilon}}\right)+O(\sqrt{\epsilon}), \end{cases}$$

其中 $(u^{B,0},v^{B,1},\theta^{B,0})(t,x,Y)$ 在 $Y\to\infty$ 时快速衰减到零.

(1) $(u^{I,0},v^{I,0},p^{I,0},\theta^{I,0})$ 为带边界条件 (2.4) 的 Euler 方程 (2.2) 的解;

(2) (u^p,v^p,θ^p) 是由 (2.6) 定义的边界层函数, 它满足边界层方程 (2.7), 并且当 (1.1) 的边界条件是 (1.3) 和 (1.4) 时, (u^p,v^p,θ^p) 的边界条件由 (2.8) 来刻画, 当 (1.1) 的边界条件是 (1.3) 和 (1.5) 时, 其边界条件由 (2.9) 来刻画.

注 2.1 当方程 (1.1) 所定义的区域非平坦时, 我们可以利用文献 [20] 中方法类似地导出上述边界层方程.

3 边界层方程在单调类中的局部适定性

本节将讨论由不可压 Navier-Stokes-Fourier 方程 (1.1) 导出的边界层方程, 在切向速度关于边界法向变量严格单调递增的函数类中的局部适定性. 考虑定义在半平面上的 (1.1), 满足边界条件 (1.3) 和 (1.5) 的情形. 假设 $g_x=1$, 由命题 2.1 可知, 此时的小黏性和小热传导系数极限由下述边界层方程的定解问题来刻画:

$$\begin{cases} \partial_x u+\partial_y v=0, \quad t>0, \quad x\in\mathbb{R}, \quad y>0, \\ \partial_t u+u\partial_x u+v\partial_y u=\partial_y^2 u-\partial_x P-(\theta-\theta_\infty), \\ \partial_t\theta+u\partial_x\theta+v\partial_y\theta=\partial_y^2\theta+(\partial_y u)^2, \\ u\,|_{y=0}=v\,|_{y=0}=0, \quad \partial_y\theta\,|_{y=0}=0, \quad u\,|_{y\to\infty}=U^E, \quad \theta\,|_{y\to\infty}=\theta^E, \\ u\,|_{t=0}=u_0, \quad \theta\,|_{t=0}=\theta_0, \end{cases} \tag{3.1}$$

其中 $U^E(t,x)$、$\theta^E(t,x)$ 和 $P(t,x)$ 分别表示由 Euler 流 (2.2) 及 (2.4) 确定的切向速度、温度和压强在边界上的值, 它们满足

$$\partial_t U^E + U^E \partial_x U^E = -\partial_x P - (\theta^E - \theta_\infty), \tag{3.2}$$

以及

$$\partial_t \theta^E + U^E \partial_x \theta^E = 0. \tag{3.3}$$

类似于经典 Prandtl 方程, 研究问题 (3.1) 的适定性, 主要困难来自于方程的退化性、非局部性和混合性. 由于 $(3.1)_2$ 中没有速度 u 关于 x 的耗散项, 而 v 通过 $(3.1)_1$ 可表示为

$$v(t,x,y) = -\int_0^y \partial_x u dy',$$

故如果用能量估计来分析此问题, 一般就无法控制这一项. 为了克服这一困难, 本节将借鉴文献 [5] 的思想, 在切向速度 $u(t,x,y)$ 关于 y 单调的函数类中建立它的局部适定性.

首先假设初值和 Euler 外流满足如下单调性:

$$\begin{cases} U^E(t,x) > 0, \quad u_0(x,y) > 0, & \forall\, t \in [0,T], \quad x \in \mathbb{R}, \quad y > 0, \\ \partial_y u_0(x,y) > 0, & \forall\, y \geqslant 0. \end{cases}$$

在此假设下, 引入如下的 Crocco 变换:

$$\tau = t, \quad \xi = x, \quad \eta = \frac{u(t,x,y)}{U^E(t,x)},$$

及新的未知函数:

$$w(\tau,\xi,\eta) = \frac{\partial_y u(t,x,y)}{U^E(t,x)}, \quad s(\tau,\xi,\eta) = \frac{\theta(t,x,y)}{\theta^E(t,x)}.$$

由 (3.1) 并利用 (3.2) 和 (3.3) 可知, (w,s) 在 $Q_T = (0,T) \times Q \triangleq \{(\tau,\xi,\eta) \mid 0 < \tau < T, \xi \in \mathbb{R}, 0 < \eta < 1\}$ 中满足如下的初边值问题:

$$\begin{cases} \partial_\tau w + \eta U^E \partial_\xi w + A \partial_\eta w + B_1 w = w^2 \partial_\eta^2 w - \dfrac{\theta^E}{U^E} w \partial_\eta s, \\ \partial_\tau s + \eta U^E \partial_\xi s + A \partial_\eta s + B_2 s = w^2 \partial_\eta^2 s + \dfrac{{U^E}^2}{\theta^E} w^2, \\ \left(w \partial_\eta w - \dfrac{\theta^E}{U^E} s \right)\Big|_{\eta=0} = \dfrac{\partial_\xi P + \theta_\infty}{U^E}, \quad \partial_\eta s|_{\eta=0} = 0, \quad w|_{\eta=1} = 0, \quad s|_{\eta=1} = 1, \\ w|_{\tau=0} = w_0 := \dfrac{\partial_y u_0}{U^E}, \quad s|_{\tau=0} = s_0 := \dfrac{\theta_0}{\theta^E}, \end{cases} \tag{3.4}$$

其中

$$A = (1-\eta^2)\partial_\xi U^E + (1-\eta)\frac{\partial_\tau U^E}{U^E}, \quad B_1 = \eta \partial_\xi U^E + \frac{\partial_\tau U^E}{U^E}, \quad B_2 = (\eta - 1)\frac{U^E \partial_\xi \theta^E}{\theta^E}.$$

对于问题 (3.4), 记

$$w_0^j(\xi,\eta) = (\partial_\tau^j w)(0,\xi,\eta), \quad s_0^j(\xi,\eta) = (\partial_\tau^j s)(0,\xi,\eta), \quad \forall\, j \in \mathbb{N}.$$

显然, w_0^j 和 s_0^j 可以由初值 w_0 和 s_0 通过 (3.4) 形式地导出. 为了得到问题 (3.4) 的适定性, 需对初值和外流作一定的假设:

假设 3.1 对任意整数 $k \geqslant 5$, 假设问题 (3.4) 中初值及外流满足如下的条件:

(1) $U^E(t,x)$、$P(t,x)$ 和 $\theta^E(t,x)$ 在 $[0,T]\times\mathbb{R}$ 中具有直到 $k+2$ 阶的有界导数, 且满足 $U^E(t,x)>0$, $\theta^E(t,x)>0$;

(2) 存在一个正常数 δ, 使得对任意 $(\xi,\eta)\in\mathbb{R}\times(0,1)$, 有

$$w(\xi,0)\geqslant 2\delta,\quad s(\xi,\eta)\geqslant 2\delta;$$

(3) $(w_0,s_0-1)\in H^{3k}(Q)$ 且 $w_0^j,s_0^j\in H^k(Q)$, $1\leqslant j\leqslant k$, 此外存在依赖于 (w_0,s_0-1) 的 $H^{3k}(Q)$ 范数的常数 M, 使得

$$\|w_0\|_{H^k(Q)}+\|s_0-1\|_{H^k(Q)}+\sum_{j=1}^k(\|w_0^j\|_{H^k(Q)}+\|s_0^j\|_{H^k(Q)})\leqslant M;$$

(4) 问题 (3.4) 的初值及边值满足直到 k 阶的相容性条件.

对于问题 (3.4), 利用经典的 Picard 迭代及能量估计的方法, 可以得到如下结果:

定理 3.1 在假设 3.1 下, 存在一个正常数 $0<T^*\leqslant T$ 使得问题 (3.4) 在 Q_{T^*} 上存在唯一的经典解 (w,s), 它们有直到二阶的连续有界导数, 且满足

$$w(\tau,\xi,\eta)>0,\quad \eta\in[0,1),\quad s(\tau,\xi,\eta)\geqslant\delta,\quad \eta\in[0,1].$$

通过 Crocco 变换, 利用定理 3.1 即可得到问题 (3.1) 的适定性:

定理 3.2 假设初值 w_0 和 s_0 满足

$$\begin{aligned}&\partial_y u_0>0,\quad \forall\, y\geqslant 0,\\&(u_0(x,y),\theta(x,y))\xrightarrow{y\to\infty}(U^E(0,x),\theta^E(0,x)),\end{aligned}$$

且假设 3.1 成立, 则存在 $0<T_*\leqslant T$ 使得问题 (3.1) 在 $[0,T_*]\times\mathbb{R}_+^2$ 上存在唯一解 (u,v,θ), 满足

(1) 对任意 $y>0$ 有 $u(t,x,y)>0$, 对任意 $y\geqslant 0$ 有 $\partial_y u(t,x,y)>0$, 且存在某正常数 δ_0 使得对任意 $y\geqslant 0$ 有 $\theta(t,x,y)\geqslant\delta_0$;

(2) (u,θ) 和 $(\partial_y u,\partial_y\theta)$ 在 $[0,T_*]\times\mathbb{R}_+^2$ 中连续有界;

(3) v、$\partial_y v$、$\frac{\partial_y^2 u}{\partial_y u}$ 和 $\frac{\partial_y u\partial_y^3 u-(\partial_y^2 u)^2}{(\partial_y u)^3}$ 在 $[0,T_*]\times\mathbb{R}_+^2$ 中连续有界.

上述结论的详细证明在脚注 1) 中给出.

4 边界层方程在解析类中的局部适定性

类似在文献 [16, 21] 等中所得到的经典的二维不可压 Prandtl 方程的不稳定性理论, 对边界层方程 (3.1), 当初始切向速度场关于法向非单调时, 它在有限阶 Sobolev 空间中一般是不稳定的. 本节将分析边界层方程 (2.7) 在解析的函数类中的适定性.

考虑 $\mathbb{R}_+^2=\mathbb{R}_x\times\mathbb{R}_y^+$ 中方程 (1.1) 满足边界条件 (1.3) 和 (1.4) 的情形. 假设 $g_x=1$, 由第 2 节中

1) Wang Y G, Zhu S Y. Well-posedness of thermal Prandtl system with monotonic initial data. In preparation.

的推导可知其小黏性与小热传导系数极限下的边界层由下述问题刻画:

$$\begin{cases}\partial_x u+\partial_y v=0, \quad t>0, \quad x\in\mathbb{R}, \quad y>0,\\ \partial_t u+u\partial_x u+v\partial_y u=\partial_y^2 u-\partial_x P-(\theta-\theta_\infty),\\ \partial_t\theta+u\partial_x\theta+v\partial_y\theta=\partial_y^2\theta+(\partial_y u)^2,\\ u\,|_{y=0}=v\,|_{y=0}=0, \quad \theta\,|_{y=0}=\bar\theta, \quad u\,|_{y\to\infty}=U^E, \quad \theta\,|_{y\to\infty}=\theta^E,\\ u\,|_{t=0}=u_0, \quad \theta\,|_{t=0}=\theta_0,\end{cases} \tag{4.1}$$

其中 $U^E(t,x)$、$\theta^E(t,x)$ 和 $P(t,x)$ 与 (3.1) 中给出的相应函数一样, 满足 (3.2) 和 (3.3).

为了在 Sobolev 范数下讨论问题, 首先利用辅助函数将问题 (4.1) 在无穷远处的边界条件齐次化. 令

$$\begin{aligned}u^s(t,x,y)&=\phi(t,y)U^E(t,x),\\ \theta^s(t,x,y)&=\phi(t,y)(\Theta^E(t,x)-\bar\Theta(t,x))+\bar\Theta(t,x),\end{aligned}$$

其中 $\Theta^E=\theta^E-\theta_\infty, \bar\Theta=\bar\theta-\theta_\infty$,

$$\phi(t,y)=\mathrm{Erf}\bigg(\frac{y}{\sqrt{4(t+1)}}\bigg)$$

为如下热方程问题的解:

$$\begin{cases}\partial_t\phi-\partial_y^2\phi=0,\\ \phi\,|_{y=0}=0, \quad \phi\,|_{y\to\infty}=1,\\ \phi\,|_{t=0}=\mathrm{Erf}\Big(\dfrac{y}{2}\Big),\end{cases}$$

其中 $\mathrm{Erf}(z)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^z \mathrm{e}^{-s^2}ds$.

将 $u=u^s+W$ 和 $\theta-\theta_\infty=\theta^s+S$ 代入到 (4.1), 并利用 (3.2) 和 (3.3), 可得 (W,S) 满足下述问题:

$$\begin{cases}\partial_t W+(W+u^s)\partial_x W+W\partial_x u^s-\displaystyle\int_0^y\partial_x(W+u^s)dy'\partial_y(W+u^s)\\ \quad=\partial_y^2 W-S+(1-\phi)F(t,x,y),\\ \partial_t S+(W+u^s)\partial_x S+W\partial_x\theta^s-\displaystyle\int_0^y\partial_x(W+u^s)dy'\partial_y(\theta^s+S)\\ \quad=\partial_y^2 S+(\partial_y W+U^E\partial_y\phi)^2+(1-\phi)G(t,x,y),\\ W\,|_{y=0}=0, \quad S\,|_{y=0}=0, \quad W\,|_{y\to\infty}=0, \quad S\,|_{y\to\infty}=0,\\ W\,|_{t=0}=W_0:=u_0-\mathrm{Erf}\Big(\dfrac{y}{2}\Big)U(0,x),\\ S\,|_{t=0}=S_0:=\theta_0-\theta_\infty-\mathrm{Erf}\Big(\dfrac{y}{2}\Big)(\Theta^E(0,x)-\bar\Theta(0,x))-\bar\Theta(0,x),\end{cases} \tag{4.2}$$

其中

$$F(t,x,y)=\phi U^E\partial_x U^E-\partial_x P-\bar\Theta, \quad G(t,x,y)=\phi U^E(\partial_x\theta^E-\partial_x\bar\theta)-\partial_t\bar\theta.$$

对于问题 (4.2), 如文献 [11], 可以利用 Littlewood-Paley 理论建立局部适定性结果. 首先选取光滑函数 φ 和 ψ, 满足

$$\operatorname{supp}\varphi \subset \left\{\tau\in\mathbb{R}\,\middle|\,\frac{3}{4}\leqslant|\tau|\leqslant\frac{8}{3}\right\},\quad \operatorname{supp}\psi \subset \left\{\tau\in\mathbb{R}\,\middle|\,|\tau|\leqslant\frac{4}{3}\right\},$$

以及

$$\psi(\tau)+\sum_{i\geqslant 0}\varphi(2^{-i}\tau)=1,\quad \forall\,\tau\in\mathbb{R}.$$

对任意 $f\in\mathcal{S}'(\mathbb{R})$, 引入如下的非齐次 Littlewood-Paley 分解:

$$f=\sum_{k\in\mathbb{Z}}\Delta_k f,$$

其中

$$\begin{cases}\Delta_k f=0, & k\leqslant -2,\\ \Delta_{-1}f=\mathcal{F}^{-1}[\psi(\xi)\mathcal{F}[f]], & \\ \Delta_k f=\mathcal{F}^{-1}[\varphi(2^{-k}\xi)\mathcal{F}[f]], & k\geqslant 0,\end{cases}$$

这里 $\mathcal{F}=\mathcal{F}_{x\to\xi}$ 表示关于 x 变量的 Fourier 变换.

类似文献 [11], 定义如下的函数空间:

定义 4.1 (1) 假设 $s\in\mathbb{R}$, j 为非负整数. 对任意 $u(x)\in\mathcal{S}'(\mathbb{R})$, $v(x,y)\in\mathcal{S}'(\mathbb{R}^2_+)$, 以及给定的光滑函数 $\Psi(y)$, 令

$$\|u\|_{B^s}:=\sum_{k\in\mathbb{Z}}2^{ks}\|\Delta_k u\|_{L^2_x},\quad \|v\|_{B^{s,j}_\Psi}:=\sum_{i=0}^{j}\sum_{k\in\mathbb{Z}}2^{ks}\|\mathrm{e}^{\Psi}\Delta_k\partial_y^i v\|_{L^2_+}.$$

定义

$$B^s(\mathbb{R}):=\{u\in\mathcal{S}'(\mathbb{R})\mid \|u\|_{B^s}<\infty\},\quad B^{s,j}_\Psi(\mathbb{R}^2_+):=\{v\in\mathcal{S}'(\mathbb{R}^2_+)\mid \|v\|_{B^{s,j}_\Psi}<\infty\}.$$

(2) 给定 $p\in[1,+\infty]$, j 为非负整数. 对任意 $t>0$, 定义 $\tilde{L}^p_t(B^s(\mathbb{R}))$ 为 $C([0,t];\mathcal{S}(\mathbb{R}))$ 依范数

$$\|u\|_{\tilde{L}^p_t(B^s)}:=\sum_{k\in\mathbb{Z}}2^{ks}\left(\int_0^t\|\Delta_k u(t')\|^p_{L^2_x}dt'\right)^{\frac{1}{p}}$$

的完备化空间. 对任意给定的光滑函数 $\Psi(t,y)$, 定义 $\tilde{L}^p_t(B^{s,j}_\Psi(\mathbb{R}^2_+))$ 为 $C([0,t];\mathcal{S}(\mathbb{R}^2_+))$ 依范数

$$\|v\|_{\tilde{L}^p_t(B^{s,j}_\Psi)}:=\sum_{i=0}^{j}\sum_{k\in\mathbb{Z}}2^{ks}\left(\int_0^t\|\mathrm{e}^{\Psi}\Delta_k\partial_y^i v(t')\|^p_{L^2_+}dt'\right)^{\frac{1}{p}}$$

的完备化空间, 其中 $p=\infty$ 的情形按通常的方法进行定义.

(3) 给定非负函数 $f\in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+)$, j 为非负整数. 对任意给定的光滑函数 $\Psi(t,y)$, 定义带权 Chemin-Lerner 范数如下:

$$\|u\|_{\tilde{L}^p_{t,f}(B^{s,j}_\Psi)}:=\sum_{i=0}^{j}\sum_{k\in\mathbb{Z}}2^{ks}\left(\int_0^t f(t')\|\mathrm{e}^{\Psi}\Delta_k\partial_y^i u(t')\|^p_{L^2_+}dt'\right)^{\frac{1}{p}},$$

其中 $p=\infty$ 的情形按通常的方法进行定义.

为了建立问题 (4.2) 的适定性, 选取权函数 Ψ 为

$$\Psi(t,y)=\frac{1+y^2}{16(1+t)^{\kappa}},\tag{4.3}$$

其中 $\kappa\geqslant 2$ 为充分大的正常数. 对任意局部有界函数 Φ, 定义

$$u_\Phi=\mathcal{F}^{-1}[\mathrm{e}^{\Phi(t,\xi)}\mathcal{F}[u](t,\xi,y)].$$

为克服问题 (4.2) 中方程的退化性致使导数损失所带来的困难, 选取 Φ 为

$$\Phi(t,\xi)=(1-\lambda\rho(t))\langle\xi\rangle,\tag{4.4}$$

其中 $\langle\xi\rangle=1+|\xi|$, $\rho(t)$ 由如下问题确定:

$$\begin{cases}\dot\rho=\langle t\rangle^{\frac{\kappa}{4}}(\|\partial_yW_\Phi(t)\|_{B_\Psi^{\frac12,0}}+\|\partial_{yy}W_\Phi(t)\|_{B_\Psi^{\frac12,0}}+\|\mathrm{e}^{\langle D\rangle}U^E(t)\|_{B^{\frac12}})\\ \qquad+\langle t\rangle^{\frac{\kappa}{4}}(\|\partial_yS_\Phi(t)\|_{B_\Psi^{\frac12,0}}+\|\mathrm{e}^{\langle D\rangle}\Theta^E(t)\|_{B^{\frac12}}+\|\mathrm{e}^{\langle D\rangle}\bar\Theta(t)\|_{B^{\frac12}})\\ \qquad+\langle t\rangle^{\frac12}\|\mathrm{e}^{\langle D\rangle}U^E(t)\|^2_{B^{\frac12}}+\langle t\rangle\|\mathrm{e}^{\langle D\rangle}U^E(t)\|^2_{B^1}+\langle t\rangle^{\frac12}(\|\mathrm{e}^{\langle D\rangle}\Theta^E(t)\|^2_{B^1}+\|\mathrm{e}^{\langle D\rangle}\bar\Theta(t)\|^2_{B^1})\\ \qquad+\langle t\rangle^{\frac{\kappa}{2}}(\|W_\Phi(t)\|^2_{B_\Psi^{1,0}}+\|S_\Phi(t)\|^2_{B_\Psi^{1,0}})+\|W_\Phi(t)\|^2_{B_\Psi^{\frac12,0}}+\|\partial_yW_\Phi(t)\|^2_{B_\Psi^{\frac12,0}},\\ \rho|_{t=0}=0.\end{cases}\tag{4.5}$$

通过对问题 (4.2) 中非线性项运用 Bony 分解, 利用能量方法可以得到如下的适定性结果, 详细证明结果可参见脚注 2):

定理 4.1 设 $\Psi(t,y)$ 和 $\Phi(t,\xi)$ 分别由 (4.3) 和 (4.4) 定义, 且 κ 和 λ 充分大. 假设 Euler 流对某个 $T>0$ 满足

$$\mathrm{e}^{\langle D\rangle}U^E,\mathrm{e}^{\langle D\rangle}\Theta^E,\mathrm{e}^{\langle D\rangle}\bar\Theta\in\tilde L^\infty_T(B^{\frac32}(\mathbb{R})),\quad \mathrm{e}^{\langle D\rangle}\partial_xP,\mathrm{e}^{\langle D\rangle}\partial_t\bar\Theta\in\tilde L^\infty_T(B^1(\mathbb{R})).$$

若 (4.2) 中初值 (W_0,S_0) 满足

$$\mathrm{e}^{\langle D\rangle}W_0\in B^{1,1}_{\Psi_0},\quad \mathrm{e}^{\langle D\rangle}S_0\in B^{1,0}_{\Psi_0},$$

其中 $\Psi_0=\Psi(0,y)$, 则存在 $0<T_*\leqslant T$, 使得问题 (4.2) 在 $(0,T_*)$ 上存在唯一解 (W,S), 满足

$$\mathrm{e}^{\Phi(t,D)}W\in\tilde L^\infty_{T_*}(B^{1,1}_\Psi),\quad \mathrm{e}^{\Phi(t,D)}S\in\tilde L^\infty_{T_*}(B^{1,0}_\Psi),$$

其中 D 表示关于 x 的 Fourier 乘子.

注 4.1 (1) 在得到问题 (4.2) 解的先验估计后, 通过 (4.5) 可以得到 ρ 的上界估计, 从而得到 (4.2) 解关于 x 的解析半径的下界估计. 此解析半径也决定了解可能存在的生命区间.

(2) 若初值关于 y 变量具有高阶正则性且满足高阶相容性条件, 则可以证明解关于 y 变量也具有相应的正则性.

2) Wang Y G, Zhu S Y. Well-posedness of thermal Prandtl system with analytic initial data. Preprint.

5 边界层方程经典解的爆破

对于边界层方程 (2.2), 在前面两节中我们分别得到: 如果它的初始切向速度关于法向变量是严格单调递增的, 则它在有限阶 Sobolev 空间中存在局部解; 如果它的初值关于边界切向变量是解析的, 则它在关于边界切向变量解析的函数空间中有解. 一个自然的问题是, 这样的解是否长时间存在. 本节的主要目的是证明对这类边界层方程, 如果初值是非单调但是关于切向变量是解析的, 则它的解一般在有限阶 Sobolev 空间中在有限时间内将发生爆破.

考虑如下定义在 $\{(t,x,y)\mid t>0, x\in\mathbb{R}, y>0\}$ 上的边界层方程的初边值问题:

$$\begin{cases}\partial_x u+\partial_y v=0,\\ \partial_t u+u\partial_x u+v\partial_y u=\partial_y^2 u-\partial_x P-(\theta-\theta_\infty),\\ \partial_t\theta+u\partial_x\theta+v\partial_y\theta=\partial_y^2\theta+(\partial_y u)^2,\\ u\,|_{y=0}=v\,|_{y=0}=0,\quad \theta\,|_{y=0}=\bar{\theta},\quad u\,|_{y\to\infty}=U^E,\quad \theta\,|_{y\to\infty}=\theta^E,\\ u\,|_{t=0}=u_0,\quad \theta\,|_{t=0}=\theta_0,\end{cases}\tag{5.1}$$

其中 $U^E(t,x)$、$\theta^E(t,x)$ 和 $P(t,x)$ 与 (3.1) 中给出的相应函数一样, 满足 (3.2) 和 (3.3).

假设对某个 $T>0$, 有

$$\begin{aligned}&U^E,\theta^E\in C^1([0,T]\times\mathbb{R}),\quad U^E\,|_{x=0}=0,\quad (\theta^E+\partial_x P)\,|_{x=0}=\theta_\infty,\\ &\partial_t[(\partial_x P)^2]\,|_{x=0}=0,\quad \partial_x\theta^E\,|_{x=0}\geqslant 0.\end{aligned}\tag{5.2}$$

此外, 假设问题 (5.1) 中的初值及边值分别满足

$$\begin{aligned}&u_0,\theta_0\in C^1(\mathbb{R}_+^2),\qquad u_0\,|_{x=0}=0,\quad (\theta_0+\partial_x P(0,x))\,|_{x=0}=\theta_\infty,\\ &\partial_x u_0\,|_{x=0}\leqslant 0,\quad \partial_x\theta_0\,|_{x=0}\geqslant 0,\end{aligned}\tag{5.3}$$

以及

$$\bar{\theta}\in C^1([0,T]\times\mathbb{R}),\quad (\bar{\theta}+\partial_x P)\,|_{x=0}=\theta_\infty,\quad \partial_x\bar{\theta}\,|_{x=0}\geqslant 0.\tag{5.4}$$

对上述问题 (5.1), 我们有下面的定理:

定理 5.1 在 (5.2)–(5.4) 的假设下, 问题 (5.1) 的经典解在有限时间内爆破.

此定理的证明主要通过发展文献 [17] 中的思想来实现. 记 $\tilde{\theta}(t,x,y)=\theta(t,x,y)-\theta_\infty+\partial_x P(t,0)$, 并记

$$w(t,y)=u(t,0,y),\quad s(t,y)=\tilde{\theta}(t,0,y),$$

则由 (5.1)–(5.4) 可知,

$$\begin{cases}\partial_t w+w\partial_x u(t,0,y)+v(t,0,y)\partial_y w=\partial_y^2 w-s,\\ \partial_t s+w\partial_x\theta(t,0,y)+v(t,0,y)\partial_y s=\partial_y^2 s+(\partial_y w)^2,\\ w\,|_{y=0}=0,\quad s\,|_{y=0}=0,\quad w\,|_{y\to\infty}=0,\quad s\,|_{y\to\infty}=0,\\ w\,|_{t=0}=0,\quad s\,|_{t=0}=0.\end{cases}\tag{5.5}$$

若问题 (5.1) 在 $[0,T]$ 上存在一个经典解 $\{u,v,\theta\}$, 则通过能量方法可以证明问题 (5.5) 在 $[0,T]$ 上只有零解. 从而, $u(t,x,y)\,|_{x=0}=\tilde{\theta}(t,x,y)\,|_{x=0}=0$, 故可将其表示为如下形式:

$$u(t,x,y)=-x\bar{w}(t,x,y),\quad \tilde{\theta}(t,x,y)=-x\bar{s}(t,x,y). \tag{5.6}$$

此外, 由于 $U^E\,|_{x=0}=0$, 故同样可有

$$U^E(t,x)=-x\bar{U}^E(t,x),\quad \partial_x P(t,x)-\partial_x P(t,0)=-x\bar{P}(t,x). \tag{5.7}$$

令 $\tilde{w}(t,y)=\bar{w}(t,0,y)$, $\tilde{s}(t,y)=\bar{s}(t,0,y)$. 由于 $\{u,v,\theta\}$ 为问题 (5.1) 的经典解, 计算可得 $(\tilde{w},\tilde{s})$ 满足下述问题:

$$\begin{cases}\partial_t\tilde{w}-\tilde{w}^2+v(t,0,y)\partial_y\tilde{w}=\partial_y^2\tilde{w}-\bar{P}(t,0)-\tilde{s},\\ \partial_t\tilde{s}-\tilde{w}\tilde{s}+v(t,0,y)\partial_y\tilde{s}=\partial_y^2\tilde{s},\\ \tilde{w}\,|_{y=0}=0,\quad \tilde{w}\,|_{y\to\infty}=\bar{U}^E(t,0),\quad \tilde{s}\,|_{y=0}=-\partial_x\bar{\theta}(t,0),\quad \tilde{s}\,|_{y\to\infty}=-\partial_x\theta^E(t,0),\\ \tilde{w}\,|_{t=0}=\tilde{w}_0,\quad \tilde{s}\,|_{t=0}=\tilde{s}_0.\end{cases} \tag{5.8}$$

对上述 $\tilde{s}(t,y)$ 的问题运用极值原理可得, 若 $(\tilde{w},\tilde{s})$ 是问题 (5.8) 的经典解, 则在 $[0,T]\times\mathbb{R}_+$ 上有 $\tilde{s}(t,y)\leqslant 0$.

由于 $\tilde{w}$ 可能是负的, 为了对 $\tilde{w}$ 构造合适的 Lyapunov 泛函, 如文献 [17], 我们对其附加一个提升函数. 令

$$C_E=-\inf_{t\in[0,T]}\min\{\bar{U}^E(t,0),0\},\quad C_P=\sup_{t\in[0,T]}\max\{\bar{P}(t,0),0\}.$$

记 $\phi(t,y)$ 为下述问题确定的解:

$$\begin{cases}\partial_t\phi-\partial_y^2\phi=C_P,\\ \phi\,|_{y=0}=0,\quad \phi\,|_{y\to\infty}=C_E+C_Pt,\\ \phi\,|_{t=0}=C_E\mathrm{Erf}\left(\dfrac{y}{2}\right),\end{cases}$$

其中 $\mathrm{Erf}(z)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^z \mathrm{e}^{-s^2}ds$. 令 $a(t,y)=\tilde{w}(t,y)+\phi(t,y)$, 则 $a(t,y)$ 满足下述问题:

$$\begin{cases}\partial_t a-\partial_y^2 a=a^2-\partial_y^{-1}a\partial_y a+L[a]+G,\\ a\,|_{y=0}=0,\quad a\,|_{y\to\infty}=C_Pt+C_E+\bar{U}^E(t,0),\\ a\,|_{t=0}=a_0,\end{cases} \tag{5.9}$$

其中

$$L[a]=-2a\phi+\partial_y^{-1}\phi\partial_y a+\partial_y^{-1}a\partial_y\phi,\quad G=\phi^2-\partial_y^{-1}\phi\partial_y\phi+C_P-\bar{P}(t,0)-\tilde{s}.$$

对问题 (5.9) 运用极值原理可得: 若 $a(t,y)$ 是问题 (5.9) 在 $[0,T]$ 上的经典解, 且对任意 $y\in(0,y)$ 有 $a_0(y)>0$, 则在 $[0,T]\times[0,\infty)$ 上有 $a\geqslant 0$.

对上述问题的解 $a(t,y)$ 定义下述 Lyapunov 泛函:

$$\mathcal{G}(t)=\int_0^\infty a(t,y)\mathcal{Y}(y)dy,$$

其中 $\mathcal{Y}(y)$ 满足

$$\begin{cases} \mathcal{Y} \geqslant 0, \quad \mathcal{Y}|_{y=0} = \mathcal{Y}|_{y=\infty} = 0, \\ \mathcal{Y}'' \leqslant 0, \quad \forall\, y \in (\alpha, \gamma), \\ \mathcal{Y}'' \geqslant 0, \quad \forall\, y \in [0, \alpha] \cup [\gamma, \infty), \end{cases}$$

及其他一些条件 3), 这里 $0 < \alpha < \gamma < \infty$.

通过直接计算 3), 我们得到 $\mathcal{G}(t)$ 满足

$$\mathcal{G}'(t) \geqslant C_0 \mathcal{G}^2 - C_1 \mathcal{G},$$

其中 C_0 和 C_1 是两个正常数. 由此直接得到下面的定理:

定理 5.2 在 (5.2)–(5.4) 的假设下, 对一类初值 $(\tilde{w}_0, \tilde{s}_0)$, 问题 (5.8) 的经典解在 $(0, T)$ 内发生爆破.

此结论的详细证明可参见脚注 3).

参考文献

1 Schlichting H, Gersten K. Boundary-Layer Theory, Enlarged Edition. New York: Springer-Verlag, 2000
2 Prandtl L. Über Flüssigkeitsbewegung bei sehr kleiner Reibung. In: Verhandlungen des III Int Math Kongr, Heidelberg. Leipzig: Teubner, 1905, 484–491
3 Oleinik O A, Samokhin V N. Mathematical Models in Boundary Layer Theory. Applied Mathematics and Mathematical Computation, vol. 15. Boca Raton: Chapman & Hall/CRC, 1999
4 Oleinik O A. The Prandtl system of equations in boundary layer theory. Soviet Math Dokl, 1963, 4: 583–586
5 Alexandre R, Wang Y G, Xu C J, et al. Well-posedness of the Prandtl equation in Sobolev spaces. J Amer Math Soc, 2015, 28: 745–784
6 Masmoudi N, Wong T K. Local-in-time existence and uniqueness of solutions to the Prandtl equations by energy methods. Comm Pure Appl Math, 2015, 68: 1683–1741
7 Xin Z P, Zhang L Q. On the global existence of solutions to the Prandtl's system. Adv Math, 2004, 181: 88–133
8 Sammartino M, Caflisch R E. Zero viscosity limit for analytic solutions, of the Navier-Stokes equation on a half-space, I: Existence for Euler and Prandtl equations. Comm Math Phys, 1998, 192: 433–461
9 Lombardo M C, Cannone M, Sammartino M. Well-posedness of the boundary layer equations. SIAM J Math Anal, 2003, 35: 987–1004
10 Ignatova M, Vicol V. Almost global existence for the Prandtl boundary layer equations. Arch Ration Mech Anal, 2016, 220: 809–848
11 Zhang P, Zhang Z F. Long time well-posedness of Prandtl system with small and analytic initial data. J Funct Anal, 2016, 270: 2591–2615
12 Chen D X, Wang Y X, Zhang Z F. Well-posedness of the linearized Prandtl equation around a non-monotonic shear flow. Ann Inst H Poincaré Anal Non Linéaire, 2018, 35: 1119–1142
13 Gérard-Varet D, Masmoudi N. Well-posedness for the Prandtl system without analyticity or monotonicity. Ann Sci École Norm Sup (4), 2015, 48: 1273–1325
14 Li W X, Yang T. Well-posedness in Gevery space for the Prandtl system with non-degenerate critical points. ArXiv:1609.08430, 2016
15 E W, Engquist B. Blowup of solutions of the unsteady Prandtl's equation. Comm Pure Appl Math, 1997, 50: 1287–1293
16 Gérard-Varet D, Dormy E. On the ill-posedness of the Prandtl equation. J Amer Math Soc, 2010, 23: 591–609
17 Kukavica I, Vicol V, Wang F. The van Dommelen and Shen singularity in the Prandtl equations. Adv Math, 2017, 307: 288–311

3) Wang Y G, Zhu S Y. Blowup of solutions to the thermal Prandtl equations. Preprint.

18 Liu C J, Wang Y G, Yang T. On the ill-posedness of the Prandtl equations in three-dimensional space. Arch Ration Mech Anal, 2016, 220: 83–108
19 Liu C J, Wang Y G, Yang T. A well-posedness theory for the Prandtl equations in three space variables. Adv Math, 2017, 308: 1074–1126
20 Liu C J, Wang Y G. Derivation of Prandtl boundary layer equations for the incompressible Navier-Stokes equations in a curved domain. Appl Math Lett, 2014, 34: 81–85
21 Guo Y, Nguyen T. A note on Prandtl boundary layers. Comm Pure Appl Math, 2011, 64: 1416–1438

Mathematical analysis of boundary layers in two-dimensional incompressible viscous heat conducting flows

Yaguang Wang & Shiyong Zhu

Abstract This paper is to review our recent study on the well-posedness and blowup of the boundary layer equations in small viscosity and heat conductivity limit for the two-dimensional incompressible viscous heat conducting flows near a physical boundary. In the case that the viscosity and heat conductivity have the same scale, first we derive the boundary layer equations of the viscous layer and thermal layer for the incompressible Navier-Stokes-Fourier equations by multi-scale analysis, and then we shall review a well-posedness result established under the monotonicity condition of tangential velocity by using the Crocco transformation and the energy method. After that, when the tangential velocity does not satisfy the monotonicity assumption, we shall present a well-posedness result when the data are analytic with respect to the tangential variable, by using the Littlewood-Paley theory. We also present a blowup result in a finite time by introducing a Lyapunov functional, when the monotonicity condition is violated for the initial velocity. This shows that the analytic solution which we obtained exists in a finite time only in general.

Keywords **Navier-Stokes-Fourier equations, viscous layer and thermal layer, well-posedness, blowup of solutions**

MSC(2010) **35Q35, 76D10, 76D03, 76N20**

doi: 10.1360/N012018-00079