

# 有限温度场论与 $\eta$ - $\xi$ 时空\*

桂 元 星

(大连理工大学物理系, 大连 116023)

## 摘 要

本文讨论了  $\eta$ - $\xi$  时空与几种有限温度场论方法之间的联系。

**关键词** 量子场论、有限温度场论、 $\eta$ - $\xi$  时空

## 一、引 言

时空几何与物理学的联系始终是人们感兴趣的课题。最近,关于一种新时空<sup>[1-4]</sup>,  $\eta$ - $\xi$  时空及其上量子场的讨论开始引起了人们的关注。 $\eta$ - $\xi$  时空最重要的特性,在于它与热场理论存在着密切的联系。 $\eta$ - $\xi$  时空可以看成是热场理论的背景时空,它为各种有限温度场论方法提供了统一的几何背景。 $\eta$ - $\xi$  时空中的量子场与 Minkowski 时空中的有限温度量子场论存在着直接的联系。这种联系的几何根源,在于  $\eta$ - $\xi$  时空可以看成是  $S^1 \times R^3$  的最大解析复延拓。本文在文献[1]的基础上,对这种联系作了进一步的探讨。

与零温场论相比, Minkowski 时空中的有限温度量子场论有其显著的特征<sup>[5]</sup>。它的欧氏形式由场的虚时周期性表征,而其实时形式的特点则是出现场的“倍自由度”(the doubling of the degrees of freedom)。 $\eta$ - $\xi$  时空为虚时和实时有限温度场论的这些特征,提供了直观的几何解释。在  $\eta$ - $\xi$  时空的欧氏截面上,量子场将自动地满足虚时周期性,因而虚时热 Green 函数对应于  $\eta$ - $\xi$  时空欧氏截面上的真空 Green 函数。在  $\eta$ - $\xi$  时空的 Lorentz 截面上,“视界”的存在导致场的“倍自由度”,于是  $\eta$ - $\xi$  时空的真空 Green 函数对应于  $2 \times 2$  矩阵形式的实时热 Green 函数,而热场动力学则对应于  $\eta$ - $\xi$  时空场论的 Hamiltonian 形式。特别是,  $\eta$ - $\xi$  时空具有与黑洞时空类似的“因果”结构。这使我们易于把黑洞 Hawking 辐射理论移植到  $\eta$ - $\xi$  时空场论中,并得到与黑洞时空类似的结果:  $\eta$ - $\xi$  时空中量子场的真空态对应于 Minkowski 时空中惯性观测者的热态。这一切给出了时空几何与热场之间极其有趣的联系。

## 二、几种热场方法的回顾

为了以后讨论的需要,这里对虚时热 Green 函数、实时热 Green 函数、热场动力学 (TFD) 与黑洞的 Hawking 辐射理论作一简要评述。有关这几种热场方法更完整的总结,请参看文献[5]。

1991-11-04 收稿, 1992-04-06 收修改稿

\*国家自然科学基金资助项目

## 1. 虚时热 Green 函数

虚时热 Green 函数是为人熟知并被广泛应用的处热平衡系统的工具,由松原 (Matsubara) 于 1955 年首先提出<sup>[6]</sup>. 1974 年, Bernard 对标量场虚时热 Green 函数的泛函积分形式给出了简明的推导<sup>[7]</sup>. 利用标准的 Feynman 路径积分公式, Bernard 给出了配分函数的路径积分表达式

$$Z = \text{Tr}(e^{-\beta H}) = \sum_{\varphi} \langle \varphi | e^{-\beta H} | \varphi \rangle$$

$$= N \int D\pi \int_{\varphi(\tau=0)=\varphi(\tau=\beta)} D\varphi \exp \int_0^{\beta} d\tau \int d^3x [i\pi \dot{\varphi} - \mathcal{H}(\pi, \varphi)], \quad (2.1)$$

式中场量的泛函积分遍及满足周期性边界条件

$$\varphi(\tau=0) = \varphi(\tau=\beta) \quad (2.2)$$

的所有场组态. 一般情况下, Hamilton 密度  $\mathcal{H}(\pi, \varphi)$  中不包含高于  $\pi^2$  以上的项, (2.1)式可对  $\varphi$  的共轲动量  $\pi$  实现 Gauss 积分并写为

$$Z = N' \int_{\varphi(\tau=0)=\varphi(\tau=\beta)} D\varphi \exp \left[ - \int_0^{\beta} d\tau \int d^3x \mathcal{L}_{\text{eff}}(\varphi, i\dot{\varphi}) \right], \quad (2.3)$$

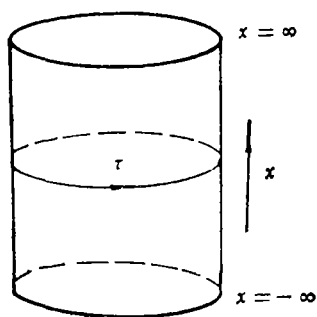
在(2.3)式中补充外源项后,得到的  $Z[J]$  即为欧氏热 Green 函数的生成泛函. 与零温 Green 函数生成泛函的路径积分表达式比较,容易看出(2.3)式与零温情况的区别仅在于这里  $\tau$  的积分限为  $[0, \beta]$ , 且泛函积分  $\int D\varphi$  仅限于满足条件(2.2)的周期路径. 为了直观地反映松原函数的这种虚时周期性,可以形象地认为松原函数是定义在圆周长为  $\beta$  的超柱面上的 Green

函数 (图 1). 显然, 这个超柱面具有拓扑  $S^1 \times R^3$ .

相应地, 动量空间传播子的能量, 也从零温时的连续实能量变为有限温度时的分离虚能量. 例如, 自由标量场在有限温度下的动量传播子为

$$iD_{\beta}(\omega_n, k) = \frac{i}{\omega_n^2 - k^2 - m^2}, \quad (2.4)$$

图 1 周长为  $\beta$  的超柱面上的 Green 函数  
柱面上每一点表示  $R^3$  的子流形



式中  $\omega_n = \frac{2\pi n}{i\beta}$  为分离的虚能量. Dolan

和 Jackiw 曾试图由虚时热 Green 函数通过解析延拓  $\tau = i\tau$  给出实时热 Green 函数<sup>[8]</sup>. 在动量空间, 这相当于从分离的虚能量  $\omega_n$  延拓到连续的实能量  $k_0$ . 他们得到的结果是

$$iD_{\beta}(k) = \frac{i}{k^2 - m^2 + i\epsilon} + \frac{2\pi}{e^{\beta|k_0|} - 1} \delta(k^2 - m^2). \quad (2.5)$$

遗憾的是, 这样得到的(2.5)式并不是“好的”实时热传播子. 当用(2.5)式进行高阶圈图计算时, 将出现  $\delta$  函数的高次幂. 而  $\delta^n(k)$  不是有好定义的量.

## 2. 实时热 Green 函数

Niemi 和 Semenoff 利用时间路径 (time-path) 方法直接推导出  $2 \times 2$  矩阵形式的实时

热 Green 函数<sup>[9]</sup>。已经证明<sup>[9-12]</sup>, 这种  $2 \times 2$  矩阵形式的实时热 Green 函数在计算中出现的奇点会彼此抵消, 从而可避免(2.5)式所遇到的困难。

在时间路径方法中, 对拉氏密度为

$$\mathcal{L}[\varphi] = \frac{1}{2} \varphi (-\square - m^2) \varphi - V[\varphi] \quad (2.6)$$

的标量场, 其热 Green 函数的生成泛函可表达为路径积分形式

$$\begin{aligned} Z[j] &= \int D\varphi \exp i \int_C (\mathcal{L}[\varphi] + j\varphi) \\ &= \exp \left\{ -i \int_C d^4x' V \left[ \frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta j(x')} \right] \right\} \exp \left\{ -\frac{i}{2} \int_C d^4x \int_C d^4y j(x) D_\beta(x-y) j(y) \right\}, \end{aligned} \quad (2.7)$$

式中时间变量的积分沿复时间平面上如图2所示路径  $C$  并满足周期性边界条件

$$\varphi(-F, \mathbf{x}) = \varphi(-F - i\beta, \mathbf{x}). \quad (2.8)$$

路径  $C$  由  $C_1, C_2, C_3, C_4$  四段组成。当  $F \rightarrow \infty$  时,  $C_1$  包含整个实时间轴, 利用 Riemann-Lebesgue 引理可证  $Z[j]$  可写为乘积形式

$$Z[j] = Z[j, C_1 C_2] Z[j, C_3 C_4].$$

因为实时热 Green 函数是由  $Z[j]$  对具有实时间变量的源  $j$  作泛函微分而得到,  $C_3, C_4$  上不包含实时间变量, 它们与实时热 Green 函数无关, 故  $Z[j, C_3 C_4]$  可吸收到归一化因子中去。当  $F \rightarrow \infty$  时, 源  $j_1$  和  $j_2$  是相互独立的。于是生成泛函可写为

$$\begin{aligned} Z[j, C_1 C_2] &= Z[j_1, j_2] \\ &= \exp \left\{ -i \int_{C_1 C_2} d^4x' V \left[ \frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta j(x')} \right] \right\} \\ &\quad \cdot \exp \left\{ -\frac{i}{2} \int_{C_1 C_2} d^4x \int_{C_1 C_2} d^4y j(x) D_\beta(x-y) j(y) \right\} \end{aligned} \quad (2.9)$$

$$\begin{aligned} &= \exp \left\{ -i \int_{-\infty}^{\infty} dx'_0 \int d^3x' \left( V \left[ \frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta j_1(x')} \right] - V \left[ \frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta j_2(x')} \right] \right) \right\} \\ &\quad \cdot \exp \left\{ -\frac{i}{2} \int_{-\infty}^{\infty} dx_0 \int d^3x \int_{-\infty}^{\infty} dy_0 \int d^3y j_a(x) D_\beta^{ab}(x-y) j_b(y) \right\} \end{aligned} \quad (2.10)$$

$$= Z[j_1, j_2], \quad (2.11)$$

式中  $a, b = 1, 2$  且它们的重复指标表示求和, (2.10) 式中的量定义为

$$\begin{aligned} j_1(x) &= j(x), \quad j_2(x) = j \left( x_0 - \frac{i\beta}{2}, \mathbf{x} \right) \\ D_\beta^{11}(x-y) &= D_\beta(x-y), \quad D_\beta^{22}(x-y) = D_\beta(y-x), \\ D_\beta^{12}(x-y) &= -D_\beta^\epsilon \left( x_0 - \left( y_0 - \frac{i\beta}{2} \right), \mathbf{x} - \mathbf{y} \right), \end{aligned} \quad (2.12)$$

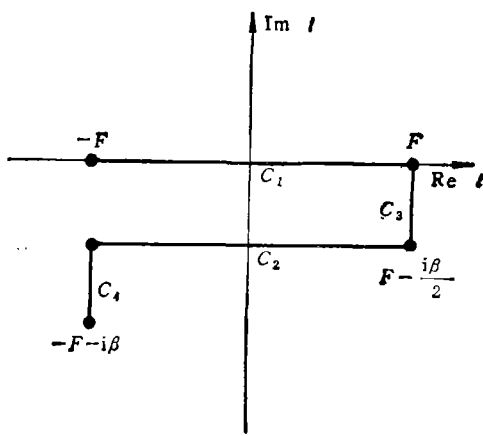


图2 复时间平面上的回路  $C$   
当  $F \rightarrow \infty$  时  $C_1$  包含整个实时间轴

$$D_{\beta}^{21}(x-y) = -D_{\beta}^{\geq} \left( \left( x_0 - \frac{i\beta}{2} \right) - y_0, x-y \right).$$

它们在动量空间的表达式为

$$D_{\beta}^{ab}(k) = \begin{pmatrix} \cos h\theta, & \sin h\theta \\ \sin h\theta, & \cosh\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{k^2 - m^2 + i\varepsilon} & 0 \\ 0 & \frac{-1}{k^2 - m^2 - i\varepsilon} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cosh\theta, & \sinh\theta \\ \sinh\theta, & \cosh\theta \end{pmatrix}, \quad (2.13)$$

式中

$$\cosh^2\theta = (1 - e^{-\beta|k_0|})^{-1}. \quad (2.14)$$

实时热 Green 函数的  $2 \times 2$  矩阵形式表明这里已出现了“倍自由度”。为了更明显地看出这点, 可把(2.10)式重新写为

$$\begin{aligned} Z[j_1, j_2] = & \int D\varphi_1 D\varphi_2 \exp \left\{ \frac{i}{2} \int_{-\infty}^{\infty} dx_0 \int d^3x \int_{-\infty}^{\infty} dy_0 \int d^3y \varphi_a(x) D_{\beta}^{-1ab}(x-y) \varphi_b(y) \right. \\ & \left. + i \int_{-\infty}^{\infty} dx_0 \int d^3x (-V[\varphi_1] + V[\varphi_2] + j_a(x)\varphi_a(x)) \right\}, \quad (2.15) \end{aligned}$$

式中

$$\varphi_1(x) = \varphi(x), \quad \varphi_2(x) = \varphi \left( x_0 - \frac{i\beta}{2}, x \right).$$

这里明显地出现了二类场  $\varphi_1$  和  $\varphi_2$ .  $\varphi_1(x)$  和  $j_1(x)$  定义在实轴  $C_1$  上, 而  $\varphi_2(x)$  和  $j_2(x)$  定义在  $C_2$  上. (2.15) 式对  $j_1$  求泛函微分即得实时热 Green 函数:

$$G_{\beta}(x_1, \dots, x_n) = \frac{1}{Z[0, 0]} \frac{\delta}{i\delta j_1(x_n)} \cdots \frac{\delta}{i\delta j_1(x_1)} Z[j_1, j_2] \Big|_{j_1=j_2=0}, \quad (2.16)$$

只有物理场  $\varphi_1$  出现在外线,  $\varphi_2$  场仅出现在内线. 文献[9]和[10]把  $\varphi_2$  称为“热鬼场”.

### 3. 热场动力学

热场动力学于 1975 年由 Takahashi 和 Umezawa 提出<sup>[13,14]</sup>. 作为一种有限温度场论方法, 已被广泛接受, 其基本思想是引入与物理场  $\varphi$  对耦的带弯场 (tilde field)  $\tilde{\varphi}$ . 定义  $\hat{H} = H - \tilde{H}$  作为总哈密氏量, 并把 Hilbert 空间  $\mathcal{H}$  扩展为直积空间  $\mathcal{H} = \mathcal{H} \otimes \tilde{\mathcal{H}}$ . 在  $\mathcal{H}$  中定义与温度有关的热真空态 (热基态)  $|O(\beta)\rangle$ :

$$|O(\beta)\rangle = Z^{-1/2}(\beta) \sum_n e^{-\beta E_n/2} |n, \tilde{n}\rangle, \quad (2.17)$$

式中  $Z(\beta)$  是归一化因子,  $E_n$  为  $n$  个粒子的态  $|n\rangle$  的能量,  $|\tilde{n}\rangle$  为存在  $n$  个带弯粒子的态. 于是任意可观测量  $A$  (仅由不带弯的算符构成) 在态  $|O(\beta)\rangle$  的量子予期值等于通常的统计平均值:

$$\langle O(\beta) | A | O(\beta) \rangle = Z^{-1}(\beta) \sum_n e^{-\beta E_n} \langle n | A | n \rangle. \quad (2.18)$$

作为一种实时的有限温度场论, 热场动力学引入了带弯场  $\tilde{\varphi}$  而出现了场的“倍自由度”. 在热场动力学的微扰理论中, 热传播子也是  $2 \times 2$  矩阵, 并具有和(2.13)式完全相同的形式. Feynman 规则也与时间路径方法中的完全一样.

我们注意到, 在虚时热 Green 函数中不出现倍自由度, 而在实时间温度场论中, 不仅在时间路径方法给出的实时热 Green 函数中和热场动力学中出现倍自由度, 而且在以  $C^*$  代数为

基础的“公理化统计力学”中也出现倍自由度<sup>[15-17]</sup>。因此,有理由认为,倍自由度是实时间温度场论的一个特征。相应地,虚时有限温度场论的特征则是它的虚时周期性。如何把“虚时周期性”和“倍自由度”这两个特征结合在一幅统一的几何图象中,是  $\eta$ - $\xi$  时空场论下面要解决的问题之一。

#### 4. 黑洞的 Hawking 辐射理论

黑洞的 Hawking 辐射理论揭示了时空几何与拓扑对量子场论的影响。与本文有关的主要结论是:在具有视界的静态时空中,整体时空上定义的真空态相应于被视界局限的部分时空上稳态观测者的热态<sup>[18-20]</sup>。整体时空上的真空 Green 函数等同于部分时空中的热 Green 函数。热 Green 函数的虚时周期性由欧氏截面上的时空结构自动提供。在 Lorentz 截面上,视界的出现自然地导致场的“倍自由度”,这使我们得到实时有限温度场论。把路径积分方法应用到黑洞时空,可为以上结果提供直观的图象<sup>[21]</sup>。讨论的典型例子是 Schwarzschild 时空和 Rindler 时空。但是,由于以上讨论都与引力或加速度有关,难以直接应用到平直时空的热场理论中。提出  $\eta$ - $\xi$  时空的基本动机,就是企图把在黑洞辐射理论中行之有效的技术和方法,移植到平直时空的热场理论中。

### 三、 $\eta$ - $\xi$ 时 空

$\eta$ - $\xi$  时空是具有复度规

$$ds^2 = \frac{1}{\alpha^2(\xi^2 - \eta^2)} (-d\eta^2 + d\xi^2) + dy^2 + dz^2 \quad (3.1)$$

的复四维时空。式中  $\alpha$  为一实常数,  $\eta, \xi, y, z$  皆为复变量。如限制  $\xi, y, z$  为实数,  $\eta = i\sigma$  为纯虚数,则得到  $\eta$ - $\xi$  时空的欧氏截面,它由实度规(3.2)描述:

$$ds^2 = \frac{1}{\alpha^2(\xi^2 + \sigma^2)} (d\sigma^2 + d\xi^2) + dy^2 + dz^2. \quad (3.2)$$

为了更清楚地阐明  $\eta$ - $\xi$  时空与热场的联系,下面用另一种方式引入(3.2)式。熟知热 Green 函数具有虚时周期性

$$G_\beta(t, \mathbf{x}) = G_\beta(t + i\beta, \mathbf{x}),$$

因而可形象地认为  $G_\beta$  是定义在拓扑为  $S^1 \times R^3$  的超柱面(由 1 维复时间和 3 维实空间构成的 5 维实流形中的 4 维超柱面)上的 Green 函数。这个超柱面由平欧氏度规

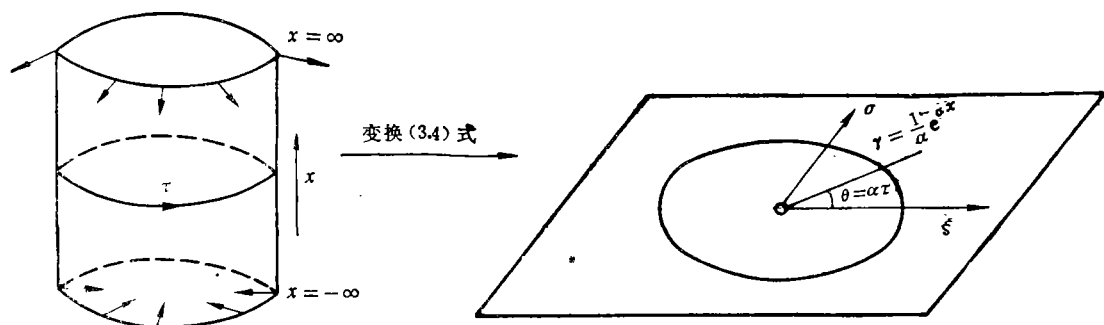
$$ds^2 = d\tau^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2 \quad (3.3)$$

描述,且  $\tau = 0$  认同于  $\tau = \beta$ , 即变量  $\tau = -it$  具有周期  $\beta$ 。对超柱面作拓扑变换

$$\left. \begin{aligned} \sigma &= \frac{1}{\alpha} e^{\alpha\tau} \sin \alpha\tau \\ \xi &= \frac{1}{\alpha} e^{\alpha\tau} \cos \alpha\tau \end{aligned} \right\}, \quad (3.4)$$

这个变换相当于把圆柱的上部扩张,下部收缩,最后把柱面“压平”在一个平面上(图 3)。所得的由被“压平”的圆柱面形成的超平面不是别的,恰好是由度规(3.2)描述的  $\eta$ - $\xi$  时空的欧氏截面。在  $\sigma$ - $\xi$  平面上,  $\theta = \alpha\tau$  是极角,周期为  $2\pi$ 。相应地  $\tau$  保持其周期  $\beta = \frac{2\pi}{\alpha}$ 。度规

(3.2)在  $\sigma = \xi = 0$  处是奇异的,因此超平面  $\sigma$ - $\xi$  仍具有拓扑  $S^1 \times R^3$ 。这样,通过变换

图3  $\sigma$ - $\xi$  平面

变换(3.4)把超柱面映射为  $\sigma$ - $\xi$  平面保持  $\tau$  的周期性和拓扑  $S^1 \times \mathbb{R}^4$  不变

(3.4),  $\eta$ - $\xi$  时空的欧氏截面自动地提供虚时  $\tau$  的周期性.

限制(3.1)式中的  $\eta, \xi, y, z$  为实数, 可得到  $\eta$ - $\xi$  时空的 Lorentz 截面(也称为  $\eta$ - $\xi$  时空). 它也可以由欧氏截面(3.2)通过解析延拓  $\eta = i\sigma$  而得到. 位于  $\xi^2 - \eta^2 = 0$  处的奇异(Singularity)把 Lorentz 截面分为四个分离的部分 I, II, III, IV (图 4), 每一部分等同于一个完整的 Minkowski 时空. 例如, 对区域 I ( $\xi > |\eta|$ ) 和区域 II ( $-\xi > |\eta|$ ), 分别引入坐标变换

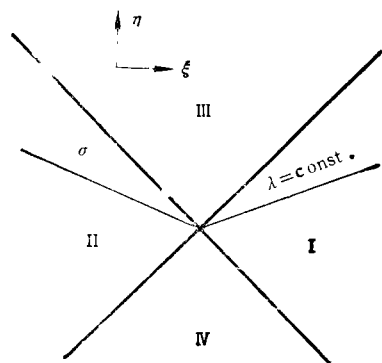
$$\eta = \pm \frac{1}{\alpha} e^{\alpha x} \sin \alpha \xi, \quad \text{上号对区域 I,} \quad (3.5)$$

$$\xi = \pm \frac{1}{\alpha} e^{\alpha x} \cosh \alpha \xi, \quad \text{下号对区域 II,}$$

则(3.1)式变为 Minkowski 时空

$$ds^2 = -dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2. \quad (3.6)$$

形式上, 可以把  $\xi^2 - \eta^2 = 0$  看成“视界”. 而不同区域之间则可通过复路径连通. 注意到图 4 所示的时空结构非常类似于黑洞时空, 我们可以把 Hawking 辐射的技术应用到  $\eta$ - $\xi$  时空. 文献[1]中已对此进行了详细的讨论并已证明: 定义在  $\eta$ - $\xi$  时空中的真空

图4  $\eta$ - $\xi$  时空的 Lorentz 截面

态是 Minkowski 时空中惯性观测者的热态.

#### 四、 $\eta$ - $\xi$ 时空场论与有限温度场论的联系

本节将讨论  $\eta$ - $\xi$  时空量子场论与热场动力学、虚时和实时热 Green 函数的联系.

##### 1. 与热场动力学的联系

考虑  $\eta$ - $\xi$  时空中的标量场, 其作用量为

$$S_\eta = \int d\eta d\xi dx_\perp e^{-2\alpha x} \left\{ \frac{1}{2} e^{2\alpha x} \left[ \left( \frac{\partial \phi}{\partial \eta} \right)^2 - \left( \frac{\partial \phi}{\partial \xi} \right)^2 \right] - \frac{1}{2} (\nabla_\perp \phi)^2 - \frac{1}{2} m^2 \phi^2 - V(\phi) \right\}, \quad (4.1)$$

式中  $x_\perp$  表示  $y, z$  坐标,  $e^{2\alpha x} = \alpha^2 (\xi^2 - \eta^2)$ .

在  $\eta$ - $\xi$  时空中存在 Killing 场

$$\left(\frac{\partial}{\partial \lambda}\right)^a = \varepsilon \alpha (\xi \eta^a + \eta \xi^a), \quad (4.2)$$

其中  $\varepsilon = \pm 1$ , 正负号分别适用于区域 I, III 和 II, IV. 选择 Killing 参量  $\lambda$  为时间坐标, 则可由作用量(4.1)写出不依赖于时间  $\lambda$  的 Hamiltonian

$$H^\lambda = \int_\sigma dX dx_\perp \varepsilon \left\{ \frac{\alpha^2}{2} \left[ \left( \xi \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} + \eta \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} \right)^2 + \left( \eta \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} + \xi \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} \right)^2 \right] + \frac{1}{2} (\nabla_\perp \varphi)^2 + \frac{1}{2} m^2 \varphi^2 + V(\varphi) \right\}, \quad (4.3)$$

式中  $X$  定义为

$$\left(\frac{\partial}{\partial X}\right)^a = \alpha (\eta \eta^a + \xi \xi^a), \quad (4.4)$$

$\sigma$  为某个类空超曲面(例如  $\lambda = \text{常数}$  的超曲面).

注意到新坐标  $(\lambda, X)$  在区域 I 和 II 分别对应于 Minkowski 坐标  $(t, x)$  和  $(-t, x)$ , 且类空面  $\sigma$  可分为 I, II 两部分, 有

$$H^\lambda = H_I^\lambda + H_{II}^\lambda = H - \tilde{H}, \quad (4.5)$$

式中  $H^\lambda$  定义在  $\lambda = \text{常数}$  的超曲面  $\sigma$  上, 而  $H$  和  $\tilde{H}$  则分别在区域 I 和 II 中定义在  $t = \text{常数}$  的超曲面上.  $\tilde{H}$  前面出现负号是由于在区域 II 中  $\lambda = \text{常数}$  和  $t = \text{常数}$  的超曲面具有相反的外法线方向. (4.5) 式直接反映了  $\eta$ - $\xi$  时空场论与热场动力学的联系: 热场动力学对应于  $\eta$ - $\xi$  时空场论的 Hamilton 形式.

$\eta$ - $\xi$  时空场论与热场动力学的联系还表现在如下事实: 当我们把黑洞的 Hawking 辐射理论应用到  $\eta$ - $\xi$  时空中时, 可求出  $\eta$ - $\xi$  时空量子场的基态(称为  $\eta$ - $\xi$  真空或热基态)  $|O(\beta)\rangle$ , 其表达式与热场动力学中热基态(2.17)的表达式完全相同.  $\eta$ - $\xi$  时空场论也给热场动力学中的带弯场  $\tilde{\varphi}$  给出了直观的几何解释:  $\tilde{\varphi}$  可解释为分布在镜宇宙(区域 II)中的场.

## 2. 与虚时热 Green 函数的联系

在  $\eta$ - $\xi$  时空的欧氏截面(3.2)上,  $\theta = \alpha\tau$  起极角的作用. 因此, Minkowski 虚时间  $\tau$  在这里自然地具有周期  $\beta = 2\pi/\alpha$ . 定义在  $\eta$ - $\xi$  时空中的场将自动地满足虚时周期性  $\varphi(\tau) = \varphi(\tau + \beta)$ . 这将导致场的热性质. 下面我们利用路径积分方法证明  $\eta$ - $\xi$  时空欧氏截面上的真空 Green 函数等于 Minkowski 时空中的虚时热 Green 函数.

与作用量(4.1)对应的欧氏生成泛函可写为

$$Z_E^T[0] = N \int D\varphi \exp \left\{ - \int d\sigma d\xi dx_\perp e^{-2\sigma\tau} \left\{ \frac{1}{2} e^{2\sigma\tau} \cdot \left[ \left( \frac{\partial \varphi}{\partial \sigma} \right)^2 + \left( \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} \right)^2 \right] + \frac{1}{2} (\nabla_\perp \varphi)^2 + \frac{1}{2} m^2 \varphi^2 + V(\varphi) \right\} \right\}, \quad (4.6)$$

式中  $e^{2\sigma\tau} = \alpha^2(\sigma^2 + \xi^2)$ . (4.6) 式中指数上的积分是标量场在  $\eta$ - $\xi$  时空中的欧氏作用量, 它是变量变换下的标量. 作由  $(\sigma, \xi)$  到  $(\tau, x)$  的变量变换(3.4). 如要求变换是单值的, 必须有  $0 \leq \alpha\tau \leq 2\pi$ , 或等效地  $0 \leq \tau \leq 2\pi/\alpha = \beta$ , 于是  $\varphi(\tau = 0) = \varphi(\tau = \beta)$ . 这样(4.6)式可写为

$$Z_E[0] = N \int_{\varphi(\tau=0)=\varphi(\tau=\beta)} D\varphi \exp \left\{ - \int_0^\beta d\tau \int d^3x \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial \tau} \right)^2 + \frac{1}{2} (\nabla \varphi)^2 \right] \right\}$$

$$+ \frac{1}{2} m^2 \varphi^2 + V(\varphi) \}. \quad (4.7)$$

(4.6)式给出了  $\eta$ - $\xi$  时空中的真空跃迁幅;而(4.7)式正好是(2.3)式,加上外源项后就是 Minkowski 时空中松原函数的生成泛函  $Z_E[J]$ . 它们对外源作泛函微分后分别得到  $\eta$ - $\xi$  时空中的真空 Green 函数和 Minkowski 时空中的松原函数. 以上讨论平行于 Rindler 时空中的相应讨论<sup>[22]</sup>.

### 3. 与实时热 Green 函数的关系

在  $\eta$ - $\xi$  时空的 Lorentz 截面上,视界的出现自然地导致场的“倍自由度”,这使我们得到  $2 \times 2$  矩阵形式的实时热 Green 函数. 在文献[1,2]中已经给出了这个结果的路径积分推导. 本节将采用另一种方法,即利用  $\eta$ - $\xi$  模式和 Minkowski 模式之间的 Bogoliubov 变换直接计算  $\eta$ - $\xi$  时空的真空 Green 函数,以给出 Minkowski 时空的热 Green 函数. 本节仅讨论 2 维  $\eta$ - $\xi$  时空中的无质量自由标量场. 场方程为

$$(-g)^{-1/2} \partial_\mu [(-g)^{1/2} g^{\mu\nu} \partial_\nu \phi] = 0, \quad (4.8)$$

场算符  $\phi$  可按 Minkowski 模式展开为

$$\phi = \begin{pmatrix} \phi_I \\ \phi_{II}^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_k a_k^I f_k + a_k^{I\dagger} f_k^* \\ \sum_k \tilde{a}_k^{II} f_k + \tilde{a}_k^{II\dagger} f_k^* \end{pmatrix}, \quad (4.9)$$

式中

$$^I f_k = (4\pi\omega)^{-1/2} e^{i(kx - \omega t)}, \quad (4.10)$$

$$^{II} f_k = (4\pi\omega)^{-1/2} e^{i(kx + \omega t)}, \quad (4.11)$$

这里  $\omega = |k|$ , 求和  $\sum_k$  应理解为对  $k$  的积分. 由(4.9)式中的消灭算符可定义

$$a_k |0\rangle = 0, \quad \tilde{a}_k |\tilde{0}\rangle = 0$$

$|0\rangle$  和  $|\tilde{0}\rangle$  分别为宇宙(区域 I)和“镜宇宙”(区域 II)中的 Minkowski 真空.

Minkowski 模式(4.10)和(4.11)式的如下线性组合是整个  $\eta$ - $\xi$  时空中的解析模式

$$\begin{aligned} F_k &= \cosh \theta_\omega {}^I f_k + \sinh \theta_\omega {}^{II} f_k^*, \\ \tilde{F}_k &= \cosh \theta_\omega {}^{II} f_k + \sinh \theta_\omega {}^I f_k^*, \end{aligned} \quad (4.12)$$

这里  $\text{th} \theta_\omega = \exp(-\pi\omega/\alpha) = \exp(-\beta\omega/2)$ . 于是场  $\phi$  可重新按(4.12)式展开为

$$\phi = \sum_k (b_k F_k + b_k^\dagger F_k^* + \tilde{b}_k \tilde{F}_k + \tilde{b}_k^\dagger \tilde{F}_k^*). \quad (4.13)$$

由此可定义  $\eta$ - $\xi$  真空(热基态)

$$b_k |O(\beta)\rangle = \tilde{b}_k |O(\beta)\rangle = 0, \quad \forall k. \quad (4.14)$$

比较(4.9)和(4.23)式,并利用(4.12)式,可得二组算符的 Bogoliubov 变换式

$$\begin{aligned} a_k &= b_k \cosh \theta_\omega + \tilde{b}_k^\dagger \sinh \theta_\omega, \\ \tilde{a}_k &= \tilde{b}_k \cosh \theta_\omega + b_k^\dagger \sinh \theta_\omega. \end{aligned} \quad (4.15)$$

现在计算  $\eta$ - $\xi$  时空的两点 Green 函数

$$D(X, Y) = \langle O(\beta) | T_\eta \phi(X) \phi(Y) | O(\beta) \rangle$$

$$\begin{aligned}
&= \langle O(\beta) | T_{\eta} \left( \phi_1(x) \right) (\phi_1^*(y), \phi_{11}(y)) | O(\beta) \rangle \\
&= \begin{pmatrix} D^{11}(x, y), & D^{12}(x, y) \\ D^{21}(x, y), & D^{22}(x, y) \end{pmatrix},
\end{aligned} \tag{4.16}$$

其中时序算符  $T_{\eta}$  由下式定义:

$$\begin{aligned}
D^{11}(x, y) &= \langle O(\beta) | T \phi_1(x) \phi_1^*(y) | O(\beta) \rangle, \\
D^{22}(x, y) &= \langle O(\beta) | T_- \phi_{11}^*(x) \phi_{11}(y) | O(\beta) \rangle, \\
D^{12}(x, y) &= \langle O(\beta) | \phi_1(x) \phi_{11}(y) | O(\beta) \rangle, \\
D^{21}(x, y) &= \langle O(\beta) | \phi_1(y) \phi_{11}(x) | O(\beta) \rangle.
\end{aligned} \tag{4.17}$$

(4.17)式中的  $T$  为通常的时序算符,  $T_-$  则与通常的时序相反, 把  $\phi_1$  和  $\phi_{11}$  的展开式(4.9)式代入, 并利用 Bogoliubov 变换(4.15)式, 可得到(4.16)式的 Fourier 变换

$$D^{\alpha\beta}(x, y) = \frac{i}{(2\pi)^2} \int d^4k d\omega e^{i(kx - \omega t)} D^{\alpha\beta}(k), \tag{4.18}$$

其中动量空间的 Green 函数可显示地写出

$$\begin{aligned}
D^{11}(k) &= \frac{1}{\omega^2 - k^2 + i\epsilon} - \frac{2\pi i}{e^{\beta\omega} - 1} \delta(\omega^2 - k^2), \\
D^{22}(k) &= \frac{-1}{\omega^2 - k^2 - i\epsilon} - \frac{2\pi i}{e^{\beta\omega} - 1} \delta(\omega^2 - k^2), \\
D^{12}(k) &= D^{21}(k) = \frac{-2\pi i e^{-\frac{\beta\omega}{2}}}{1 - e^{-\beta\omega}} \delta(\omega^2 - k^2).
\end{aligned} \tag{4.19}$$

注意对角元  $D^{11}, D^{22}$  中的第一项是通常的零温传播子, 温度效应仅表现在  $D_{11}, D^{22}$  的第二项和非对角元  $D^{12}, D^{21}$  中, (4.19)式也可简洁地写为

$$D(k) = U(\theta_{\omega}) \begin{pmatrix} \frac{1}{\omega^2 - k^2 + i\epsilon} & 0 \\ 0 & \frac{-1}{\omega^2 - k^2 - i\epsilon} \end{pmatrix} U(\theta_{\omega}), \tag{4.20}$$

式中 
$$U(\theta_{\omega}) = \begin{pmatrix} \cosh \theta_{\omega} & \sinh \theta_{\omega} \\ \sinh \theta_{\omega} & \cosh \theta_{\omega} \end{pmatrix}.$$

(4.20)式即前面给出的实时热 Green 函数(2.13)式。

**致谢** 作者对与大连理工大学物理系理论物理教研室和北京师范大学物理系刘辽、梁灿彬、赵峥教授的有益讨论; 对 R. Wald, R. P. Geroch, H. Umezawa, W. Israel, Y. Takahashi, W. G. Unruh 的帮助及支持一并表示感谢。

## 参 考 文 献

- [1] Gui, Y. X., *Phys. Rev.*, D42(1990), 1988.
- [2] Gui, Y. X., *ibid.*, 45(1992), 697.
- [3] 桂元星, 中国科学A辑, 1988, 3: 282—290.
- [4] Xu, F. & Gui, Y. X., *Chin. Phys. Lett.*, 5(1988), 381.

- [5] Landsman, N. D. & Van Weert, Ch. G., *Phys. Rep.*, 145(1987), 142.
- [6] Matsubara, T., *Prog. Theor. Phys.*, 14(1955), 351.
- [7] Bernard, C., *Phys. Rev.*, D9(1974), 3312.
- [8] Dolan, L. & Jackiw, R., *ibid.*, 9(1974), 3320.
- [9] Niemi, A. J. & Semenoff, G. W., *Ann. Phys.*, 152(1984), 105.
- [10] Rivers, R. J., *Path Integral Methods in Quantum Field Theory*, Cambridge University Press, Cambridge, 1987.
- [11] Niemi, A. J. & Semenoff, G. W., *Nucl. Phys.*, B230 [FS10] (1984), 181.
- [12] Fujimoto, Y. et al., *Phys. Rev.*, D30(1984), 1400.
- [13] Takahashi, Y. & Umezawa, H., *Collec. Phenom.*, 2(1975), 55.
- [14] Umezawa, H. et al., *Thermo Field Dynamics and Condensed State* North-Holland, Amsterdam 1982.
- [15] Emch, G. G., *Algebraic Methods in Statistical Mechanics and Field Theory*, Wiley and Sons, New York, 1972.
- [16] Winnink, M., in *Fundamental Problem in Statistical Mechanics* (Ed. Cohen, E. G. D.), Vol. III, North-Holland, Amsterdam, 1975.
- [17] Bratteli, O. & Robinson, D. W., *Operator Algebras and Quantum Statistical Mechanics*, Springer, New York, 1979, 1981.
- [18] Birrell, N. D. & Davies, P. C. W., *Quantum Field in Curved Space*, Cambridge University Press, 1982.
- [19] Wald, R., *General Relativity*, University of Chicago Press, 1984.
- [20] Israel, W., *Phys. Lett.*, 57A(1976), 107.
- [21] Unruh, W. G. & Weiss, N., *Phys. Rev.*, D29(1984), 1656.
- [22] Takagi, S., *Prog. Theor. Phys.*, [supp, 88] 1986, 1.