关于二维图像Euler数新公式的证明

林小竹* 沙 芸 籍俊伟 王彦敏

(北京石油化工学院信息工程学院, 北京 100627)

摘要 Euler 数是拓扑学的重要特征参数, 在二维数字图像中, 由局部性质计算图像 Euler 数的公式, 对于 4-连通和 8-连通是不同的. 在定义图段和相邻数概念的基础上, 提出了由局部性质计算二值图像 Euler 数的一种新公式, 并证明了该公式在 4-连通和 8-连通情况下都能成立. 为局部计算二维图像的 Euler 数提供了新的思路.

关键词 数字拓扑学 **Euler** 数 二值图像 **4**-连通 **8**-连通

在数字图像中, 能表现其拓扑性质的量是指当图像像橡皮薄膜那样伸缩变化时, 保持图像特征不变的量. Euler 数恰好就是可以描述物体结构, 而与其特定几何形状无关的拓扑参数.

对于二维图像, Euler数被定义为连接体数与其中的孔洞数之差[1,2], 用公式表示为

$$E = C - H. \tag{1}$$

在二维空间中, 孔洞被定义为以前景为边界的背景区域. 对于无孔洞物体, 可以用 Euler 数来计算连接体数目或测量不重叠的粒子个数. 但孔洞无法由局部性质判断, 孔洞数亦无法由局部性质计算得到, 因此(1)式是一种全局测量公式, 无法进行局部计算.

除了全局定义(1)式, 二维图像Euler数还可以由局部性质计算得到. 在二值图像中, Euler数这个值的计算是利用近邻像素值来进行的[3], 由于图像连接分为 4-连通和 8-连通, 4-连通和 8-连通的Euler数计算公式不同, 具体如下所示:

$$\text{4-连通: } E(4) = V - E + F, \tag{2a}$$

$$\text{8-连通: } E(8) = V - E - D + T - F. \tag{2b}$$

收稿日期: 2005-06-13; 接受日期: 2006-01-08

* E-mail: linzhu1964@263.net

其中 V 是具有前景色(值为 1)像素的总数; E 是二值图像中 $\begin{array}{|c|}\hline 1\\\hline 1\\\hline\end{array}$ 和 $\begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 1\\\hline\end{array}$ 的个数; D 是 $\begin{array}{|c|c}\hline 1 & \\\hline & \multicolumn{1}{|c|}{1}\\\hline\end{array}$ 和 $\begin{array}{c|c|}\hline & 1\\\hline 1 & \\\hline\end{array}$ 的个数; T 是 $\begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 1\\\hline 1 & \multicolumn{1}{c}{}\\\cline{1-1}\end{array}$, $\begin{array}{|c|c|}\hline 1 & \multicolumn{1}{c}{}\\\hline 1 & 1\\\hline\end{array}$, $\begin{array}{c|c|}\hline & 1\\\hline 1 & 1\\\hline\end{array}$, $\begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 1\\\hline \multicolumn{1}{c}{} & 1\\\cline{2-2}\end{array}$ 的个数; F 是 $\begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 1\\\hline 1 & 1\\\hline\end{array}$ 的个数, 其中每一个 $\boxed{1}$ 代表二值图像中值为 1 的单个像素块, E, D, T, F 是各个像素块在图像中的具体连接形式.

有一组更为简单的公式, 它也可以由近邻像素值来计算图像的Euler数[4], 并且容易证明它与公式(2)是等价的:

$$4\text{-连通}: E(4) = Q1-Q3+D1, \tag{3a}$$

$$8\text{-连通}: E(8) = Q1-Q3-D2, \tag{3b}$$

其中 $Q1$, $Q3$, $D1$ 和 $D2$ 分别代表二值图像中具有如下排列模式 $\begin{bmatrix}0 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix}0 & 1\\1 & 1\end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{bmatrix}$ 的个数.

另一组被广泛使用的公式可以参见文献[5, 6]:

$$4\text{-连通}: E(4) = (S1-S3+2X)/4, \tag{4a}$$

$$8\text{-连通}: E(8) = (S1-S3-2X)/4, \tag{4b}$$

其中 $S1$, $S3$ 和 X 代表二值图像中具有下列模式的 2×2 方块个数, 分别为 $S1$: 一个 1, 三个 0 的模式; $S3$: 三个 1, 一个 0 的模式; X: 两个 1 在一条对角线, 两个 0 在另一条对角线上的模式. 它就是商用图像处理工具 MATLAB 软件中计算二值图像 Euler 数时所用的公式.

由于有(2)~(4)式, 因此可以由局部性质计算图像的Euler数. 但对于 4-连通和 8-连通, 所用公式的形式并不相同. 是否存在类似全局定义(1)式, 具有统一形式的图像Euler数局部计算公式呢? 答案是肯定的. Rosenfeld[7]简单扼要地给出了这样一个公式, 但不够详细. Kong[8]指出对于目标和背景二者的Euler特征是不能仅用 4-连通或 8-连通而局部计算的. Lin[9]在研究物体的智能计数(与形状无关)的过程中, 独立地得出了类似的公式. 文献[10~12]研究了二值图像Euler数的快速算法. 文献[13~15]讨论了计算Euler特征的其他方法, 如积分几何(integral geometric)方法与多面体(polyhedral)方法等. 本文则从另一种角度——在定义图段和相邻数两个新概念的基础上去分析理解Euler数的内涵和本质.

1 图段与相邻数的概念

1.1 扫描方式

对于二维数字图像, 一般按行扫描, 称为逐行扫描. 行的顺序可由上而下(up-down), 这是最常见的扫描方式. 行的顺序亦可由下而上(down-up), BMP 图像

文件格式就采用这种扫描方式. 本文采用由上而下的逐行扫描方式.

1.2　图段定义

对于二值图像, 我们定义图段的概念, 它是二值图像的每一行中被 0 或图像边界所分隔的值为 1 的单个像素或多个像素段. 图段的大小由其游程表示, 最小是 1, 最大不超过行的长度. 如果二值图像用函数 $f(i, j)$表示(i, j 分别代表图像矩阵的行和列), 则图段可以用下式来描述:

若 $f(i, j:j+K-1)=1$,

且 $f(i, j-1)=f(i, j+K)=0$, 或 $j-1$ 或 $j+K$ 超出图像的边界.

则满足上面条件的前景像素段 $f(i, j:j+K-1)$被称为图段, K 表示图段的大小即游程. 当 $K=1$ 时, 图段就退化为单个的前景像素. 如图 1 所示的行中有三个图段, 游程分别为 3, 1, 5.

0	0	1	1	1	0	1	0	0	1	1	1	1	1

图 1　图段示意图

1.3　相邻数定义

图段的相邻数, 定义为图段相邻行中对应图段大小范围内的图段数. 它反映图段邻域连接的复杂程度, 最小是 0, 最大是$[K/2]$向上取整, K 是图段的大小即游程. 如果一个图段用 $f(i, j:j+K-1)$表示, 则该图段的相邻数可以这样确定: 与图段 $f(i, j:j+K-1)$相邻的上一行, 在$(i-1, j:j+K-1)$范围内的像素所能构成的图段数目, 即图段 $f(i, j:j+K-1)$的相邻图段数目. 所以它被称为图段的相邻数. 如图 2 所示图段的相邻数是 3.

1	0	1	1	0	1
1	1	1	1	1	1

图 2　图段的相邻数示意图

2　统一的局部计算公式

下面给出一个利用图段相邻数来计算图像 Euler 数的公式. 它只需对图像采用逐行扫描由上而下的方式扫描一次, 而且把 4-连通和 8-连通的计算公式进行了很好的统一, 有别于已往由于连通性的不同而造成的计算公式的差异. 另外该公式恰当、准确、清晰地描述了图像 Euler 数和图段相邻数二者之间的关系, 即 Euler 数是图段相邻数的宏观表示, 而图段相邻数则是 Euler 数的微观体现. 公式如下所示:

$$E=\sum_{i=1}^{I}\sum_{n=0}^{N(i)}(1-V_{in}), \tag{5}$$

其中 I 是图像的行数, $N(i)$是图像第 i 行内的图段个数, V_{in} 表示图像第 i 行, 第 n 个图段所对应的相邻数. 规定 $V_{i0}\equiv 1$, 即当 $n = 0$ 时, $V_{in} = 1$. 表示当 i 行无图段时, 该行对 Euler 数无贡献. 注意(5)式的求和顺序自左向右, 不能交换, 因为 n 是依赖于 i 的.

如图 3 所示, 计算 4-连通与 8-连通 Euler 数的区别仅在于该图段所对应的上一行的范围不同, 8-连通比 4-连通左右各多一个像素而已. 具体而言, 计算图段 $f(i, j:j+K-1)$的相邻数时, 4-连通和 8-连通对应的范围分别是$(i-1, j:j+K-1)$和$(i-1, j-1:j+K)$.

x	x	x	x	x	x	x	x
1	1	1	1	1	1	1	1

(a) 4-连通

x	x	x	x	x	x	x	x	x
	1	1	1	1	1	1	1	

(b) 8-连通

图 3 4-连通与 8-连通对应的范围不同($X = 0, 1$)

3 实例分析

3.1 4-连通的例子

在 4-连通情况下, 图 4 中简单二值图像的 Euler 数按定义式计算为 4, 如果用新公式计算, 具体算法描述如下:

0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	1	1	0	0
0	1	0	0	0	1	0
0	0	1	1	1	0	0
0	0	0	0	0	0	0

图 4 简单的二值图像

第一行, 0 个图段, $V_{i0} = 1$, $\sum_{n=0}^{0}(1-V_{in}) = 0$;

第二行, 1 个图段, $V_{i1} = 0$, $\sum_{n=0}^{1}(1-V_{in}) = 1$;

第三行, 2 个图段, $V_{i1} = 0$, $V_{i2} = 0$, $\sum_{n=0}^{2}(1-V_{in}) = 2$;

第四行, 1 个图段, $V_{i1} = 0$, $\sum_{n=0}^{1}(1-V_{in}) = 1$,

$$E(4) = \sum_{i=1}^{I}\sum_{n=0}^{N}(1-V_{in}) = 0+1+2+1 = 4.$$

在 4-连通时, 对图 4 简单二值图像用(5)式计算的 Euler 数与由定义(1)式计算的结果完全一致.

3.2　8-连通的例子

在 8-连通情况下, 图 4 中简单二值图像的 Euler 数按定义式计算为 0, 如果用新公式计算, 具体算法描述如下:

第一行, 0 个图段, $V_{i0} = 1$, $\sum_{n=0}^{0}(1-V_{in}) = 0$;

第二行, 1 个图段, $V_{i1} = 0$, $\sum_{n=0}^{1}(1-V_{in}) = 1$;

第三行, 2 个图段, $V_{i1} = 1$, $V_{i2} = 1$, $\sum_{n=0}^{2}(1-V_{in}) = 0$;

第四行, 1 个图段, $V_{i1} = 2$, $\sum_{n=0}^{1}(1-V_{in}) = -1$,

$$E(8) = \sum_{i=1}^{I}\sum_{n=0}^{N}(1-V_{in}) = 0+1+0+(-1) = 0 .$$

在 8-连通时, 对图 4 简单二值图像用(5)式计算的 Euler 数与由定义(1)式计算的结果也完全一致, 可见(5)式对 4-连通和 8-连通均适用. 下面部分是对该公式在 4-连通和 8-连通情况下的一个证明.

4　二维公式的证明

4.1　4-连通情形

(2a)式是按逐行扫描整幅图像, 统计点、边和面的数目, 从而得到 Euler 数的一种局部计算公式. 它的计算结果与逐行分图段统计的结果相同, 因此在 4-连通情况下, (2a)式可以改写为另一种局部计算的形式:

$$E(4) = \sum_{i=1}^{I}\sum_{n=0}^{N}(v-e+f), \tag{6}$$

其中 v, e 和 f 分别代表图像第 i 行, 第 n 个图段所对应的点数、边数和面数(见引言中关于 V, E 和 F 的描述). 必须注意的是 e 和 f 与第 n 个图段所对应的相邻上一行有关. 比较(5)和(6)式, 可用归纳法证明其等价性.

当图段游程 length=1 时, 如图 5 所示, 只有两种情况:

0
1

(a)

1
1

(b)

图 5　游程是 1 的情形

X	⋯	X	X
1	⋯	1	1

图 6　游程是 N 的情形(X = 0, 1)

对图 5(a)，由于 $V_{in} = 0$，所以$(1-V_{in}) = 1$；由于 $v = 1, e = f = 0$，所以$(v-e+f)=1$. 故$(1-V_{in}) = (v-e+f)$.

对图 5(b)，由于 $V_{in} = 1$，所以$(1-V_{in}) = 0$；由于 $v = 1, e = 1, f = 0$，所以$(v-e+f) = 0$. 故$(1-V_{in}) = (v-e+f)$.

即对游程是 1 的图段, (5)与(6)式是等价的.

当图段游程 length= N 时，如图 6 所示，假设$[1-V_{in}] = [v-e+f]$成立，即(5)式等价于(6)式. 下面证明 length = N+1 时的情况，其中，中括号“[ ]”内的内容表示游程 length = N 时情形，大括号“{ }”内的内容表示游程 length = N+1 时情形.

当图段游程 length = N+１时，如图 7 所示，有三种情况:

X	⋯	X	X	0
1	⋯	1	1	1

(a)

X	⋯	X	0	1
1	⋯	1	1	1

(b)

X	⋯	X	1	1
1	⋯	1	1	1

(c)

图 7 游程是 N+１的情形(X = 0, 1)

对图 7(a)，由于$\{1-V_{in}\} = [1-V_{in}]$，另外

$$\{v-e+f\} = [(v+1)-(e+1)+f] = [v-e+f],$$

所以$\{1-V_{in}\}= \{v-e+f\}$.

对图 7(b)，由于$\{1-V_{in}\} = [1-(V_{in}+1)]=[1-V_{in}] -1$，另外

$$\{v-e+f\}=[(v+1) - (e+2)+f]=[v-e+f] -1,$$

所以$\{1-V_{in}\}=\{v-e+f\}$.

对图 7(c)，由于$\{1-V_{in}\}=[1-V_{in}]$，另外

$$\{v-e+f\}=[(v+1) - (e+2)+(f+1)]=[v-e+f],$$

所以$\{1-V_{in}\}=\{v-e+f\}$.

即对游程是 N+１的图段, (5)与(6)式仍然等价.

所以(5)式在 4-连通情况下是正确的，对 8-连通情形亦可做类似证明.

4.2 8-连通情形

在 8-连通情况下，和在 4-连通情况下相似，(2b)式同样可以改写为另一种局部计算的形式:

$$E(8) = \sum_{i=1}^{I}\sum_{n=0}^{N}(v-e-d+t-f)\,, \tag{7}$$

其中 v, e, d, t 和 f 分别代表图像第 i 行，第 n 个图段所对应的点数、边数、对角数、三角数和面数(见引言中关于 V, E, D, T 和 F 的描述). 必须注意的是 e, d, t 和 f 与第 n 个图段所对应的相邻上一行有关.

比较(5)和(7)式，可用归纳法证明其等价性.

当图段游程 length = 1 时, 如图 8 所示, 有八种情况. 任取一种证明如下:

X_2	X_1	X_0
	1	

图 8　游程是 1 的情形(X_i = 0, 1)

若设 X_2=1, X_1 = 0, X_0 = 1, 由于 V_{in} = 2, 所以$(1-V_{in})$ = –1; 由于 v=1, d=2, e = t =f = 0, 所以$(v-e-d+t-f)$= –1. 故$(1-V_{in})=(v-e-d+t-f)$.

其他七种情况, 可逐一证明: $(1-V_{in})=(v-e-d+t-f)$.

即对游程是 1 的图段, (5)与(7)式是等价的.

当图段游程 length=N 时, 如图 9 所示, 假设$[1-V_{in}]=[v-e-d+t-f]$成立, 即(5)式等价于(7)式. 其中, 中括号"[ ]"内的内容表示游程 length = N 时情形, 大括号"{ }"内的内容表示游程 length=N+1 时情形.

x	x	⋯	x	x	x
	1	⋯	1	1	

图 9　游程是 N 的情形(X = 0, 1)

当图段游程 length=N+1 时, 如图 10 所示, 有八种情况. 不妨任取两种证明如下:

X	X	⋯	X	X_2	X_1	X_0
	1	⋯	1	1	1	

图 10　游程是 N+1 的情形

若设 X_2 = 1, X_1 = 1, X_0 = 0, 由于$\{1-V_{in}\}=[1-V_{in}]$, 另外

$$\{v-e-d+t-f\}=[(v+1)-(e+2)-(d+1)+(t+3)-(f+1)]=[v-e-d+t-f],$$

所以$\{1-V_{in}\}=\{v-e-d+t-f\}$.

若设 X_2 = 1, X_1 = 0, X_0 = 1, 由于$\{1-V_{in}\}=[1-(V_{in}+1)]=[1-V_{in}]-1$, 另外

$$\{v-e-d+t-f\}=[(v+1)-(e+1)-(d+2)+(t+1)-f]$$
$$=[v-e-d+t-f]-1,$$

所以$\{1-V_{in}\}=\{v-e-d+t-f\}$.

其他六种情况, 可逐一证明: $\{1-V_{in}\}=\{v-e-d+t-f\}$.

即对游程是 N+ 1 的图段, (5)与(7)式仍然等价.

所以(5)式在 8-连通情况下也是正确的.

5　结论

图像 Euler 数与图段相邻数关系公式的提出使我们对 Euler 数的本质和局部

性有了更好的认识，它是所有图段邻域连接复杂度(即相邻数)的宏观和综合体现. 而且该公式与以往不同，将 4-连通与 8-连通统一在一个公式之中，开辟了一条更为简单、清晰的计算图像 Euler 数的新途径. 另外，更重要的是由局部性质计算二维图像 Euler 数的思路还可进一步推广到三维图像上，关于三维图像 Euler 数与相邻数关系的研究正在进行之中，我们已获得初步成果待后续发表.

参 考 文 献

1 Sonka M, Hlavac V, Boyle R. Image Processing, Analysis, and Machine Vision. 2nd edition, Thomson Learning, 1999. 256~259

2 Dyer C R. Computing the Euler number of an image from its quadtree. Computer Graphics and Image Processing, 1980, 13(3): 270~276[DOI]

3 Rosenfeld A, Kak A C. Digital Picture Processing. Academic Press, 1976. 349~350

4 Rosenfeld A. Picture Languages——Formal Models for Picture Recognition. New York: Academic Press, 1979, 25~26

5 Pratt W K. Digital Image Processing. 2nd edition. New York: John Wiley & Sons, 1991. 351

6 Gray S B. Local properties of binary images in two dimensions. IEEE Trans Computers, 1971, C-20(5): 551~561

7 Rosenfeld A, Kak A C. Digital Picture Processing. 2nd edition. New York: Academic Press, 1982. 248~250

8 Kong T Y, Rosenfeld A. If we use 4- or 8-connectedness for both the objects and the background, the Euler characteristic is not locally computable. Pattern Recognition Letters, 1990, 11: 231~232[DOI]

9 Lin X Z, Sha Y, Ji J W, et al. Image Euler number calculating for intelligent counting. In: Proceedings of the Seventh International Conference on Electronic Measurement & Instruments (ICEMI'2005), International Academic Publishers/World Publishing Corporation, 2005, 8: 642~645

10 Chen M H, Yan P F. A fast algorithm to calculate the euler number for binary images. Pattern Recognition Letters, 1988, 8(5): 295~297[DOI]

11 Chiavetta F, Gesu V. Parallel computation of the euler number via connectivity graph. Pattern Recognition Letters, 1993, 14: 849~859[DOI]

12 Diaz-de-Leon S J L, Sossa-Azuela J H. On the computation of the euler number of a binary object. Pattern Recognition, 1996, 29(3): 471~476[DOI]

13 Nagel W, Ohser J, Pischang K. An integral-geometric approach for the Euler-Poincaré characteristic of spatial images. J Microsc, 2000, 189: 54~62[DOI]

14 Barth E, Ferraro M, Zetzsche C. Global topological properties of images derived from local curvature features. In: Arcelli C, Cordella L P, Sanniti di Baja G, eds. Visual Form 2001, Lecture Notes in Computer Science, Vol 2059. Berlin: Springer Verlag, 2001. 285~294

15 Ohser J, Nagel W, Schladitz K. The Euler number of discretized sets——surprising results in three dimensions. Image Analysis Stereology, 2003, 22(1): 11~19