



论 文

基于四元数表达的模糊矢量形态学算子

雷涛^{①②*}, 樊养余^①, 王毅^①

① 兰州交通大学电子与信息工程学院, 兰州 730070

② 西北工业大学电子信息学院, 西安 710129

* 通信作者. E-mail: leitaoly@163.com

收稿日期: 2012-09-13; 接受日期: 2012-12-10

国家自然科学基金 (批准号: 61202314, 61261029, 60903127)、中国博士后科学基金 (批准号: 2012M521801)、西北工业大学基础研究基金 (批准号: JCY20130130) 和甘肃省青年科技研究基金 (批准号: 1107RJYA017) 资助项目

摘要 由于经典的形态学算子不能直接拓展到彩色图像处理中, 提出一类基于四元数表达的模糊矢量形态学算子. 该算子利用四元数表达彩色图像并结合其分解特性, 将彩色图像的模值、四元数的垂直分量和角度信息作为词典编纂顺序的 3 个边缘分量. 3 个分量一方面去除了彩色图像多通道数据的相关性, 另一方面更便于词典编纂顺序等级的划分. 并利用模糊数学解决了现有词典编纂顺序存在的等级判定难以深层进入的问题, 给出了基于四元数表达的模糊矢量排序算法. 与现有的矢量排序算法相比, 新的矢量排序算法同时考虑了各分量的作用, 并将判定进行到词典编纂顺序的最后一层, 实现了矢量的正确排序. 基于新的矢量排序规则, 定义了矢量形态学算子, 并将新的矢量形态学算子应用于彩色图像滤波、分割中. 实验结果表明, 与现有的矢量形态学算子相比, 新的矢量形态学算子在平滑彩色图像噪声的同时保留了图像细节, 并能正确地分割多类彩色图像, 具有较高的鲁棒性及实用性.

关键词 四元数 模糊矢量形态学 矢量排序 词典编纂顺序 鲁棒性

1 引言

数学形态学对二值和灰度图像处理在过去几十年取得了巨大的成功. 由于彩色图像比灰度图像包含更为丰富的信息, 因此, 近年来将灰度形态学理论拓展到彩色图像处理中成为学者们的研究热点^[1]. 由于彩色图像包含三个通道 (R, G, B), 每一个通道可认为是一幅黑白图像 (单分量图像), 因此早期对彩色图像的处理算法主要是对 3 个分量分别进行灰度形态学处理, 然后将处理结果进行融合得到彩色图像处理结果. 然而这种处理方式不仅破坏了图像三通道原有的关系且引入了新的彩色像素^[2]. 为了解决该问题, 必须引入一种新的方法处理彩色图像, 既能将灰度图像处理算法直接拓展到彩色图像处理中, 又能保持原图像三分量自身的关系, 且不会引入新的彩色像素. Goutsias 等^[3]最早提出了矢量数学形态学理论框架, 该论文指出, 一旦确定了矢量排序规则, 就可以像定义灰度形态学算子一样定义矢量形态学算子, 因此矢量排序规则成为研究热点. 在众多的彩色空间中, 基于亮度/饱和度和色度 (LSH) 的彩色空间更符合人眼的视觉特性, 例如: HLS, HSV, HIS 等. 然而, 在 L, S, H 三个分量中, H 分量用角度值表示, 具有圆形无序特性, 其取值范围在完整的网格内不存在顺序关系, 因此

不能像灰度形态学一样在完整的网格空间内得到确定的顺序关系^[4]. Peters II^[5] 最早研究了关于角度值的数学形态学, 从而提出了一种处理角度值图像的形态学方法, 即利用角度距离对结构元素内的角度值进行排序从而选取最大 (最小) 值作为形态学膨胀 (腐蚀) 算子的输出. 后来, Hanbury 等^[6] 研究了关于单位圆的形态学算子, 并给出了 3 种方法以解决圆形数据的排序问题. 近年来, Luengo-Oroz 等^[7,8] 提出了基于极对数坐标系表达的周期形态学算子, 并成功将其应用于红细胞形状分析和虹膜纹理的多尺度描述. 根据低饱和度下色调无意义的特点, Aptoula 等^[4] 提出了基于距离的多参考色形态学色调顺序, 并给出了一种新的色调排序方法, 即组合饱和度和亮度, 将其作为色调的权重, 进而定义了关于圆形色调的形态学算子. 该方法在纹理分类中取得了较好的效果. 关于角度值形态学算子的研究仅适合部分图像, 对于自然彩色图像而言, 这些算法均具有较低的鲁棒性. Hanbury 等^[9] 最早研究了彩色形态学算子并将其应用于自然彩色图像处理中. 基于 HLS 彩色空间, Hanbury 首先提出了一种同时考虑色调和饱和度方法的矢量形态学算子, 并利用权重函数和词典编纂顺序在 $L^*a^*b^*$ 彩色空间下定义了总的矢量顺序及矢量形态学算子^[10]. 基于 HSV 彩色空间, 考虑到亮度和饱和度分量具有严格的大小顺序关系, Vardavolia 等^[11] 定义了具有两层词典编纂顺序的矢量形态学算子. Louverdis 在此基础上增加了色调分量, 定义了三层词典编纂顺序的矢量排序规则, 并成功应用于彩色图像处理^[12]. 在文献^[13] 中, Weber 等人在 HSV 彩色空间内, 首先通过平移色调原点对色调分量进行预处理, 然后利用经典形态学方法分别处理 H, S, V 三个分量. 该方法被应用于去除彩色噪声, 其结果远远优于直接对 HSV 三个分量的处理结果.

基于 3 个颜色分量的词典编纂顺序能够处理自然彩色图像, 但效果较差. 由于彩色图像中关于矢量距离的研究历来是研究热点问题^[14~17], 因此基于矢量距离的彩色形态学算子得到了学者们的关注. 经典的矢量距离有城市距离、棋盘距离、马氏 (Mahalanobis distance) 距离和欧式距离 (Euclidean distance). 由于矢量距离综合考虑了彩色图像的各个分量, 一定程度上对矢量进行了较为客观的排序, 因此基于距离的矢量形态学算子提高了算子的鲁棒性^[18,19]. Plaza 等^[20] 利用两类矢量滤波器定义了矢量形态学腐蚀和膨胀, 然而, 该算子并不满足集合连通性, 因此被称为是伪形态学算子. Anglo^[21] 在此基础上, 总结并提出了基于距离的矢量排序规则, 并定义了新的彩色形态学算子, 将其应用于彩色图像滤波、增强和分析处理中. 同时, Aptoula 等^[22] 对各种多值数学形态学方法进行了对比研究, 并说明各种形态学理论框架均具有一定的局限性, 仅适合于某一类图像或者某一种情况, 总体鲁棒性较差. 针对词典编纂顺序和基于距离的顺序对矢量数据排序不理想的问题, Aptoula 等^[23~25] 进行了深入研究, 提出了基于 α -修剪的词典编纂顺序的彩色图像处理方法, 该方法通过放宽词典编纂顺序第 1 层的条件, 使得运算便于进入第 2 层, 得到更为客观的矢量排序, 一定程度上提高了形态学算子对彩色图像的处理效果.

由于四元数在表达彩色图像方面具有一定的优势, 即四元数可以将彩色矢量的三个分量作为一个超复数进行整体处理, 而不需要对每一个分量单独进行处理. 近年来, 将四元数与经典的图像处理算法相结合成为彩色图像处理的重要研究手段, 从而也成为业界新一轮的研究热点. Sangwine^[26] 最早提出了基于四元数的彩色图像傅里叶变换. 之后, 他利用四元数的卷积设计了彩色图像边缘检测算子^[27]. Pei 等^[28] 提出了四元数矩阵的奇异值分解及其在彩色图像处理中的应用, 该方法利用四元数奇异值分解可以直接将灰度图像处理方法直接用于彩色图像而不需要对每个通道单独进行处理. Bihan 等^[29] 提出了彩色图像的四元数主成分分析法, 分析了奇异值分解和 K-L 变换两种经典技术拓展到四元数的情况, 并讨论了该技术在彩色图像处理中的应用. Eduardo^[30] 将四元数应用于小波变换, 从而提出了四元数小波变换理论, 并将其应用于基于光流法的运动估计. 为了进一步拓展四元数在彩色图像处理中的应用, Shi 等^[31] 通过训练一个彩色纹理样本集的主成分, 将彩色纹理进行投影从而得到单

一的纹理四元数表达形式, 并将其应用于彩色纹理分割. Gao 等^[32]提出了一种新的概念, 四元数分数差, 并提出了基于四元数分数差的彩色图像边缘检测方法, 该方法针对感兴趣区域内的纹理边缘检测具有更好的效果. Guo 等^[33]将传统的 Fourier-Mellin 变换在灰度图像处理中的应用拓展到了彩色图像处理中, 从而提出了四元数 Fourier-Mellin 变换, 并将其应用于彩色目标识别和彩色图像配准, 较已有的方法处理更直接且不丢失任何彩色信息. 近来, Subakan 等^[34]提出了彩色图像平滑和分割的四元数框架, 提出了一种新的四元数 Gabor 滤波器, 并证明了该滤波器在空间和频域上均是局部最优的. 此外, 还有许多关于四元数图像处理方法^[35~37]. 基于四元数在彩色矢量表达方面的优势, 将四元数应用于形态学方法是一个崭新的思路, 它可以有效解决将形态学方法拓展到彩色图像处理所遇到的问题. Angulo^[1]首先提出了基于四元数表达的形态学算子, 他指出了四元数实部可以有多种不同的表示方式, 并给出了几种基于四元数表达的词典编纂顺序, 对比了各种顺序的优劣性. 并将其应用于实际交通图像的处理. 2011 年, Angulo^[38]又提出了超复数数学形态学, 利用局部模值和角度定义词典编纂顺序, 并同时考虑了原始图像和处理后的图像, 利用新定义的超复数形态学算子处理彩色图像, 效果较好.

分析和总结已有的文献, 目前的主流矢量形态学理论解决了矢量排序中对距离定义的问题, 并建立了合理的词典编纂顺序, 适合于多种彩色空间下对彩色图像的处理. 然而, 面临的问题是: 1) 难以确定最有效的边缘分量应用于词典编纂排序中. 2) 对于词典编纂排序中各边缘分量的等级问题没有进行深入研究 and 解释. 3) 词典编纂顺序中各彩色分量的对比难以进入到下一层, 从而导致等级较低的彩色分量没有参与到实际的词典排序中. 最终对彩色像素的排序结果并不符合实际人眼对彩色的感知顺序. 基于以上问题, 本文提出了基于模糊四元数的矢量形态学算子. 该算子的创新性在于: 1) 利用四元数表达彩色图像, 从而定义了新的彩色分量用于词典编纂顺序. 2) 将模糊理论应用于矢量形态学, 利用模糊数学实现对词典编纂顺序中的每一层进行判决, 从而定义了基于四元数表达的模糊矢量排序规则. 3) 基于新的模糊矢量顺序规则, 定义了矢量形态学腐蚀、膨胀算子及其组合算子. 与现有的矢量形态学算子相比, 实验结果表明, 本文提出的模糊四元数形态学算子对彩色图像处理具有更好的效果、鲁棒性高、且没有增加算子的计算复杂度, 适合于多类彩色图像.

2 基于四元数的彩色图像表达

2.1 四元数及其性质

四元数的概念最初由 Hamilton 提出, 它是复数的拓展形式. 一个四元数由实部和虚部两部分组成, 实部为一标量, 用 w 表示, 而虚部为 3D 向量, 这里为了将四元数与彩色图像联系起来, 因此我们用 (r, g, b) 表示虚部. 由此可以得到四元数的一般表达式为: $\mathbf{q} = w + ri + gj + bk$. 如果将虚部 (r, g, b) 用一矢量表示, 即 $\mathbf{v} = (r, g, b)$, 则 $\mathbf{q} = [w \quad \mathbf{v}]$. 显然四元数使用 3 个虚部 i, j, k 扩展了只有一个虚部的复数系统, 下面给出四元数的一些重要性质:

- 1) $i^2 = j^2 = k^2 = -1, ij = k, ji = -k, jk = i, kj = -i, ki = j, ik = -j$.
- 2) 和复数一样, 四元数 $\mathbf{q}$ 的模为 $\|\mathbf{q}\| = \|[w \quad r \quad g \quad b]\| = \sqrt{w^2 + r^2 + g^2 + b^2}, \|\mathbf{q}\| = \sqrt{w^2 + \|\mathbf{v}\|^2}$.
- 3) 四元数 $\mathbf{q}$ 的共轭记为 $\mathbf{q}^* = [w \quad (x \quad y \quad z)]^* = [w \quad (-x \quad -y \quad -z)]$.
- 4) 四元数 $\mathbf{q}$ 的逆记为 $\mathbf{q}^{-1} = \frac{\mathbf{q}^*}{\|\mathbf{q}\|}$.
- 5) 两个四元数 $\mathbf{q}_1$ 和 $\mathbf{q}_2$ 相乘, 其结果记为 $\mathbf{q}_1 \times \mathbf{q}_2 = [w_1 \quad \mathbf{v}_1] \times [w_2 \quad \mathbf{v}_2] = (w_1 w_2 - r_1 r_2 - g_1 g_2 - b_1 b_2)$



图 1 原彩色图像

Figure 1 Original color image



图 2 四元数实部的 3 种形式 (第一列为 Φ^1 , 第二列为 Φ^2 , 第三列为 Φ^3 , $\lambda = 0.5$)

Figure 2 Three representations of scalar part of quaternion (The first column is Φ^1 , the second column is Φ^2 , the third column is Φ^3 , $\lambda = 0.5$)

$$+(w_1r_2 - w_2r_1 - g_1b_2 - g_2b_1)i + (w_1g_2 - w_2g_1 - r_2b_1 - r_1b_2)j + (w_1b_2 - w_2b_1 - r_1g_2 - r_2g_1)k.$$

6) 对于四元数 q , 其极坐标表达式为 $q = \rho e^{\xi\theta}$. 其中, $\rho = \sqrt{w^2 + r^2 + g^2 + b^2}$, $\xi = \frac{ri+gj+bk}{\sqrt{r^2+g^2+b^2}}$, $\theta = \arctan(\frac{\sqrt{r^2+g^2+b^2}}{w})$.

2.2 基于四元数表达的彩色图像实部

由于一幅彩色图像包含 3 个分量, 显然, 基于四元数表达的彩色图像为一纯虚数形式, 其实部为 0. 为了利用四元数极坐标表达式的一些重要性质, 我们必须构造基于四元数表达的彩色图像的实部. 若定义 $\Phi = f(r, g, b)$, 则对实部的定义有 3 种形式^[1]:

$$\Phi^1 = \frac{1}{4} (|2r - g - b| + |2g - r - b| + |2b - g - r|), \quad (1)$$

$$\Phi^2 = \exp \left(-w_E \|q_i - c_0\| - w_L \arccos \frac{\langle q_i, c_0 \rangle}{\|q_i\| \times \|c_0\|} \right), \quad (2)$$

其中, $w_E = (1/\sqrt{2})\lambda$, $w_L = (2\pi)^{-1}(1 - \lambda)$, $0 \leq \lambda \leq 1$. λ 表示影响欧式距离的权重, 一般取 $\lambda = 0.5$, q_i 表示彩色像素点, c_0 表示参考色的范围从到.

$$\Phi^3 = \frac{\kappa^+}{4\pi \|q_i - c_0\|} + \sum_{n=-4, n \neq i}^4 \frac{\kappa^-}{4\pi \|q_i - q^n\|}, \quad (3)$$

其中, $\kappa^+ = 9Q$, $\kappa^- = -Q$, $Q = 4\pi u$, $u = \sqrt{r^2 + g^2 + b^2}$, $q^0 = (0.5, 0.5, 0.5)$, $q^1 = (1, 1, 1)$, $q^2 = (1, 0, 0)$, $q^3 = (0, 1, 0)$, $q^4 = (0, 0, 1)$, $q^{-1} = (0, 0, 0)$, $q^{-2} = (0, 1, 1)$, $q^{-3} = (1, 0, 1)$, $q^{-4} = (1, 1, 0)$, 9 个彩色像素点对应 RGB 彩色立方体的 8 个顶点和一个中心点.

显然, 对于 3 种表达形式的实部, 除了第一种不需要参考色之外, 其他两种均依赖于参考色. 参考色的选择直接影响到实部的表达效果, 如图 1 和 2 所示 (c_0 代表参考色).

就 3 种表达式而言, 显然 Φ^1 基本不受参考色的影响, 而 Φ^2 和 Φ^3 对参考色较敏感. 就实际的彩色图像处理而言, 一般均以纯黑色 $(0, 0, 0)$ 作为参考色, 因此我们选用 Φ^1 为四元数的实部表达式, 由此得到彩色图像的四元数表达式为

$$q = \Phi^1 + ri + gj + bk. \quad (4)$$

四元数极坐标表达式为

$$q = \rho e^{\xi \theta}, \quad (5)$$

其中, $\rho = \sqrt{(\Phi^1)^2 + r^2 + g^2 + b^2}$, $\xi = \frac{ri + gj + bk}{\sqrt{r^2 + g^2 + b^2}}$, $\theta = \arctan(\frac{\sqrt{r^2 + g^2 + b^2}}{\Phi^1})$. 针对彩色图像的四元数表达式, 图 3 给出了四元数极坐标表达式各成分随参考色变化的结果.

2.3 四元数的分解

根据四元数的分解特性, 一个四元数可以分解为水平投影部分 ($q^{\parallel}$) 和垂直投影部分 ($q^{\perp}$), 其分解原理如图 4 所示. 其中, $q = q^{\perp} + q^{\parallel}$, $q^{\perp r} = q^{\perp} - q^{\parallel}$, $q^{\parallel r} = q^{\parallel} - q^{\perp}$, $q^{\perp r}$ 表示水平反射部分, $q^{\perp r}$ 表示垂直反射部分. 由于 $q^{\parallel} = \Phi^1(q) + V^{\parallel}(q)$, $q^{\perp} = V^{\perp}(q)$, V 表示四元数的虚平面. 对 V 进行分解, 得到

$$V^{\parallel} = \frac{1}{3} [(r + g + b)i + (r + g + b)j + (r + g + b)k]. \quad (6)$$

由于 $V = V^{\perp} + V^{\parallel}$, 因此

$$V^{\perp} = \frac{1}{3} [(2r - g - b)i + (2g - r - b)j + (2b - r - g)k]. \quad (7)$$

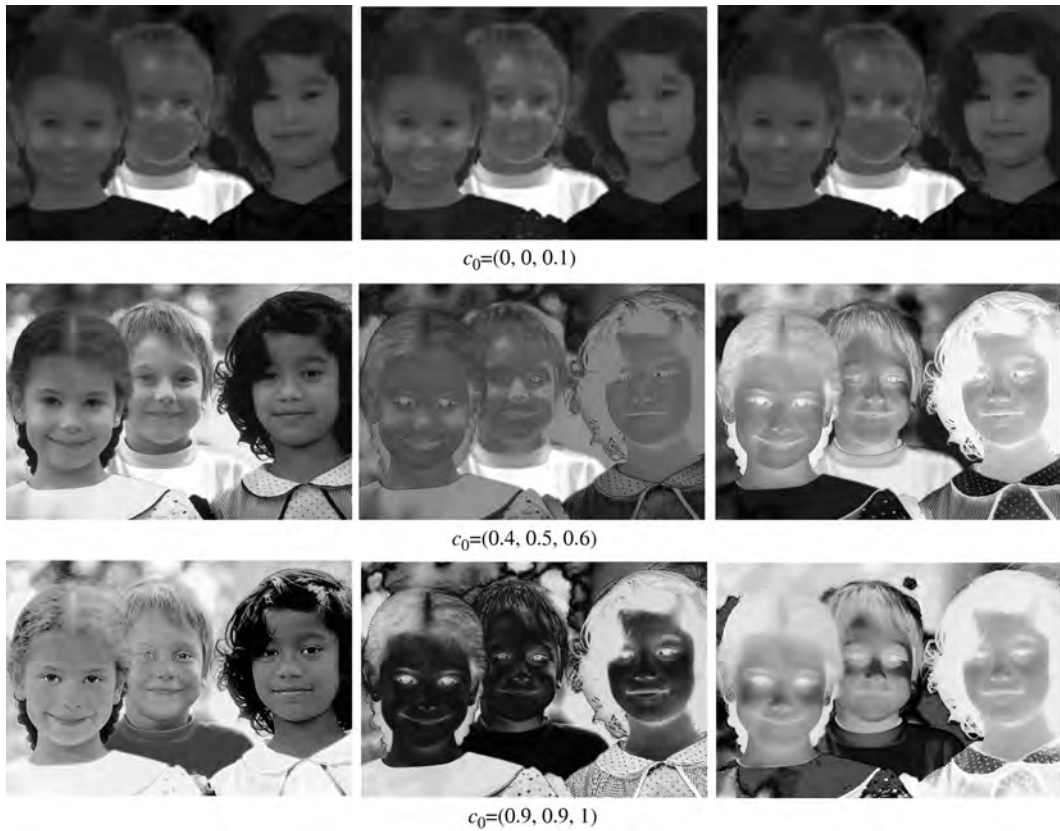


图 3 基于四元数表达的 Φ^1 , ρ 和 θ 结果 (第一列为 Φ^1 , 第二列为 ρ , 第三列为 θ)

Figure 3 Φ^1 , ρ and θ based on quaternion representation. (The first column is Φ^1 , the second column is ρ , the third column is θ)

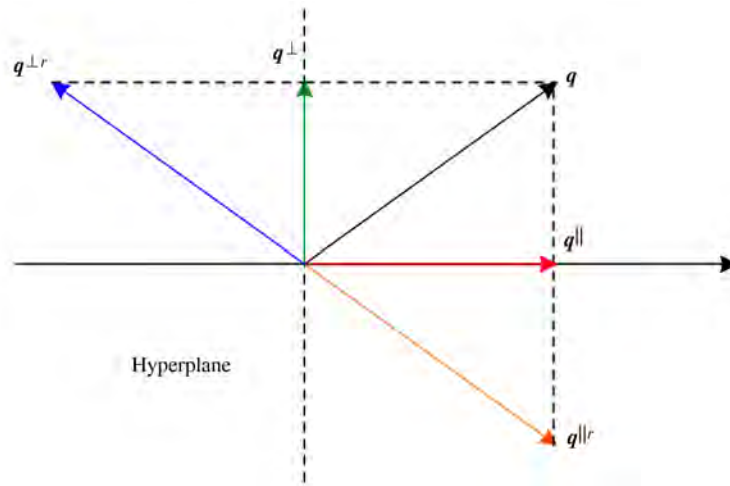


图 4 四元数分解图

Figure 4 Decomposition of quaternion

从四元数的分解结果来看, 显然 $q^||$ 表示彩色图像的亮度部分, 而 q^perp 仍为彩色图像 (见图 5), 各自的模值为



图 5 基于四元数分解的水平和垂直分量

Figure 5 Parallel and perpendicular components based on quaternion decomposition. (a) Parallel component; (b) perpendicular component

$$\|\mathbf{q}^{\parallel}\| = \sqrt{(\Phi^1(\mathbf{q}))^2 + \|V^{\parallel}(\mathbf{q})\|^2}, \quad (8)$$

$$\|\mathbf{q}^{\perp}\| = \|V^{\perp}(\mathbf{q})\|. \quad (9)$$

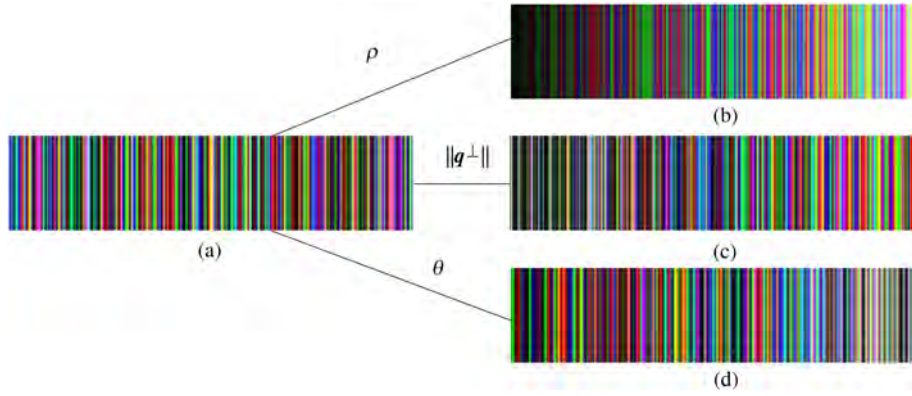
3 基于四元数的模糊矢量排序

经典的矢量排算法序均采用词典编纂顺序, 该算法的优点在于可以自由选择彩色分量, 且排序后便于求最大最小值. 缺陷在于: 1) 对彩色分量的选择问题. 目前已有的算法大多是基于不同的彩色空间和彩色分量的组合, 导致多种不同的处理结果. 2) 在确定各彩色分量的层次问题上没有给出具体的解释和分析, 现有的方法大多是任意给出顺序, 导致出现多种分层方法. 3) 词典顺序的计算难以进入到最后一层. 为了解决以上问题, 下面给出一种基于四元数的模糊矢量排序方法.

3.1 基于四元数分解的彩色分量选择

根据上节对基于四元数的彩色表达及其分解结果, 利用新的彩色分量进行矢量排序是一种新的思路, 该方法摆脱了传统的基于彩色空间 LSH(HSV/HIS/HLS) 和基于距离的彩色分量选择方法. 利用四元数分解得到的水平和垂直分量 ($\mathbf{q}^{\parallel}$, $\mathbf{q}^{\perp}$) 以及四元数极坐标表达方法中的模值和角度分量 ($\rho = \sqrt{w^2 + r^2 + g^2 + b^2}$, $\theta = \arctan(\frac{\sqrt{r^2 + g^2 + b^2}}{w})$) 进行排序. 如果采用 $\|\mathbf{q}^{\parallel}\|$ 和 $\|\mathbf{q}^{\perp}\|$ 作为彩色分量进行排序, 则由于 $\|\mathbf{q}^{\parallel}\|$ 近似图像的亮度分量, $\|\mathbf{q}^{\perp}\|$ 近似图像的饱和度分量, 从而其排序结果与基于 HSV 彩色空间的排序方法相近似 (结果见文献 [11,12]), 因此单独选择 $\|\mathbf{q}^{\parallel}\|$ 和 $\|\mathbf{q}^{\perp}\|$ 是不合理的. 根据四元数极坐标表达方法, 如果选用 ρ 和 θ , 由于只考虑了矢量的模值和角度, 与传统的方法相比缺少一个分量, 其排序效果较差 (结果见文献 [1]). 根据以上分析, 通过结合 $\|\mathbf{q}^{\parallel}\|$, $\|\mathbf{q}^{\perp}\|$, ρ 和 θ , 从而选择出新的彩色分量进行排序. 由于 $\|\mathbf{q}^{\parallel}\|$ 和 ρ 所表达的意义近似, 而 ρ 在距离意义上优于 $\|\mathbf{q}^{\parallel}\|$, 因此我们选用 ρ 、 $\|\mathbf{q}^{\perp}\|$ 和 θ 作为词典编纂顺序中需要的 3 个分量. 基于新的 3 个分量, 图 6 给出了单分量对彩色条带的排序结果.

图 6 表明, ρ 是距离分量, 因此其排序结果优于 $\|\mathbf{q}^{\perp}\|$ 和 θ . 显然, ρ 应该置于词典编纂顺序的第一层, 而 $\|\mathbf{q}^{\perp}\|$ 和 θ 具有相反的排序效果, 且 θ 表示角度信息, 具有圆形无序特性, 因此置于末层, 由此得到新的矢量排序算法为 ($\leq_{\text{QVO}}$ 表示在 QVO 矢量排序算法下的矢量小于且等于, QVO 表示基于

图 6 ρ , $\|q^\perp\|$ 和 θ 单分量对彩色条带的排序结果Figure 6 Ordering results of color band (a) based on single component ρ (b), $\|q^\perp\|$ (c) and θ (d)

四元数表达的矢量排序算法):

$$\mathbf{q}_1 \leq_{\text{QVO}} \mathbf{q}_2 \Leftrightarrow \begin{cases} \rho_1 < \rho_2, \\ \rho_1 = \rho_2 \quad \text{and} \quad \|q_1^\perp\| < \|q_2^\perp\|, \\ \rho_1 = \rho_2 \quad \text{and} \quad \|q_1^\perp\| = \|q_2^\perp\| \quad \text{and} \quad \theta_1 \geq \theta_2. \end{cases} \quad (10)$$

3.2 模糊矢量排序

然而, 现实生活中的问题往往存在较多的不确定因素, 亦即影响事物发展的规律不是由单方面因素决定的, 是多种因素共同作用的结果. 矢量排序本身就是一个模糊问题, 不存在绝对的优越或低劣, 实际中得到的矢量大于或小于均存在一定的概率事件, 从而导致采用绝对排序方法不适合实际情况, 即对彩色像素的排序效果并不理想. 回顾灰度像素值的大小具有绝对顺序, 因此其排序规则为

$$p_1(x_1) \leq p_2(x_2) \Leftrightarrow x_1 \leq x_2. \quad (11)$$

现有的彩色像素排序规则是根据灰度像素值排序规则直接拓展得到的 ($\leq_{XYZ}$ 表示在 XYZ 矢量排序算法下的矢量小于且等于):

$$p_1(x_1, y_1, z_1) \leq_{XYZ} p_2(x_2, y_2, z_2) \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 < x_2, \\ x_1 = x_2 \quad \text{and} \quad y_1 < y_2, \\ x_1 = x_2 \quad \text{and} \quad y_1 = y_2 \quad \text{and} \quad z_1 \leq z_2. \end{cases} \quad (12)$$

根据式 (12), 若定义 3D 矢量集合: $(X, Y, Z) = [(3, 2, 5), (4, 1, 2), (4, 4, 4), (1, 4, 2), (1, 5, 1), (2, 3, 5), (5, 1, 1)]$, 如图 7(a) 所示. 为了求矢量集合中的最大矢量, 我们假设实际中矢量的大小是由矢量的模值决定的, 即实际的矢量最大值应该为点 (4, 4, 4), 依据 6 种分层方法求得的最大矢量值分别为: (5, 1, 1) X - Y - Z 顺序, (5, 1, 1) X - Z - Y 顺序, (1, 5, 1) Y - X - Z 顺序, (1, 5, 1) Y - Z - X 顺序, (3, 2, 5) Z - X - Y 顺序, (2, 3, 5) Z - Y - X 顺序, 如图 7(b) 所示. 共有 4 种结果, 显然 6 种词典编纂顺序都不能得到正确的最大矢量值. (图中 X - Y - Z 表示 X 置于第一层、 Y 置于第二层、 Z 置于末层, 公式 (12) 对应 X - Y - Z 顺序, 其他 5 种顺序所对应的公式略). 显然这种排序方法具有多结果性和不确定性, 不具有普遍性.

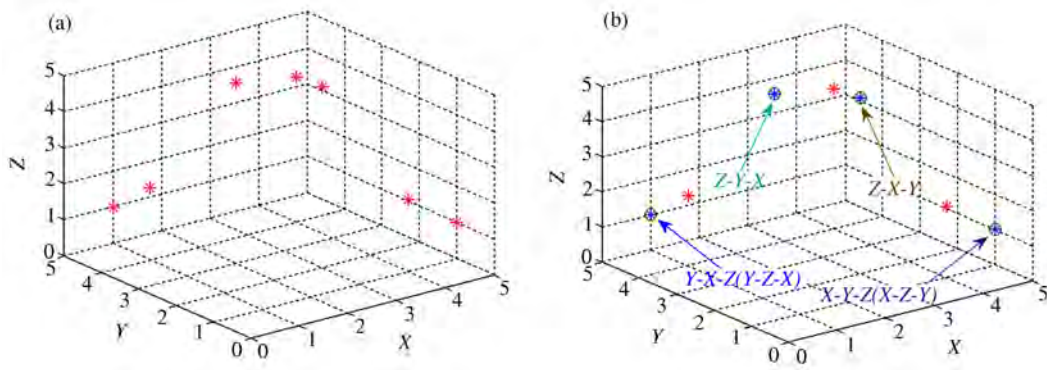


图 7 计算矢量集中的最大矢量

Figure 7 The maximal vector in vector sets. (a) 3D vector set (X, Y, Z) ; (b) the maximal vector according to various lexicographical orderings for (X, Y, Z)

矢量排序的目的是计算一组矢量中的最小和最大矢量值, 将其作为矢量形态学腐蚀和膨胀结果. 设 S_n 为一组彩色像素. $S_n = \{q_1(\rho_1, \|q_1^\perp\|, \theta_1), q_2(\rho_2, \|q_2^\perp\|, \theta_2), \dots, q_n(\rho_n, \|q_n^\perp\|, \theta_n)\}$ 根据经典灰度形态学理论可知, 要定义腐蚀和膨胀算子, 就必须求得集合中的极大值和极小值. 即

$$\text{MIN}(S_n) = \wedge \{q_1(\rho_1, \|q_1^\perp\|, \theta_1), q_2(\rho_2, \|q_2^\perp\|, \theta_2), \dots, q_n(\rho_n, \|q_n^\perp\|, \theta_n)\}, \quad (13)$$

$$\text{MAX}(S_n) = \vee \{q_1(\rho_1, \|q_1^\perp\|, \theta_1), q_2(\rho_2, \|q_2^\perp\|, \theta_2), \dots, q_n(\rho_n, \|q_n^\perp\|, \theta_n)\}. \quad (14)$$

为了计算 $\text{MIN}(S_n)$ 和 $\text{MAX}(S_n)$, 根据词典编纂顺序的排序方法, 给出基于四元数表达的模糊矢量排序 (QFVO) 方法, 以模糊求最小为例.

首先定义 μ 为模糊权值系数, $0 < \mu \leq 1$, μ 是随着结构元素尺寸变化的, 如果结构元素尺寸较小, 一般取 $\mu = 0.5$, 如果结构元素尺寸较大时, 则 μ 逐渐变小.

步骤 1: 首先利用彩色分量 ρ 简化集合 S_n , 对 ρ 排序, 得到排序后的结果为 $\rho_1^{s1} \leq \rho_2^{s1} \leq \dots \leq \rho_n^{s1}$, 其中, $\rho_1 = \rho_{i1}^{s1}, \rho_2 = \rho_{j1}^{s1}, \dots, \rho_n = \rho_{w1}^{s1}, 1 \leq i1, j1, \dots, w1 \leq n$. 根据 ρ 的排序结果, 集合 S_n 被重新排列为 $S_n^{s1} = \{q_1^{s1}(\rho_1^{s1}, q_1^{\perp s1}, \theta_1^{s1}), q_2^{s1}(\rho_2^{s1}, q_2^{\perp s1}, \theta_2^{s1}), \dots, q_n^{s1}(\rho_n^{s1}, q_n^{\perp s1}, \theta_n^{s1})\}$, 从而可以利用 S_n^{s1} 获取新的集合为 $S_{n1}^{s1} = \{q_1^{s1}(\rho_1^{s1}, q_1^{\perp s1}, \theta_1^{s1}), q_2^{s1}(\rho_2^{s1}, q_2^{\perp s1}, \theta_2^{s1}), \dots, q_{n1}^{s1}(\rho_{n1}^{s1}, q_{n1}^{\perp s1}, \theta_{n1}^{s1})\}, n1 = \text{Round}(\mu \times n)$.

步骤 2: 利用彩色分量 $q^\perp$ 进一步简化集合 S_{n1}^{s1} , 对 S_{n1}^{s1} 中的 $q^\perp$ 进行排序, 得到排序后的结果为 $q_1^{\perp s2} \leq q_2^{\perp s2} \leq \dots \leq q_{n1}^{\perp s2}$, 其中, $q_1^{\perp s1} = q_{i2}^{\perp s2}, q_2^{\perp s1} = q_{j2}^{\perp s2}, \dots, q_{n1}^{\perp s1} = q_{w2}^{\perp s2}, 1 \leq i2, j2, \dots, w2 \leq n1$. 根据 $q^\perp$ 的排序结果, 集合 S_{n1}^{s1} 对 S_{n1}^{s1} 被重新排列为 $S_{n1}^{s2} = \{q_1^{s2}(\rho_1^{s2}, q_1^{\perp s2}, \theta_1^{s2}), q_2^{s2}(\rho_2^{s2}, q_2^{\perp s2}, \theta_2^{s2}), \dots, q_{n1}^{s2}(\rho_{n1}^{s2}, q_{n1}^{\perp s2}, \theta_{n1}^{s2})\}$, 利用 S_{n1}^{s2} 得到新的集合 $S_{n2}^{s2} = \{q_1^{s2}(\rho_1^{s2}, q_1^{\perp s2}, \theta_1^{s2}), q_2^{s2}(\rho_2^{s2}, q_2^{\perp s2}, \theta_2^{s2}), \dots, q_{n2}^{s2}(\rho_{n2}^{s2}, q_{n2}^{\perp s2}, \theta_{n2}^{s2})\}, n2 = \text{Round}(\mu \times n1)$.

步骤 3: 利用彩色分量 θ 求出 $\text{MIN}(S_n)$, 对 S_{n2}^{s2} 中的 θ 进行排序, 得到排序后的结果为 $\theta_1^{s3} \leq \theta_2^{s3} \leq \dots \leq \theta_{n2}^{s3}$, 其中, $\theta_1^{s2} = \theta_{i3}^{s3}, \theta_2^{s2} = \theta_{j3}^{s3}, \dots, \theta_{n2}^{s2} = \theta_{w3}^{s3}, 1 \leq i3, j3, \dots, w3 \leq n2$. 根据 θ 的排序结果, 对 S_{n2}^{s2} 重新排列后, 得到 $S_{n2}^{s3} = \{q_1^{s3}(\rho_1^{s3}, q_1^{\perp s3}, \theta_1^{s3}), q_2^{s3}(\rho_2^{s3}, q_2^{\perp s3}, \theta_2^{s3}), \dots, q_{n2}^{s3}(\rho_{n2}^{s3}, q_{n2}^{\perp s3}, \theta_{n2}^{s3})\}$, 从而得到 $\text{MIN}(S_n) = \wedge S_{n2}^{s3} = q_1^{s3}(\rho_1^{s3}, q_1^{\perp s3}, \theta_1^{s3})$.

根据式 (10), 结合 QFVO 的计算步骤, 给出 S_n 内任意两个矢量的大小比较公式 ($\leq_{\text{QFVO}}$ 表示基

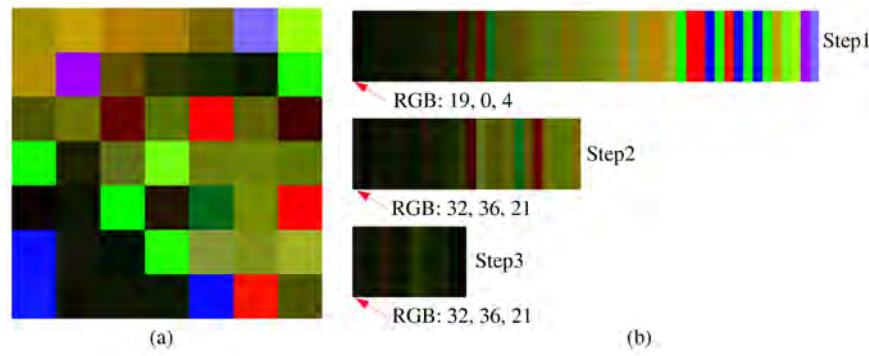

 图 8 根据 QFVO 求 7×7 彩色像素块中最小彩色像素点结果

Figure 8 The minimal color pixel in color pixel block of size 7 using QFVO $\times 7$. (a) Color pixel block of size 7×7 ; (b) computational process of the minimal color pixel in color pixel block of size 7×7

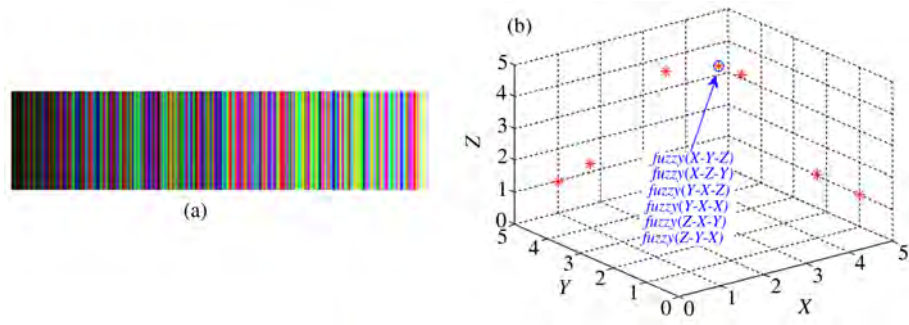


图 9 利用 QFVO 对矢量数据的排序结果

Figure 9 Ordering results of vector data using QFVO. (a) Ordering result of color band in Figure 6 using QFVO; (b) the maximal vector in Figure 7(a) using QFVO

于四元数表达的模糊矢量小于等于):

$$q_1(\rho_1, q_1^\perp, \theta_1) \leq_{\text{QFVO}} q_2(\rho_2, q_2^\perp, \theta_2) \Leftrightarrow \begin{cases} |i1 - j1| > n_1, \\ |i1 - j1| < n_1 \text{ and } |i2 - j2| > n_2, \\ |i1 - j1| < n_1 \text{ and } |i2 - j2| < n_2 \text{ and } \theta_1 \geq \theta_2. \end{cases} \quad (15)$$

根据 QFVO 的计算方法, 下面给出求 7×7 彩色像素块中最小彩色像素的计算过程. 图 8(a) 为 7×7 彩色像素块, 图 8(b) 为最小彩色像素计算过程. 最终得到 7×7 彩色像素块的最小彩色像素点为 $q(32, 36, 21)$.

利用 QFVO 重新对彩色条带 (图 6(a)) 和 3D 数据 (图 7(a)) 进行矢量排序, 结果如图 9 所示. 图 9 表明, 利用 QFVO 对彩色条带和矢量数据进行排序, 彩色条带的排序结果符合实际人眼对彩色的感知顺序, 计算 3D 矢量数据中的极值矢量具有稳定性好, 不依赖于词典编纂顺序中各分量的等级次序等优点.

4 基于 QFVO 的矢量形态学算子

在彩色形态学算子的定义中, 一旦矢量排序规则确定了, 就可以根据经典形态学算子的定义方法

定义矢量形态学算子. 首先给出形态学算子所涉及到的几个概念. ψ 为任一完整网格 $\Gamma(R, \Omega^{\text{RGB}})$ 内的图像变换^[39], 彩色图像 $\mathbf{f}, \mathbf{g} \in \Gamma(R, \Omega^{\text{RGB}})$, 则 (VO 表示矢量排序算法, $\leq_{\text{VO}}$ 表示在 VO 矢量排序算法下的矢量小于且等于):

- 1) 递增性: 如果 $\mathbf{f} \leq_{\text{VO}} \mathbf{g} \Rightarrow \psi(\mathbf{f}) \leq_{\text{VO}} \psi(\mathbf{g})$, 则称变换 ψ 是递增的.
- 2) 幂等性: 如果 $\psi[\psi(\mathbf{f})] = \psi(\mathbf{f})$, 则称变换 ψ 是幂等的.
- 3) 扩展性: 如果 $\mathbf{f} \leq_{\text{VO}} \psi(\mathbf{f})$, 则称变换 ψ 是扩展的.
- 4) 非扩展性: 如果 $\psi(\mathbf{f}) \leq_{\text{VO}} \mathbf{f}$, 则称变换 ψ 是非扩展的.

基于形态学图像变换的基本概念, 下面给出彩色形态学腐蚀和膨胀的定义.

彩色图像 $\Gamma(R, \Omega^{\text{RGB}})$, b 为结构元素, 则利用结构元素 b 对图像 $\mathbf{f}$ 在 $\mathbf{x} \in R$ 处的腐蚀可定义为

$$\vec{\varepsilon}(\mathbf{f})(\mathbf{x}) = \{\mathbf{f}(\mathbf{y}) : \mathbf{f}(\mathbf{y}) = \wedge_{\text{QFVO}} [\mathbf{f}(\mathbf{t})], \mathbf{t} \in b_{\mathbf{x}}\}, \quad (16)$$

其中, $\wedge_{\text{QFVO}}$ 表示对矢量集合求下限, 同理, $\vee_{\text{QFVO}}$ 表示对矢量集合求上限, 由此得到彩色膨胀运算的定义:

$$\vec{\delta}(\mathbf{f})(\mathbf{x}) = \{\mathbf{f}(\mathbf{y}) : \mathbf{f}(\mathbf{y}) = \vee_{\text{QFVO}} [\mathbf{f}(\mathbf{t})], \mathbf{t} \in b_{\mathbf{x}}\} \quad (17)$$

彩色腐蚀和膨胀均满足递增性, 且彩色腐蚀满足非扩展性, 而彩色膨胀满足扩展性. 彩色腐蚀后的图像向参考色靠近, 而经过彩色膨胀处理后的图像远离参考色, 由于通常以黑色作为参考色, 因此腐蚀后的图像向纯黑色方向靠近, 而膨胀后的图像向纯白色方向靠近. 如图 10 所示. 图 10(a) 为原彩色图像. 图 10(a1)–(b8) 为经过各种不同的彩色形态学腐蚀、膨胀算子处理后的图像 (结构元素 b 选用 3×3 的方形结构, $\mu=0.5$).

由图 10 可以看出, 本文提出的矢量形态学算子的处理结果与经典方法的目标一致, 腐蚀后的图像向黑色方向靠近, 膨胀后的结果向白色方向靠近. 然而不同的是, 经本文算子处理后的图像整体纹理没有发生太大变化, 即新的矢量腐蚀、膨胀算子有效保护了原图像的纹理不发生大的变化. 而现有的矢量腐蚀算子显然已经较大幅度地改变了原图像的纹理 (腐蚀后出现大片黑色区域、膨胀后出现大片白色区域), 图像结构发生了变化. 这一特点在彩色图像滤波、分割中具有重要意义.

基于矢量腐蚀和膨胀的定义, 用结构元素 b 对彩色图像 $\mathbf{f} \in \Gamma(R, \Omega^{\text{RGB}})$ 进行矢量形态开和闭运算可用 $\vec{\gamma}$ 和 $\vec{\varphi}$ 表示, 定义为

$$\vec{\gamma}(\mathbf{f}) = \vec{\varepsilon}[\vec{\delta}(\mathbf{f})], \quad (18)$$

$$\vec{\varphi}(\mathbf{f}) = \vec{\varepsilon}[\vec{\delta}(\mathbf{f})]. \quad (19)$$

形态学开运算能够去除较结构元素小的亮结构, 而形态学闭运算能去除较结构元素小的暗结构. 然而, 由于彩色图像是多通道图像, 因此矢量开运算去除了较结构元素小且矢量排序等级较低的图像结构; 矢量闭运算去除了较结构元素小且矢量排序等级较高的图像结构^[40]. 基于矢量开、闭运算的顺序组合, 常用的序列矢量形态学滤波算子为矢量开闭、闭开交替序列滤波算子, 可用 $\text{ASF}_{\vec{\varphi}\vec{\gamma}}$ 和 $\text{ASF}_{\vec{\gamma}\vec{\varphi}}$ 表示.



图 10 各种矢量腐蚀、膨胀算子对比

Figure 10 Comparison results of various vector erosion and dilation operators. (a) Original color image; (a1) VS erosion [11]; (b1) VS dilation [11]; (a2) VSH erosion [12]; (b2) VSH dilation [12]; (a3) DRGB erosion [2]; (b3) DRGB dilation [2]; (a4) DLSH erosion [21]; (b4) DLSH dilation [21]; (a5) α_1 -MLEX erosion ($\alpha = 0.25$) [24]; (b5) α -LEX dilation ($\alpha = 0.25$) [24]; (a6) QPO erosion [1]; (b6) QPO dilation [1]; (a7) QPAPE erosion [1] (QPO corresponds to Eq. (16), QPAPE corresponds to Eq. (17)); (b7) QPAPE dilation [1] (QPO corresponds to Eq. (16), QPAPE corresponds to Eq. (17)); (a8) The proposed vector QFVO erosion; (b8) the proposed vector QFVO dilation

$$\text{ASF}_{\vec{\varphi}\vec{\gamma}}(f) = \vec{\varphi}_{bn}\vec{\gamma}_{bn} \cdots \vec{\varphi}_{b2}\vec{\gamma}_{b2}\vec{\varphi}_{b1}\vec{\gamma}_{b1}(\mathbf{f}), \quad (20)$$

$$\text{ASF}_{\vec{\gamma}\vec{\varphi}}(f) = \vec{\gamma}_{bn}\vec{\varphi}_{bn} \cdots \vec{\gamma}_{b2}\vec{\varphi}_{b2}\vec{\gamma}_{b1}\vec{\varphi}_{b1}(\mathbf{f}). \quad (21)$$

形态学图像处理中, 形态学梯度算子在图像边缘检测及分水岭分割中均具有重要作用, 下面给出新的矢量形态学梯度算子.

$$\vec{\rho} = \vec{\delta}(\mathbf{f}) - \vec{\varepsilon}(\mathbf{f}), \quad (22)$$

$$\vec{\rho}^+ = \vec{\delta}(\mathbf{f}) - \mathbf{f}, \quad (23)$$

$$\vec{\rho}^- = \mathbf{f} - \vec{\varepsilon}(\mathbf{f}). \quad (24)$$

其中, $\vec{\rho}$ 为矢量形态学标准梯度, $\vec{\rho}^+$ 为矢量形态学外梯度, 而 $\vec{\rho}^-$ 表示矢量形态学内梯度.

5 实验结果及分析

为了验证本文提出的模糊矢量形态学算子, 仿真实验选用 Kodak 公司提供的标准测试图像和加州大学伯克利分校计算机视觉实验室 (Benchmark dataset) 提供的图像. 计算机采用 Pentium(R)Dual 处理器 2.8 Ghz, 4 GB 内存. 利用现有的矢量形态学滤波算子和本文提出的矢量形态学滤波算子对测试图像进行滤波, 然后利用矢量梯度算子结合形态学分水岭对图像分割. 滤波结果如图 11 所示 (噪声图像是加入 20% 的椒盐噪声, 参考色 $c_0 = (0, 0, 0)$, 选用矢量开闭滤波器 $\tilde{\varphi}_b \tilde{\gamma}_b$, b 是尺寸为 3×3 的方形结构元素, $\mu=0.5$), 分割结果如图 12 所示.

从图 11 可以看出, VS, VSH 和 α -LEX 均是在 HSV 彩色空间内定义的矢量排序方法, 3 种方法的缺陷在于需要经 RGB 彩色空间转换到 HSV 彩色空间, α -LEX 的处理结果显然优于 VS 和 VSH, 原因在于 α -LEX 采用了 α 截断方法 ($\alpha=0.25$), 从而使词典顺序便于进入到下一层, 因此处理效果优于 VS 和 VSH. DLSH 采用了基于距离变换的矢量排序方法, 在 LSH 彩色空间进行, 由于该方法利用了彩色组合距离分量, 因此其处理效果得到进一步提升. DRGB 直接基于 RGB 彩色空间中的距离组合进行矢量排序, 处理结果较差, 这是由于 RGB 三个分量之间具有较强的相关性, 3 个分量的选择不如 HSV 彩色空间中 3 个分量更符合人眼对彩色的感知. 但其优点在于便于处理. 文献 [1] 给出 3 种词典编纂排序方法, 其中, QPAPE 效果较好. 本文提出的矢量排序方法 QFVO 利用四元数的分解特性构造了新的边缘分量, 由于新的 3 个分量相互之间具有更弱的相关性, 因此在词典编纂排序中具有更好的矢量排序结果. 此外, QFVO 采用模糊排序算法, 从而降低了词典编纂顺序中各分量之间的排序等级关系, 从而使词典编纂顺序中的每一个边缘分量参与到矢量排序中, 最终基于 QFVO 定义的矢量形态学滤波算子有效改善了对彩色图像的滤波效果, 且鲁棒性较高, 适合多种类型图像, 如图 11(j) 所示.

为了客观评价不同矢量形态学滤波算子对脉冲噪声污染后彩色图像的滤波效果, 下面给出 3 种已经被广泛应用的评估方法, 彩色均方误差 (CMSE) 和彩色峰值信噪比 (CPSNR) 以及归一化色彩误差 (NCD).

$$\text{CMSE} = \frac{1}{3M \times N} \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N \|\mathbf{f}(i, j) - \mathbf{g}(i, j)\|^2, \quad (25)$$

$$\text{CPSNR} = 10 \log_{10} \frac{3 \times M \times N \times 255^2}{\sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N \|\mathbf{f}(i, j) - \mathbf{g}(i, j)\|^2}. \quad (26)$$

归一化色彩误差

$$\text{NCD} = \frac{\sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N \|\mathbf{f}_{L*a*b*}(i, j) - \mathbf{g}_{L*a*b*}(i, j)\|^2}{\sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N \|\mathbf{f}_{L*a*b*}(i, j)\|^2}, \quad (27)$$

其中, $\mathbf{f}$ 是原图像, $\mathbf{g}$ 是滤波后的图像, 图像尺寸为 $M \times N$.

根据式 (25)~(27), 采用多种矢量形态学滤波算子对不同等级椒盐噪声下的 30 幅彩色图像滤波, 实验数据如图 13 所示.

通过图 11 和 13 可以看出, 针对不同等级噪声下不同类型的彩色图像滤波, 本文提出的矢量形态学滤波算子最优, 滤波后图像的 CMSE、NCD 较已有的矢量形态学滤波算子明显降低, CPSNR 提高.

为了进一步表明本文提出的基于四元数表达的模糊矢量形态学算子的优越性, 给出了不同矢量排序算法下的彩色图像分割结果对比, 如图 12 所示 (矢量滤波算子为 $\tilde{\varphi}_b \tilde{\gamma}_b$, 矢量梯度算子为 $\tilde{\rho}_b$, b 是尺

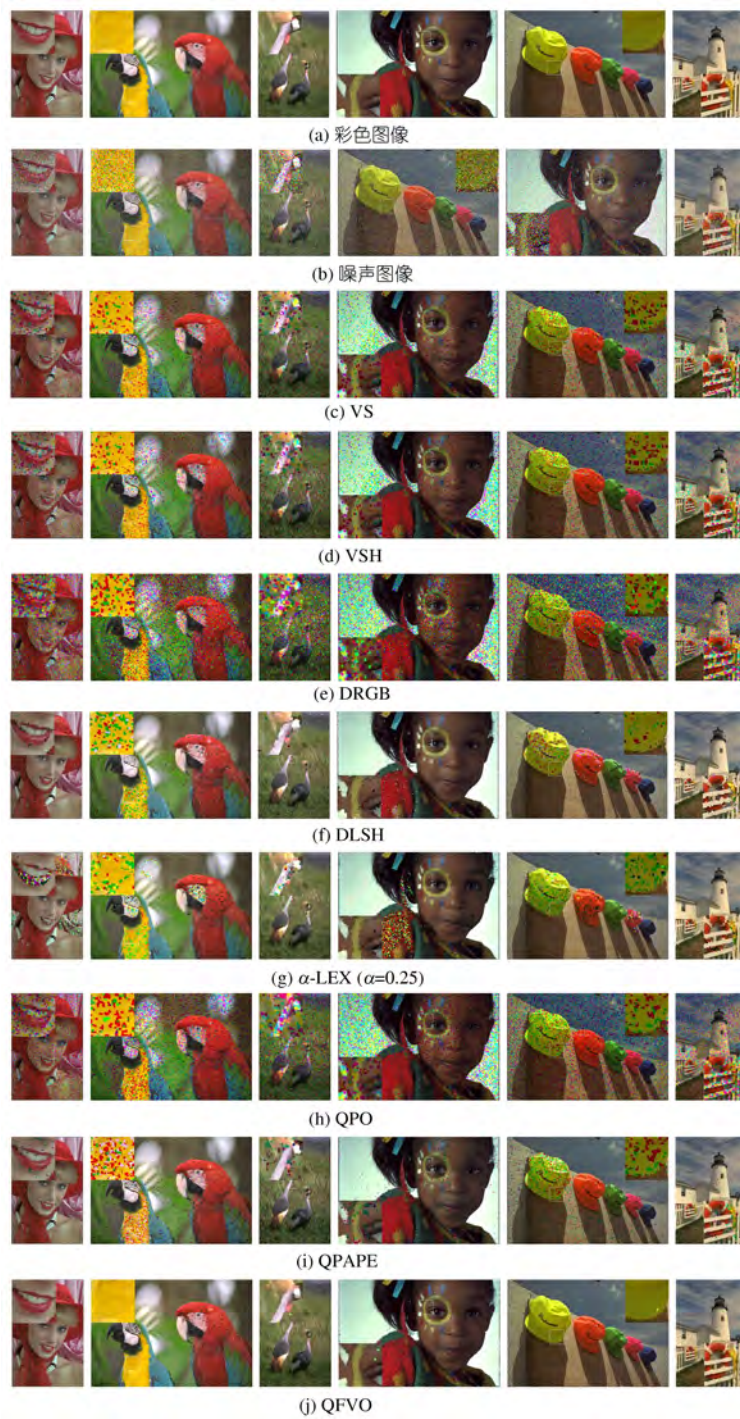


图 11 不同矢量形态学滤波算子对彩色图像的滤波结果

Figure 11 Filtering results using various vector morphological filtering operators for color images corrupted by noise. (a) Original color images; (b) noisy images; (c) VS; (d) VSH; (e) DRGB; (f) DLSH; (g) α -LEX($\alpha = 0.25$); (h) QPO; (i) QPAPE; (j) QFVO

寸为 3×3 的方形结构元素, 分水岭分割采用基于梯度重建的分水岭分割方法).

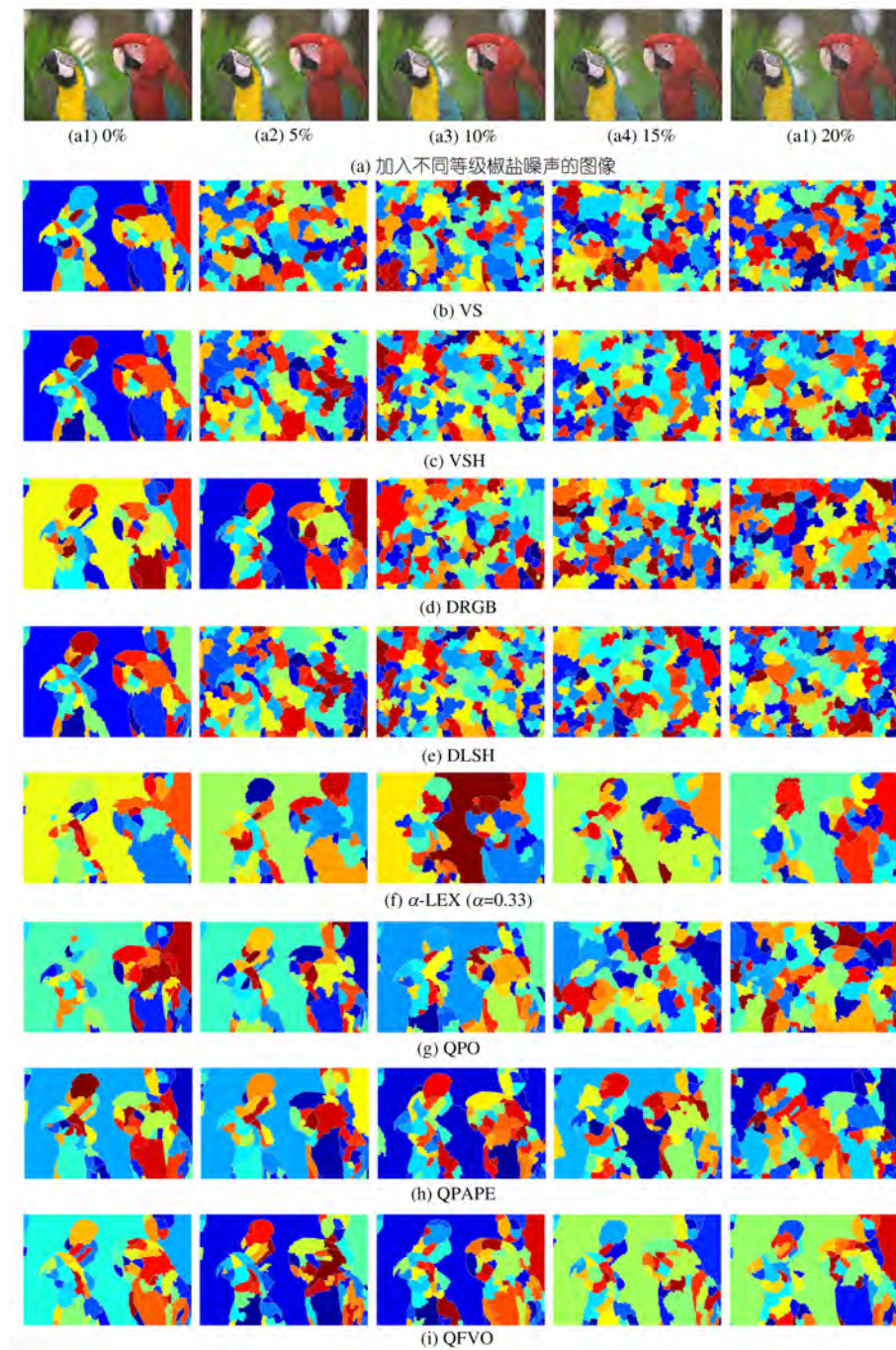


图 12 利用不同算法对不同等级噪声下的彩色图像分割结果 (伪彩色显示结果)

Figure 12 Segmentation results of color images using different algorithms in various level noise(pseudo color). (a) Images added various level peppers and salt noise; (b) VS; (c) VSH; (d) DRGB; (e) DLSH; (f) α -LEX($\alpha=0.33$); (g) QPO; (h) QPAPE; (i) QFVO

由图 12 可以看出, 对不同等级噪声下的彩色图像进行分水岭分割, 当图像较为理想 (无噪声) 时, 在 VS, VSH, DRGB, DLSH, α -LEX, QPO, QPAPE 以及 QFVO 算法下的分水岭分割均具有较好的分

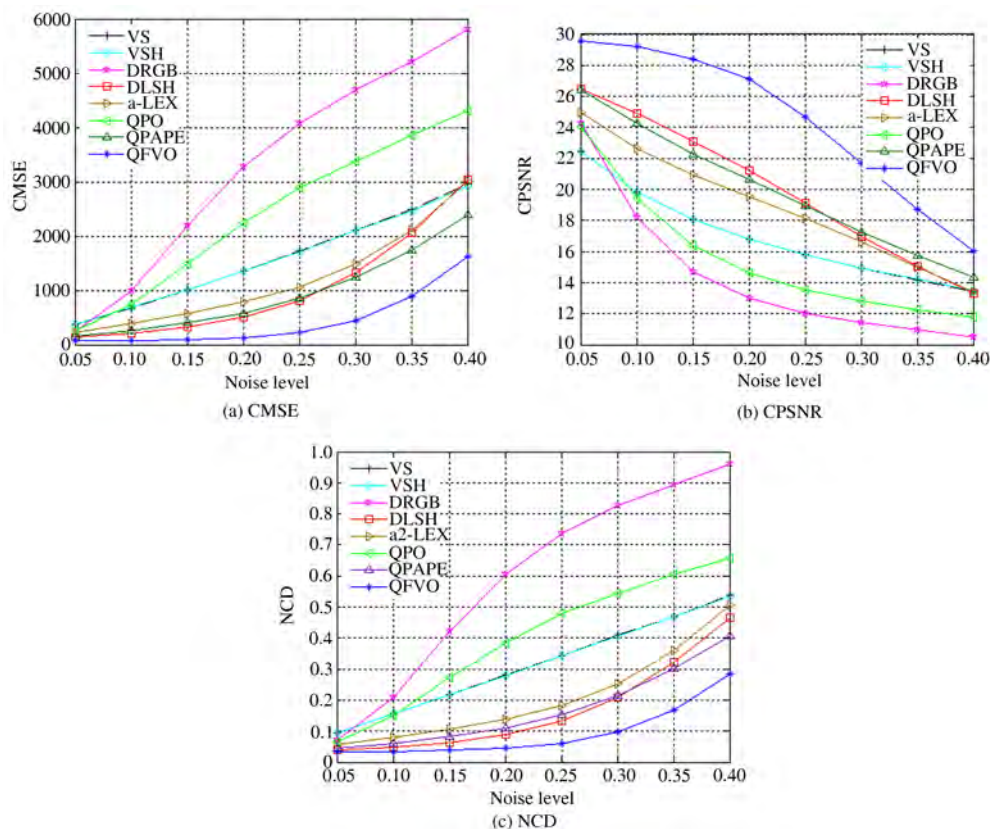


图 13 采用不同矢量形态学滤波算子对噪声图像滤波后的 CMSE, CPSNR 和 NCD 比较

Figure 13 Comparison of CMSE, CPSNR and NCD of various vector morphological filtering operators for color images. (a) CMSE; (b) CPSNR; (c) NCD

割结果. 随着图像质量的逐渐降低 (噪声等级的增大), 基于现有算法 (QFVO 除外) 的分水岭分割效果均逐渐变差. 从图 12(i) 可以看出, 在 QFVO 算法下的分水岭分割不随图像质量的降低而分割效果变差, 显然基于 QFVO 的分水岭分割对彩色图像分割不仅精度准确, 且输出稳定, 进一步表明了 QFVO 算法在定义矢量形态学算子方面的优势.

6 结论

本文针对现有的矢量排序规则在形态学彩色图像处理中面临的问题, 分析了多种彩色空间下的矢量排序规则的优缺点, 结合四元数对彩色图像表达的优点, 指出了现有词典编纂顺序中彩色分量的选择问题和等级排序问题, 并提出了一类基于四元数表达的模糊矢量排序规则. 该排序规则解决了经典矢量排序规则中彩色分量选择难、等级判定难以深层进入的问题, 从而实现了彩色像素的正确排序. 在新的模糊矢量排序规则下, 定义了模糊矢量形态学腐蚀、膨胀算子以及常用的组合算子, 将灰度形态学算法直接拓展到彩色图像去噪、分割中. 其处理效果明显优于经典的矢量形态学算子. 实验结果表明, 新的模糊矢量形态学算子在彩色图像处理中具有较好的鲁棒性和实用性, 且处理后的图像具有较高的 CPSNR 和较低的 CMSE 和 NCD.

致谢 感谢加州大学伯克利分校计算机视觉实验室 (Benchmark dataset) 和 Kodak 公司提供的彩

色测试图像.

参考文献

- 1 Angulo J. Geometric algebra colour image representations and derived total orderings for morphological operators - part I: colour quaternions. *J Vis Commun Image Represent*, 2010, 21: 33–48
- 2 Witte V D, Schulte S, Nachtegaal M, et al. Vector morphological operators for colour images. *Lect Notes Comput Sci*, 2005, 3656: 667–675
- 3 Goutsias J, Heijmans H J A M, Sivakumar K. Morphological operators for image sequences. *Comput Vis Image Underst*, 1995, 62: 326–346
- 4 Aptoula E, Lefèvre S. On the morphological processing of hue. *Image Vis Comput*, 2009, 27: 1394–1401
- 5 Peters II R A. Mathematical morphology for angle-valued images. In: Dougherty E R, Astola J T, eds. *Proceeding of the SPIE*, San Jose, 1997. 84–94
- 6 Hanbury A, Serra J. Morphological operators on the unit circle. *IEEE Trans Image Process*, 2001, 10: 1842–1850
- 7 Luengo-Oraz M A, Faure E, Angulo J. Robust iris segmentation on uncalibrated noisy images using mathematical morphology. *Image Vis Comput*, 2010, 28: 278–284
- 8 Luengo-Oraz M A, Angulo J. Cyclic mathematical morphology in polar-logarithmic representation. *IEEE Trans Image Process*, 2009, 18: 1090–1096
- 9 Hanbury A, Serra J. Mathematical morphology in the HLS colour space. In: Cootes T, Taylor C, eds. *Proceedings of the 12th British Machine Vision Conference*, Manchester, 2001. 451–460
- 10 Hanbury A, Serra J. Mathematical morphology in the CIELAB space. *Image Anal Stereol*, 2002, 21: 201–206
- 11 Vardavolia M I, Andreadis I, Tsalides P. Vector ordering and morphological operations for colour image processing: Fundamentals and applications. *Pattern Anal Appl*, 2002, 5: 271–287
- 12 Louverdis G, Vardavoulia M I, Andreadis I, et al. A new approach to morphological color image processing. *Pattern Recognit*, 2002, 35: 1733–1741
- 13 Weber K R, Acton S T. On connected filters in color image processing. *J Electron Imaging*, 2004, 13: 619–629
- 14 Lukac R, Smolka B, Martin K, et al. Vector filtering for color imaging. *IEEE Signal Process Mag*, 2005, 22: 74–86
- 15 Lukac R, Smolka B, Plataniotis K N, et al. Vector sigma filters for noise detection and removal in color images. *J Vis Commun Image Represent*, 2006, 17: 1–26
- 16 Celebi M E. Distance measures for reduced ordering-based vector filters. *IET Image Process*, 2009, 3: 249–260
- 17 Brito-Loeza C C K. On high-order denoising models fast algorithms for vector-valued images. *IEEE Trans Image Process*, 2010, 19: 1518–1527
- 18 Al-Otun H M. Morphological operators for color image processing based on Mahalanobis distance measure. *Opt Eng*, 2003, 42: 2595–2606
- 19 Angulo J. Unified morphological color processing framework in a lum/sat/hue representation. In: *Proceeding of International Symposium on Mathematical Morphology*, Kluwer, 2005. 387–396
- 20 Plaza A, Martinez P, Perez R, et al. Spatial/spectral endmember extraction by multidimensional morphological operators. *IEEE Trans Geosci Remote Sens*, 2002, 40: 2205–2041
- 21 Angulo J. Morphological colour operators in totally ordered lattices based on distance: Application to image filtering, enhancement and analysis. *Comput Vis Image Underst*, 2007, 107: 56–73
- 22 Aptoula E, Lefèvre S. A comparative study on multivariate mathematical morphology. *Pattern Recognit*, 2007, 40: 2914–2929
- 23 Aptoula E, Lefèvre S. On lexicographical ordering in multivariate mathematical morphology. *Pattern Recognit Lett*, 2008, 29: 109–118
- 24 Aptoula E, Lefèvre S. α -Trimmed lexicographical extrema for pseudo-morphological image analysis. *J Vis Commun Image Represent*, 2008, 19: 165–174
- 25 Aptoula E, Lefèvre S, Ronse C. A hit-or-miss transform for multivariate images. *Pattern Recognit Lett*, 2009, 30: 760–764
- 26 Sangwine S J. Fourier transforms of colour image using quaternion or hypercomplex. *Electron Lett*, 1998, 34: 969–971

- 27 Sangwine S J. Colour image edge detector based on quaternion convolution. *Electron Lett*, 1998, 34: 969–971
- 28 Pei S C, Chang J H, Ding J J. Quaternion matrix singular valued decomposition and its application for color image processing. In: *International Conference on Image Processing, Barcelona, 2003*. 805–808
- 29 Bihan N L, Sangwine S J. Quaternion principal component analysis of color images. In: *International Conference on Image Processing, Barcelona, 2003*. 809–812
- 30 Eduardo B C. The theory and use of the quaternion wavelet transform. *J Math Imaging Vis*, 2006, 24: 19–35
- 31 Shi L L, Funt B. Quaternion color texture segmentation. *Comput Vis Image Underst*, 2007, 107: 88–96
- 32 Gao C B, Zhou J L, Hu J R, et al. Edge detection of colour image based on quaternion fractional differential. *IET Image Process*, 2011, 5: 261–272
- 33 Guo L Q, Zhu M. Quaternion Fourier-Mellin moments for color images. *Pattern Recognit*, 2011, 44: 187–195
- 34 Subakan N, Vemuri B C. A quaternion framework for color image smoothing and segmentation. *Int J Comput Vision*, 2011, 91: 233–250
- 35 Jin L H, Liu H, Xu X Y, et al. Color impulsive noise removal based on quaternion representation and directional vector order-statistics. *Signal Process*, 2011, 91: 1249–1261
- 36 Chen B J, Shu H Z, Zhang H, et al. Color image analysis by quaternion Zernike moments. In: *20th International Conference on Pattern Recognition (ICPR), Istanbul, 2010*. 625–628
- 37 Souyris J C, Tison C. Polarimetric analysis of bistatic SAR images from polar decomposition: A quaternion approach. *IEEE Trans Geosci Remote Sensing*, 2007, 45: 2701–2713
- 38 Angulo J. Hypercomplex mathematical morphology. *J Math Imaging Vis*, 2011, 41: 86–108
- 39 Lei T, Fan Y Y. Noise gradient reduction using dual morphological operators. *IET Image Process*, 2011, 5: 1–17
- 40 Lei T, Fan Y Y. Vector morphological operators in HSV color space. *Sci China Inf Sci*, 2013, 56: 012303:1–012303:12

Fuzzy vector morphological operators based on quaternion representation

LEI Tao^{1,2*}, FAN YangYu¹ & WANG Yi¹

1 *School of Electronic and Information Engineering, Lanzhou Jiaotong University, Lanzhou 730070, China;*

2 *School of Electronics and Information, Northwestern Polytechnical University, Xi'an 710129, China*

*E-mail: leitaoly@163.com

Abstract Classical morphological operators cannot be extended directly to color image processing. Therefore, fuzzy vector morphological operators based on a quaternion representation are proposed in this paper. Using a quaternion polar expression combined with its decomposition characteristics, the modulus, the vertical component of the vector and the angular information of a color image are extracted, and they are used to construct the three components for lexicographical ordering. On one hand, the novel three-color components remove the correlation between the multi-channels data; on the other hand, the three components are ranked in the lexicographical ordering facility. Fuzzy mathematics is therefore introduced to solve the problem where the computation cannot be performed at deeper levels. Unlike the existing vector ordering, the new vector ordering takes the role of each component into account, and the computation arrives at the last layer of the lexicographical ordering. Based on a novel vector ordering rule, some new vector morphological operators are defined, and they are applied to color image filtering and segmentation. Experimental results show that, when compared to the existing vector morphological operators, the new vector morphological operators can smooth the image noise while preserving the image detail, and color images can therefore be segmented correctly with high robustness and practicality.

Keywords quaternion, fuzzy vector morphological operators, vector ordering, lexicographical ordering, robustness



LEI Tao was born in 1981. He received his Ph.D. degree in information and communication engineering from the Northwestern Polytechnical University, Xi'an, in 2011. Currently, he is an Associate Professor at Lanzhou Jiaotong University. His research interests include image processing, pattern recognition and computer vision. Dr. Lei is a member of CCF and CSS.



FAN YangYu was born in 1960. He received his Ph.D. degree in underwater acoustic signal processing from the Northwestern Polytechnical University, Xi'an, in 1999. Currently, he is a Professor at Northwestern Polytechnical University. His research interests include signal processing, optical communications, image processing and virtual reality.



WANG Yi was born in 1979. He received his Ph.D. degree in signal and information processing from the Northwestern Polytechnical University, Xi'an, in 2007. Currently, he is an Associate Professor at Northwestern Polytechnical University. His research interests include image processing, artificial intelligence and virtual reality.