拟一维等熵 Euler 流的小 Mach 数极限

献给陈恕行教授 80 华诞

匡杰¹, 张永前^{2*}

1. 中国科学院武汉物理与数学研究所, 中国科学院精密测量科学与技术创新研究院, 武汉 430071;

2. 复旦大学数学科学学院, 上海 200433

E-mail: jkuang@wipm.ac.cn, yongqianz@fudan.edu.cn

收稿日期: 2020-07-29; 接受日期: 2020-09-22; 网络出版日期: 2020-12-24; * 通信作者

国家自然科学基金 (批准号: 11801549, 11971024, 11421061 和 11121101) 资助项目

摘要 本文在 $BV \cap L^1$ 框架下研究拟一维等熵 Euler 管道流初值问题解的小 Mach 数极限. 在初始值全变差有界且远离真空以及 Mach 数和管道截面全变差充分小的假设下, 通过解的 L^1 -稳定性和标准 Riemann 半群方法的应用, 本文严格证明拟一维等熵 Euler 管道流初值问题的熵解可以按照小 Mach 数展开且其系数满足一带源项的线性声波方程组.

关键词 拟一维等熵 Euler 流 小 Mach 数极限 弱解 标准 Riemann 半群

MSC (2020) 主题分类 35B07, 35B20, 35D30, 76J20

1 引言

在 Euler 坐标系下, 拟一维等熵 Euler 方程组写成如下形式:

$$\begin{cases} \partial_{\tilde{t}} \tilde{\rho} + \partial_{\tilde{x}}(\tilde{\rho} \tilde{u}) = -\frac{a'(\tilde{x})}{a(\tilde{x})} \tilde{\rho} \tilde{u}, \\ \partial_{\tilde{t}}(\tilde{\rho} \tilde{u}) + \partial_{\tilde{x}}(\tilde{\rho} \tilde{u}^2 + \tilde{\rho} \tilde{\gamma}) = -\frac{a'(\tilde{x})}{a(\tilde{x})} \tilde{\rho} \tilde{u}^2, \end{cases} \quad (1.1)$$

其中 $\tilde{t} > 0$ 和 $\tilde{x} \in \mathbb{R}$ 分别表示时间和空间变量, $\tilde{\rho}$ 表示流体的密度, 而 $\tilde{u}$ 表示流体的速度, $\gamma > 1$ 为绝热指数. 此外, $a(\tilde{x})$ 表示管道截面的面积.

本文主要目标是研究方程组 (1.1) 的小 Mach 数极限. 为此, 首先推导出方程组 (1.1) 含 Mach 数的形式, 它是通过对方程中各物理量作相应的无量纲变换所得到的 (参见文献 [1]). 具体而言, 令

$$t = |u_m| \tilde{t}, \quad x = \tilde{x}, \quad \rho = \frac{\tilde{\rho}}{\rho_m}, \quad u = \frac{\tilde{u}}{|u_m|}, \quad M = \frac{|u_m|}{\sqrt{\gamma \rho_m^{\gamma-1}}}, \quad (1.2)$$

英文引用格式: Kuang J, Zhang Y Q. Low Mach number limit for quasi-one-dimensional isentropic Euler flow (in Chinese). Sci Sin Math, 2021, 51: 937–956, doi: 10.1360/SSM-2020-0237

其中 $\rho_m = \max_{\tilde{x} \in \mathbb{R}}(\tilde{\rho}(\tilde{x}, 0))$, $|u_m| = \max_{\tilde{x} \in \mathbb{R}}|\tilde{u}(\tilde{x}, 0)|$, M 代表 Mach 数. 将变换 (1.2) 代入方程组 (1.1), 可以推出如下含 Mach 数形式的拟一维 Euler 方程组:

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \partial_x(\rho u) = -\frac{a'(x)}{a(x)} \rho u, \\ \partial_t(\rho u) + \partial_x\left(\rho u^2 + \frac{\rho^\gamma}{\gamma M^2}\right) = -\frac{a'(x)}{a(x)} \rho u^2. \end{cases} \quad (1.3)$$

本文考虑方程组 (1.3) 满足如下形式初值的解:

$$\rho_0(x) = \rho^{(0)} + \rho_2^{(0)}(x)M^2, \quad u_0(x) = u_1^{(0)}(x)M, \quad (1.4)$$

其中 $\rho^{(0)} > 0$ 是常数. 我们将初值问题 (1.3) 和 (1.4) 的解记为 $(\rho^M, u^M)(x, t)$. 根据文献 [1, 2] 等在形式上的分析, 当 Mach 数 M 充分小时, 可以将 $(\rho^M, u^M)(x, t)$ 关于 Mach 数展开成如下渐近形式:

$$\rho^M(x, t) = \rho^{(0)} + \rho_2^M(x, t)M^2 + O(1)M^3, \quad u^M(x, t) = u_1^M(x, t)M + O(1)M^2, \quad (1.5)$$

其中 $(\rho_2^M, u_1^M)(x, t)$ 为下面带源项的线性声波方程组初值问题的解, 即

$$\begin{cases} \partial_t \rho_2 + \frac{\rho^{(0)}}{M} \partial_x u_1 = -\frac{a'(x)}{a(x)} \frac{\rho^{(0)}}{M} u_1, \\ \partial_t u_1 + \frac{(c^{(0)})^2}{\gamma \rho^{(0)} M} \partial_x \rho_2 = 0, \end{cases} \quad (1.6)$$

以及

$$(\rho_2, u_1)(x, 0) = (\rho_2^{(0)}, u_1^{(0)})(x), \quad (1.7)$$

这里 $c^{(0)}$ 定义为

$$c^{(0)} = \sqrt{\gamma(\rho^{(0)})^{\gamma-1}}. \quad (1.8)$$

本文的主要目的是给出 (1.5) 的严格证明. 在随后的讨论中, 我们作以下两个基本假设:

(H₁) $a(x) \in C^2(\mathbb{R})$ 且 $\inf_{x \in \mathbb{R}} a(x) > 0$ 以及 $\sup_{x \in \mathbb{R}} |a'(x)| < \infty$;

(H₂) $(\rho_2^{(0)}, u_1^{(0)})(x) \in (BV \cap L^1)(\mathbb{R}; \mathbb{R}^2)$.

定理 1.1 在 (H₁) 和 (H₂) 的假设条件下, 存在两个正常数 M_0 和 δ_0 使得当 $M \in (0, M_0)$ 和 $\text{T.V.}(a) < \delta_0$ 时, 初值问题 (1.3) 和 (1.4) 存在唯一的由波前跟踪格式所构造的熵弱解 (ρ^M, u^M) , 且成立

$$\|\rho^M(\cdot, t) - \rho^{(0)} - \rho_2^M(\cdot, t)M^2\|_{L^1(\mathbb{R})} = O(1)(\text{T.V.}\{(\rho_2^{(0)}, u_1^{(0)})\} + \text{T.V.}(a))tM^3 \quad (1.9)$$

和

$$\|u^M(\cdot, t) - u_1^M(\cdot, t)M\|_{L^1(\mathbb{R})} = O(1)(\text{T.V.}\{(\rho_2^{(0)}, u_1^{(0)})\} + \text{T.V.}(a))tM^2, \quad (1.10)$$

其中 (ρ_2^M, u_1^M) 是初值问题 (1.6) 和 (1.7) 唯一的弱解, $O(1)$ 的界不依赖于 M 和 t .

可压缩流的小 Mach 数极限问题是偏微分方程的重要研究问题. 关于此问题, Majda、Klainerman、Métivier 和 Schochet 等研究了高维可压缩 Euler 方程光滑解情形的小 Mach 数, 即当 Mach 数 $M \rightarrow 0$ 时, 建立可压缩流与不可压缩流之间的流动极限, 具体可参见文献 [1–10] 以及其中引用的文献. 另一方面, Chen 等 [2] 通过利用 Bressan [11] 等建立的标准 Riemann 半群方法严格验证了一维非等熵的可压缩 Euler 流初值问题 BV 弱解可以关于小 Mach 数展开并且系数是由声波方程来确定的.

本文主要研究拟一维等熵 Euler 流初值问题在 $BV \cap L^1$ 框架下的小 Mach 数极限. 该方程是对高维可压缩 Euler 方程的进一步简化. 关于该模型的研究, 可以进一步参见文献 [12–15]. 为了验证 (1.9) 和 (1.10), 我们的思路仍然是采用构造标准 Riemann 半群并通过该半群来比较 Riemann 问题解. 然而, 与文献 [2] 所研究的问题不同, (1.3) 和 (1.4) 的方程是带有几何源项的非齐次形式. 因此, 我们利用文献 [12, 13, 16] 中的构造零波的方法建立相应的标准 Riemann 半群, 然后分别比较齐次 Riemann 问题的解和由零波产生的 h -Riemann 解. 最后再利用解的 L^1 稳定性及其唯一性得到该问题解的小 Mach 数展开式且其系数满足一带源项的线性声波方程.

本文余下部分的结构安排如下: 第 2 节主要研究方程组 (1.3) 的齐次 Riemann 问题的解和 h -Riemann 解的存在性. 在此基础上, 第 3 节研究建立方程组 (1.3) 初值问题解的 L^1 稳定性及其 Lipschitz 半群的性质以及方程组 (1.6) 初值问题解的存在性, 并得到两个方程 Riemann 问题解之间的 L^1 估计. 最后, 第 4 节利用第 3 节中 Lipschitz 半群的性质及半群公式得到初值问题 (1.3) 和 (1.4) 近似解和 Mach 数形式展开解之间的 L^1 估计, 并利用解存在唯一性从而完成定理 1.1 的证明.

2 方程组 (1.3) 和 (1.6) 的 Riemann 问题和 h -Riemann 解

本节分别研究方程组 (1.3) 和 (1.6) 的齐次 Riemann 问题和 h -Riemann 解. 为此, 将方程组 (1.3) 简写成

$$\partial_t W^M(U) + \partial_x F^M(U) = B(x)G^M(U), \quad B(x) = -\frac{a'(x)}{a(x)}, \quad (2.1)$$

其中 $U = (\rho, u)^\top$, $W^M(U) = (\rho, \rho u)^\top$, $F^M(U) = (\rho u, \rho u^2 + \frac{\rho^\gamma}{\gamma M^2})^\top$, $G^M(U) = (\rho u, \rho u^2)^\top$.

2.1 齐次方程 Riemann 问题的解

考虑两类齐次方程组, 其中第一类齐次方程组即 Euler 方程组

$$\partial_t W^M(U) + \partial_x F^M(U) = 0. \quad (2.2)$$

这个方程组有两个实特征值, 分别为

$$\lambda_1^M = u - \frac{c}{\sqrt{\gamma}M}, \quad \lambda_2^M = u + \frac{c}{\sqrt{\gamma}M}, \quad (2.3)$$

其相应的特征向量是

$$r_1^M = \left(-\rho, \frac{c}{\sqrt{\gamma}M} \right), \quad r_2^M = \left(\rho, \frac{c}{\sqrt{\gamma}M} \right), \quad (2.4)$$

其中 $c = \sqrt{\gamma \rho^{\gamma-1}}$.

当 $\rho > 0$ 时, (2.2) 是严格双曲型方程. 进一步直接计算可得到

$$\nabla_U \lambda_1^M \cdot r_1^M = \nabla_U \lambda_2^M \cdot r_2^M = \frac{(\gamma-1)c}{2\sqrt{\gamma}M} > 0, \quad (2.5)$$

这说明方程组 (2.2) 的两族特征也是真正非线性的. 利用文献 [17], 我们给出方程组 (2.2) 基本波曲线的参数形式, 即对任意的 $U_l = (\rho_l, u_l)^\top$, $U = (\rho, u)^\top \in \mathbb{R}_+^1 \times \mathbb{R}^1$, 过点 U_l 和 U 的两族基本波曲线表示形式列举如下:

(1) 第一族波曲线为

$$U = \Phi_1^M(\alpha; U_l) := \left(\rho e^{-\alpha}, u_l + \frac{c_l}{\sqrt{\gamma}M} \varphi_1(\alpha) \right)^\top; \quad (2.6)$$

(2) 第二族波曲线为

$$U = \Phi_2^M(\alpha; U_l) := \left(\rho_l e^\alpha, u_l + \frac{c_l}{\sqrt{\gamma}M} \varphi_2(\alpha) \right)^\top, \quad (2.7)$$

其中

$$\varphi_1(\alpha) = \begin{cases} \frac{2}{\gamma-1}(1 - e^{-\frac{\gamma-1}{2}\alpha}), & \alpha \geq 0, \\ -\sqrt{\frac{(e^{-\gamma\alpha}-1)(e^{-\alpha}-1)}{\gamma e^{-\alpha}}}, & \alpha < 0, \end{cases} \quad \varphi_2(\alpha) = \begin{cases} \frac{2}{\gamma-1}(e^{\frac{\gamma-1}{2}\alpha} - 1), & \alpha \geq 0, \\ -\sqrt{\frac{(e^{\gamma\alpha}-1)(e^\alpha-1)}{\gamma e^\alpha}}, & \alpha < 0. \end{cases} \quad (2.8)$$

利用 (2.8), 直接计算表明:

引理 2.1 函数 $\varphi_k \in C^2(\mathbb{R})$, $\varphi'_k(\alpha) > 0$ ($\alpha \in \mathbb{R}$), 且 $\varphi_k(0) = 0$, $\varphi'_k(0) = 1$ 而 $\varphi_1''(0) = -\varphi_2''(0) = -\frac{\gamma-1}{2}$, 其中 $k = 1, 2$.

第二类齐次方程组即齐次线性声波方程

$$\begin{cases} \partial_t \rho_2 + \frac{\rho^{(0)}}{M} \partial_x u_1 = 0, \\ \partial_t u_1 + \frac{(c^{(0)})^2}{\gamma \rho^{(0)} M} \partial_x \rho_2 = 0. \end{cases} \quad (2.9)$$

该方程组是严格双曲的一阶线性偏微分方程组, 其特征值为

$$\lambda_1 = -\frac{c^{(0)}}{\sqrt{\gamma}M}, \quad \lambda_2 = \frac{c^{(0)}}{\sqrt{\gamma}M}. \quad (2.10)$$

应用特征线的方法, 方程组 (2.9) 满足初值 (1.7) 的解可以直接写成如下形式:

$$\begin{aligned} \rho_2^M(x, t) &= \frac{1}{2} \left(\rho_2^{(0)} \left(x + \frac{c^{(0)}}{\sqrt{\gamma}M} t \right) + \rho_2^{(0)} \left(x - \frac{c^{(0)}}{\sqrt{\gamma}M} t \right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{\rho^{(0)}}{c^{(0)}} \left(u_1^{(0)} \left(x + \frac{c^{(0)}}{\sqrt{\gamma}M} t \right) + u_1^{(0)} \left(x - \frac{c^{(0)}}{\sqrt{\gamma}M} t \right) \right) \right), \\ u_1^M(x, t) &= \frac{1}{2} \left(u_1^{(0)} \left(x + \frac{c^{(0)}}{\sqrt{\gamma}M} t \right) - u_1^{(0)} \left(x - \frac{c^{(0)}}{\sqrt{\gamma}M} t \right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{c^{(0)}}{\rho^{(0)}} \left(\rho_2^{(0)} \left(x + \frac{c^{(0)}}{\sqrt{\gamma}M} t \right) - \rho_2^{(0)} \left(x - \frac{c^{(0)}}{\sqrt{\gamma}M} t \right) \right) \right). \end{aligned} \quad (2.11)$$

显然, 方程组 (2.9) 的弱解 $(\rho_2^M, u_1^M)(x, t)$ 的间断沿着这两族特征传播并且利用 (2.11) 可以证明如下结论:

引理 2.2 给定 $\bar{t} > 0$ 以及两组满足 $\rho_{2l} > 0$ 和 $\rho_{2r} > 0$ 的常状态 (ρ_{2l}, u_{1l}) 和 (ρ_{2r}, u_{1r}) . 令

$$(\rho_{2*}, u_{1*})(x, \bar{t}) = \begin{cases} (\rho_{2l}, u_{1l})^\top, & x < \bar{x}, \\ (\rho_{2r}, u_{1r})^\top, & x > \bar{x}, \end{cases} \quad (2.12)$$

且记 $[\rho_{2*}] = \rho_{2r} - \rho_{2l}$ 和 $[u_{1*}] = u_{1r} - u_{1l}$, 则有下列结论:

(1) $c^{(0)}[\rho_{2*}] = -\rho^{(0)}[u_{2*}]$ 成立当且仅当

$$U_{1*}^M(x, t) = \begin{cases} (\rho_{2l}, u_{1l})^\top, & x < \bar{x} - \frac{c^{(0)}}{\sqrt{\gamma}M}(t - \bar{t}), \\ (\rho_{2r}, u_{1r})^\top, & x > \bar{x} - \frac{c^{(0)}}{\sqrt{\gamma}M}(t - \bar{t}) \end{cases} \quad (2.13)$$

是方程组 (2.9) 以 $U_{1*}^M(x, \bar{t}) = (\rho_{2*}, u_{1*})$ 为初值的解;

(2) $c^{(0)}[\rho_{2*}] = \rho^{(0)}[u_{2*}]$ 成立当且仅当

$$U_{2*}^M(x, t) = \begin{cases} (\rho_{2l}, u_{1l})^\top, & x < \bar{x} + \frac{c^{(0)}}{\sqrt{\gamma}M}(t - \bar{t}), \\ (\rho_{2r}, u_{1r})^\top, & x > \bar{x} + \frac{c^{(0)}}{\sqrt{\gamma}M}(t - \bar{t}) \end{cases} \quad (2.14)$$

是方程组 (2.9) 以 $U_{2*}^M(x, \bar{t}) = (\rho_{2*}, u_{1*})$ 为初值的解.

上述结论是文献 [2, 引理 4.2] 的特殊形式, 证明可参见文献 [2].

回到 Euler 方程组 (2.2) 情形. 对任意 $\bar{t} \geq 0$, 考虑其如下 Riemann 问题的解:

$$U(x, \bar{t}) = \begin{cases} U_l = (\rho_l, u_l)^\top, & x < \bar{x}, \\ U_r = (\rho_r, u_r)^\top, & x > \bar{x}, \end{cases} \quad (2.15)$$

其中

$$\rho_l = \rho^{(0)} + \rho_{2l}M^2, \quad u_l = u_{1l}M, \quad (2.16)$$

$$\rho_r = \rho^{(0)} + \rho_{2r}M^2, \quad u_r = u_{1r}M. \quad (2.17)$$

根据 (2.8), Riemann 问题 (2.2) 和 (2.15) 的解可以通过求解下列方程得到:

$$\Phi_2^M(\alpha_2; \Phi_1^M(\alpha_1; U_l)) = U_r. \quad (2.18)$$

利用 (2.16) 和 (2.17), 可将方程 (2.18) 化简为如下等价形式:

$$\begin{cases} \alpha_2 - \alpha_1 = \ln \left(\frac{(\rho_{2r} - \rho_{2l})M^2}{\rho^{(0)} + \rho_{2l}M^2} + 1 \right), \\ \varphi_1(\alpha_1) + e^{-\frac{\gamma-1}{2}\alpha_1} \varphi_2(\alpha_2) = \frac{\sqrt{\gamma}(u_{1r} - u_{1l})M^2}{\sqrt{\gamma(\rho^{(0)} + \rho_{2l}^M M^2)^{\gamma-1}}}. \end{cases} \quad (2.19)$$

其可解性及相关性质如下:

命题 2.1 设 $R > 0$ 并记 $D_R = \{(\rho_2, u_1) \mid |\rho_2| < R, |u_1| < R\}$, 则存在常数 $M'_0 > 0$ 和 $\alpha_0 > 0$, 使得方程 (2.19) 在 $\{|\alpha_1| < \alpha_0, |\alpha_2| < \alpha_0, |M| < M'_0, (\rho_{2l}, u_{1l}) \in \overline{D_R}, (\rho_{2r}, u_{1r}) \in \overline{D_R}\}$ 上存在唯一的光滑解 (α_1, α_2) 且满足:

(1) 若 $c^{(0)}[\rho_{2*}] = -\sqrt{\gamma}\rho^{(0)}[u_{1*}]$, 则

$$\alpha_1 = \frac{\sqrt{\gamma}}{c^{(0)}}[u_{1*}]M^2 + O(1)[u_{1*}]M^4, \quad \alpha_2 = O(1)[u_{1*}]M^4, \quad (2.20)$$

(2) 若 $c^{(0)}[\rho_{2*}] = \sqrt{\gamma}\rho^{(0)}[u_{1*}]$, 则

$$\alpha_1 = O(1)[u_{2*}]M^4, \quad \alpha_2 = \frac{\sqrt{\gamma}}{c^{(0)}}[u_{2*}]M^2 + O(1)[u_{1*}]M^4, \quad (2.21)$$

其中 $[\rho_{2*}]$ 和 $[u_{1*}]$ 由引理 2.2 定义.

证明 记

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_1(\alpha_1, \alpha_2, M^2) &= \alpha_2 - \alpha_1 - \ln \left(\frac{(\rho_{2r} - \rho_{2l})M^2}{\rho^{(0)} + \rho_{2l}M^2} + 1 \right), \\ \mathcal{F}_2(\alpha_1, \alpha_2, M^2) &= \varphi_1(\alpha_1) + e^{-\frac{\gamma-1}{2}\alpha_1}\varphi_2(\alpha_2) - \frac{\sqrt{\gamma}(u_{1r} - u_{1l})M^2}{\sqrt{\gamma(\rho^{(0)} + \rho_{2l}M^2)^{\gamma-1}}}. \end{aligned}$$

求方程组 (2.19) 的解 (α_1, α_2) 等价于求解方程组 $\mathcal{F}_1 = \mathcal{F}_2 = 0$.

注意到

$$\mathcal{F}_1(0, 0, 0) = \mathcal{F}_2(0, 0, 0) = 0,$$

并且利用引理 2.1 可得

$$\det \left(\frac{\partial(\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2)}{\partial(\alpha_1, \alpha_2)} \Big|_{\alpha_1=\alpha_2=0} \right) = -2.$$

因此, 由隐函数定理和 $\overline{D_R}$ 的紧性可知, 存在 $M'_0 > 0$ 使得当 $|M| < M'_0$ 时, $(\rho_{2l}, u_{1l}) \in \overline{D_R}$, $(\rho_{2r}, u_{1r}) \in \overline{D_R}$, 方程组 $\mathcal{F}_1 = \mathcal{F}_2 = 0$ 在 $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ 附近存在唯一的光滑解 (α_1, α_2) .

接着, 我们完成命题的余下部分的证明. 由于 (2) 的证明与 (1) 的证明类似, 故只需证明估计 (2.20) 即可.

首先利用 (1) 中的连接条件并令 $\theta = [u_{1*}]M^2$, 将方程组 (2.19) 写成如下形式:

$$\begin{aligned} \alpha_2 - \alpha_1 &= \ln \left(1 - \frac{\rho^{(0)}\theta}{c^{(0)}(\rho^{(0)} + \rho_{2l}^M M^2)} \right), \\ \varphi_1(\alpha_1) + e^{-\frac{\gamma-1}{2}\alpha_1}\varphi_2(\alpha_2) &= \frac{\theta}{\sqrt{\gamma(\rho^{(0)} + \rho_{2l}^M M^2)^{\gamma-1}}}. \end{aligned} \quad (2.22)$$

再次应用隐函数定理可知, 方程组 (2.22) 在 $\alpha_1 = \alpha_2 = \theta = M = 0$ 附近存在唯一的光滑解 $\alpha_1 = \alpha_1(\theta, M^2)$, $\alpha_2 = \alpha_2(\theta, M^2)$ 且满足 $\alpha_1(0, 0) = \alpha_1(0, M^2) = 0$, $\alpha_2(0, 0) = \alpha_2(0, M^2) = 0$.

进一步, 将 α_1 和 α_2 代入 (2.22), 然后对方程组 (2.22) 两边关于 θ 求导数并令 $\alpha_1 = \alpha_2 = \theta = M = 0$, 利用引理 2.1 可得

$$\frac{\partial \alpha_2}{\partial \theta} \Big|_{\alpha_1=\alpha_2=\theta=M=0} - \frac{\partial \alpha_1}{\partial \theta} \Big|_{\alpha_1=\alpha_2=\theta=M=0} = -\frac{1}{c^{(0)}},$$

$$\frac{\partial \alpha_2}{\partial \theta} \Big|_{\alpha_1=\alpha_2=\theta=M=0} + \frac{\partial \alpha_1}{\partial \theta} \Big|_{\alpha_1=\alpha_2=\theta=M=0} = \frac{1}{c^{(0)}}.$$

由此推出 $\frac{\partial \alpha_1}{\partial \theta} \Big|_{\alpha_1=\alpha_2=\theta=M=0} = \frac{1}{c^{(0)}}$, $\frac{\partial \alpha_2}{\partial \theta} \Big|_{\alpha_1=\alpha_2=\theta=M=0} = 0$.

最后, 利用 α_1 的 Taylor 展开式得

$$\begin{aligned} \alpha_1(\theta, M^2) &= \alpha_1(\theta, 0) + \alpha_1(0, M^2) - \alpha(0, 0) + O(1)\theta M^2 \\ &= \frac{\partial \alpha_1}{\partial \theta} \Big|_{\alpha_1=\alpha_2=\theta=M=0} \theta + O(1)(\theta^2 + \theta M^2) \\ &= \frac{1}{c^{(0)}}\theta + O(1)(\theta^2 + \theta M^2). \end{aligned}$$

将 $\theta = [u_{1*}]M^2$ 代入上式即可得 α_1 的估计. 同样地, 利用 $\frac{\partial \alpha_2}{\partial \theta} \Big|_{\alpha_1=\alpha_2=\theta=M=0} = 0$, 可以得到 α_2 的估计. 命题证毕. $\square$

2.2 非齐次方程的 h -Riemann 解

本小节考虑带有源项的两个方程组 (1.3) 和 (1.6) 的 Riemann 问题及其近似解. 首先是含源项的 Euler 方程组 Riemann 问题.

由 (H_2) 的假设知, 当 M 充分小时,

$$\frac{\partial F^M(U)}{\partial U} \Big|_{U=(\rho^{(0)}, 0)} = -\frac{\rho^{(0)}(c^{(0)})^2}{M^2} \neq 0. \quad (2.23)$$

于是, 当 M 充分小时, 映射 $U \mapsto F^M(U)$ 在 $U = (\rho^{(0)}, 0)$ 附近可逆. 按照文献 [16] 的做法, 对充分小的 $h > 0$, 定义映射

$$\Phi_h^M(x_0; U) = (F^M)^{-1} \left(F^M(U) + \int_0^h B(x_0 + s) ds G^M(U) \right), \quad \forall x_0 \in \mathbb{R},$$

并由此定义 (1.3) 的一类近似解, 即 h -Riemann 解.

定义 2.1 给定充分小的 $h > 0$, 对任意的 $x_0 \in \mathbb{R}$, $\bar{t} > 0$, 若 $U(x, t)$ 定义在 $\{t > \bar{t}\}$ 上且满足如下条件 (1)–(3), 则称 $U(x, t)$ 是方程组 (2.1) 的 h -Riemann 解.

(1)

$$U(x, \bar{t}) = \begin{cases} U_l = (\rho_l, u_l)^\top, & x < x_0, \\ U_r = (\rho_r, u_r)^\top, & x > x_0; \end{cases} \quad (2.24)$$

(2) 存在常状态 U_{m1} 和 U_{m2} , 使得当 $t > \bar{t}$ 时, $U(x_0 - 0, t) = U_{m1}$, $U(x_0 + 0, t) = U_{m2}$ 且 $U_{m2} = \Phi_h^M(x_0; U_{m1})$;

(3) 在 $\{x > x_0, t > \bar{t}\}$ 和 $\{x < x_0, t > \bar{t}\}$ 中, $U(x, t)$ 由从 $(x_0, \bar{t})$ 发出的间断及常状态构成, 其中在 $\{x > x_0, t > \bar{t}\}$ 和 $\{x < x_0, t > \bar{t}\}$ 中, 这些间断及常状态分别构成 U_{m2} 与 U_r 相连接的 (2.2) 的基本波及 U_l 与 U_{m1} 相连接的 (2.2) 的基本波. 这里,

$$\begin{cases} U_{m1} = (\rho_{m1}, u_{m1})^\top, & x < x_0, \\ U_{m2} = (\rho_{m2}, u_{m2})^\top, & x > x_0 \end{cases}$$

称为方程组 (2.1) 的零波.

对于带源项的线性声波方程 (1.6), 同样可以定义映射

$$\phi_h^M(x_0; \rho_2, u_1) = \left(\rho_2, u_1 \left(1 + \int_0^h B(x_0 + s) ds \right) \right), \quad \forall x_0 \in \mathbb{R}, \quad (2.25)$$

并且仿照文献 [16] 中的做法, 我们同样可以引入 h -Riemann 解的定义和零波.

定义 2.2 给定充分小的 $h > 0$, 对任意的 $x_0 \in \mathbb{R}$, 若 $(\rho_2, u_1)(x, t)$ 定义在 $\{t > \bar{t}\}$ 上且满足如下条件 (1)–(3), 则称 $(\rho_2, u_1)(x, t)$ 是方程组 (1.6) 的 h -Riemann 解.

(1)

$$(\rho_2, u_1)(x, \bar{t}) = \begin{cases} (\rho_{2l}, u_{1l}), & x < x_0, \\ (\rho_{2r}, u_{1r}), & x > x_0; \end{cases} \quad (2.26)$$

(2) 存在常状态 (ρ_{2m1}, u_{1m1}) 和 (ρ_{2m2}, u_{1m2}) 使得 $(\rho_2, u_1)(x_0-, \bar{t}) = (\rho_{2m1}, u_{1m1})$, $(\rho_2, u_1)(x_0+, \bar{t}) = (\rho_{2m2}, u_{1m2})$ 且满足 $(\rho_{2m2}, u_{1m2}) = \phi_h^M(x_0; \rho_{2m1}, u_{1m1})$;

(3) 在 $\{x > x_0, t > \bar{t}\}$ 和 $\{x < x_0, t > \bar{t}\}$ 中, $(\rho_2, u_1)(x, t)$ 由从 $(x_0, \bar{t})$ 发出的间断及常状态构成, 其中, 在 $\{x > x_0, t > \bar{t}\}$ 和 $\{x < x_0, t > \bar{t}\}$ 中, (ρ_{2l}, u_{1l}) 与 (ρ_{2m1}, u_{1m1}) 通过齐次线性声波方程组 (2.9) 的第一特征间断波相连接, (ρ_{2m2}, u_{1m2}) 与 (ρ_{2r}, u_{1r}) 通过其第二特征间断波相连接. 这里, 间断

$$\begin{cases} (\rho_{2m1}, u_{1m1}), & x < x_0, \\ (\rho_{2m2}, u_{1m2}), & x > x_0 \end{cases} \quad (2.27)$$

被称为方程组 (1.6) 的零波.

如上定义的 h -Riemann 解分别作为方程组 (1.3) 和 (1.6) 的 Riemann 问题的近似解. 下面具体考虑 h -Riemann 解的构造. 首先考虑如下方程组的解:

$$\rho u = \rho_l u_l (1 + \mu), \quad \rho u^2 + \frac{\rho^\gamma}{\gamma M^2} = \rho_l u_l^2 (1 + \mu) + \frac{\rho_l^\gamma}{\gamma M^2}, \quad (2.28)$$

其中 μ 是给定的常数, $\rho_l = \rho^{(0)} + \rho_{2l} M^2$, $u_l = u_{1l} M$.

特别地, 考虑方程 (2.28) 具有如下形式的解:

$$\rho = \rho^{(0)} + H^{(1)} M^2, \quad u = H^{(2)} M. \quad (2.29)$$

我们有如下引理:

引理 2.3 给定 $R > 0$, D_R 的记号同命题 2.1. 若 $(\rho_{2l}, u_{1l}) \in D_R$, 则存在常数 $M_0'' > 0$ 和 $\mu_0 > 0$ 及区域 $\{|\mu| < \mu_0, |M| < M_0'', (\rho_{2l}, u_{1l}) \in \overline{D_R}\}$ 上的光滑函数

$$H^{(1)} = H^{(1)}(\mu, M^2, \rho_{2l}, u_{1l}), \quad H^{(2)} = H^{(2)}(\mu, M^2, \rho_{2l}, u_{1l}), \quad (2.30)$$

满足如下性质:

(1) 当 $|\mu| < \mu_0$, $|M| < M_0''$ 且 $(\rho_{2l}, u_{1l}) \in \overline{D_R}$ 时, $\rho = \rho^{(0)} + H^{(1)} M^2$, $u = H^{(2)} M$ 为方程 (2.28) 于 $\{(\rho, u) \mid |\rho - \rho^{(0)}| \leq R M^2, |u| \leq R M\}$ 上的唯一解;

(2)

$$H^{(1)}|_{\mu=0} = H^{(1)}|_{M^2=0} = \rho_{2l}, \quad H^{(2)}|_{\mu=0} = u_{1l}, \quad H^{(2)}|_{M^2=0} = u_{1l}(1 + \mu); \quad (2.31)$$

(3)

$$H^{(1)} = \rho_{2l} + O(1)\mu M^2, \quad H^{(2)} = u_{1l}(1 + \mu) + O(1)\mu M^2, \quad (2.32)$$

其中 $O(1)$ 不依赖于 μ 和 M .

证明 将 (2.29) 代入 (2.28) 并利用 ρ_l 和 u_l 的表达式可推得 $H^{(1)}$ 和 $H^{(2)}$ 满足

$$\begin{aligned} &(\rho^{(0)} + H^{(1)}M^2)H^{(2)} - (\rho^{(0)} + \rho_{2l}M^2)u_{1l}(1 + \mu) = 0, \\ &(\rho^{(0)} + H^{(1)}M^2)(H^{(2)})^2M^2 + \left(\int_0^1 (\rho^{(0)} + H^{(1)}M^2s)^{\gamma-1} ds \right) H^{(1)} \\ &\quad - (\rho^{(0)} + \rho_{2l}M^2)(u_{1l})^2(1 + \mu) - \left(\int_0^1 (\rho^{(0)} + \rho_{2l}M^2s)^{\gamma-1} ds \right) \rho_{2l} = 0. \end{aligned} \quad (2.33)$$

为了证明 $H^{(1)}$ 和 $H^{(2)}$ 的存在性, 我们将 (2.33) 写成

$$\mathcal{F}_1(H^{(1)}, H^{(2)}, \mu, M^2, \rho_{2l}, u_{1l}) = 0, \quad \mathcal{F}_2(H^{(1)}, H^{(2)}, \mu, M^2, \rho_{2l}, u_{1l}) = 0, \quad (2.34)$$

其中 $\mathcal{F}_1$ 和 $\mathcal{F}_2$ 分别为 (2.33) 左端部分.

注意到

$$\mathcal{F}_1(\rho_{2l}, u_{1l}, 0, 0, \rho_{2l}, u_{1l}) = \mathcal{F}_2(\rho_{2l}, u_{1l}, 0, 0, \rho_{2l}, u_{1l}) \equiv 0,$$

且进一步计算得

$$\det \left(\frac{\partial(\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2)}{\partial(H^{(1)}, H^{(2)})} \right) \Big|_{\mu=M^2=0} = -(\rho^{(0)})^\gamma \neq 0.$$

于是利用隐函数定理及区域 $\overline{D_R}$ 的紧性可得, 存在常数 $M_0'' > 0$ 和 $\mu_0 > 0$, 使得当 $|\mu| < \mu_0$, $|M| < M_0''$ 且 $(\rho_{2l}, u_{1l}) \in \overline{D_R}$ 时, 方程组 (2.34) 在 $H^{(1)} = \rho_{2l}$ 和 $H^{(2)} = u_{1l}$ 附近有唯一的光滑解 $H^{(1)} = H^{(1)}(\mu, M^2, \rho_{2l}, u_{1l})$, $H^{(2)} = H^{(2)}(\mu, M^2, \rho_{2l}, u_{1l})$. 将 $H^{(1)}$ 和 $H^{(2)}$ 代入到 (2.29) 即可得到满足方程组 (2.28) 的解 (ρ, u) .

下面证明方程组 (2.28) 解的唯一性. 假设 (ρ, u) 和 (ρ', u') 是方程组 (2.28) 定义于区域 $\{(\rho, u) \mid |\rho - \rho^{(0)}| \leq RM^2, |u| \leq RM\}$ 上的两组解, 则 (ρ, u) 和 (ρ', u') 满足

$$\begin{aligned} &u(\rho - \rho') + \rho'(u - u') = 0, \\ &\left(u^2 + \frac{1}{M^2} \int_0^1 (\rho' + \tau(\rho - \rho'))^{\gamma-1} d\tau \right) (\rho - \rho') + \rho'(u + u')(u - u') = 0, \end{aligned}$$

则存在与 M 无关的正常数 K 使得

$$\begin{aligned} &\left| \begin{array}{cc} u & \rho' \\ u^2 + \frac{1}{M^2} \int_0^1 (\rho' + \tau(\rho - \rho'))^{\gamma-1} d\tau & \rho'(u + u') \end{array} \right| \\ &= \rho' \left(uu' - \frac{1}{M^2} \int_0^1 (\rho' + \tau(\rho - \rho'))^{\gamma-1} d\tau \right) \\ &\leq \rho' \left(R^2 M^2 - \frac{1}{M^2} \int_0^1 (\rho' + \tau(\rho - \rho'))^{\gamma-1} d\tau \right) \end{aligned}$$

$$\leq -K.$$

故由 Cramer 法则可知 $\rho = \rho'$, $u = u'$.

由 (2.33) 知, $H^{(1)}|_{\mu=0} = \rho_{2l}$, $H^{(2)}|_{\mu=0} = u_{1l}$, $H^{(1)}|_{M^2=0} = \rho_{2l}$, $H^{(2)}|_{M^2=0} = u_{1l}(1 + \mu)$. 从而推出结论 (2).

对结论 (3), 利用 Taylor 公式和结论 (2) 得到

$$\begin{aligned} H^{(1)} &= H^{(1)}(\mu, 0, \rho_{2l}, u_{1l}) + H^{(1)}(0, \mu, \rho_{2l}, u_{1l}) - H^{(1)}(0, 0, \rho_{2l}, u_{1l}) + O(1)\mu M^2 \\ &= \rho_{2l} + O(1)\mu M^2. \end{aligned}$$

对 $H^{(2)}$, 用同样的方法可证. 最后, 分别对 (2.34) 关于 (ρ_{2l}, u_{1l}) 求导数并令 $\mu = M^2 = 0$ 即可得到 $H^{(1)}$ 和 $H^{(2)}$ 关于 ρ_{2l} 和 u_{1l} 导数在 $\mu = M^2 = 0$ 的值. 引理证毕. $\square$

注 2.1 记 $\mathcal{H}^M(\mu, U_l) = (\mathcal{H}^{(1),M}(\mu, U_l), \mathcal{H}^{(2),M}(\mu, U_l))^\top$, 其中

$$\rho = \mathcal{H}^{(1),M}(\mu, U_l) := \rho^{(0)} + H^{(1)}M^2, \quad u = \mathcal{H}^{(2),M}(\mu, U_l) := H^{(2)}M,$$

则当 $\mu = \int_0^h B(x_0 + s)ds$ 时, $\mathcal{H}^M(\mu; U_l) = \Phi_h^M(x_0; U_l)$.

下面考虑方程组 (2.1) 具有如下左右状态的 h -Riemann 解:

$$U(x, \bar{t}) = \begin{cases} U_l = (\rho_l, u_l)^\top, & x < \bar{x}, \\ U_r = (\rho_r, u_r)^\top, & x > \bar{x}, \end{cases} \quad (2.35)$$

其中 $\bar{t} > 0$, (ρ_l, u_l) 和 (ρ_r, u_r) 具有如下形式:

$$(\rho_l, u_l) = (\rho^{(0)} + \rho_{2l}M^2, u_{1l}M), \quad (\rho_r, u_r) = (\rho^{(0)} + \rho_{2r}M^2, u_{1r}M), \quad (2.36)$$

且在这里 (ρ_{2l}, u_{1l}) 和 (ρ_{2r}, u_{1r}) 满足

$$\rho_{2r} = \rho_{2l}, \quad u_{1r} = u_{1l}(1 + \mu). \quad (2.37)$$

当 M 充分小时, U_l 是亚音速状态而 U_r 是超音速状态. 因此, 根据定义 2.1 和注 2.1 可知, 方程组 (2.1) 以 (2.35)–(2.37) 为左右状态的 h -Riemann 解可以通过求解下列方程得到:

$$\Phi_2^M(\beta_2; \mathcal{H}^M(\mu; \Phi_1^M(\beta_1; U_l))) = U_r. \quad (2.38)$$

(2.38) 可解性如下:

命题 2.2 给定 $R > 0$, D_R 记号同命题 2.1, 则存在常数 $M_0''' > 0$ 和 $\mu_0' > 0$ 及在 $\{|M| < M_0''', |\mu| < \mu_0', (\rho_{2l}, u_{1l}) \in \overline{D_R}, (\rho_{2r}, u_{1r}) \in \overline{D_R}\}$ 上的光滑函数 (β_1, β_2) , 使得 (β_1, β_2) 为方程 (2.38) 于 $\{|\beta_1| \leq M^2, |\beta_2| \leq M^2, |M| < M_0''', |\mu| < \mu_0', (\rho_{2l}, u_{1l}) \in \overline{D_R}, (\rho_{2r}, u_{1r}) \in \overline{D_R}\}$ 上的唯一解, 且满足

$$\beta_1 = O(1)\mu M^4, \quad \beta_2 = O(1)\mu M^4, \quad (2.39)$$

其中 $O(1)$ 不依赖于 M 和 μ .

证明 不妨假设方程 (2.35) 解的中间状态为 $(\hat{\rho}_l, \hat{u}_l)$ 和 $(\hat{\rho}_r, \hat{u}_r)$, 则 (ρ_l, u_l) 与 $(\hat{\rho}_l, \hat{u}_l)$ 通过 1-波连接, $(\hat{\rho}_l, \hat{u}_l)$ 与 $(\hat{\rho}_r, \hat{u}_r)$ 通过零波连接, $(\hat{\rho}_r, \hat{u}_r)$ 与 (ρ_r, u_r) 通过 2-波连接. 那么利用波曲线 (2.6) 和 (2.7) 可以得到如下关系式:

$$\begin{aligned}\hat{\rho}_l &= \rho_l e^{-\beta_1} = (\rho^{(0)} + \rho_{2l} M^2) e^{-\beta_1}, \\ \hat{u}_l &= u_l + \frac{c_l}{\sqrt{\gamma} M} \varphi_1(\beta_1) = u_{1l} M + \frac{(\rho^{(0)} + \rho_{2l} M^2)^{\frac{\gamma-1}{2}}}{M} \varphi_1(\beta_1),\end{aligned}\quad (2.40)$$

以及

$$\rho_r = \hat{\rho}_r e^{\beta_2}, \quad u_r = \hat{u}_r + \frac{\hat{c}_r}{\sqrt{\gamma} M} \varphi_2(\beta_2) = \hat{u}_r + \frac{(\hat{\rho}_r)^{\frac{\gamma-1}{2}}}{M} \varphi_2(\beta_2). \quad (2.41)$$

令 $\beta_j = \alpha_j M^2$, $\varphi_j(\beta_j) = \psi_j(\alpha_j M^2) \alpha_j M^2$, $j = 1, 2$, 则 $\psi_j \in C^1$ 且 $\psi_j(0) = 1$, $\psi'_1(0) = -\psi'_2(0) = -\frac{\gamma-1}{4}$, $j = 1, 2$. 先将其分别代入 (2.40) 和 (2.41), 得

$$\begin{aligned}\hat{\rho}_l &= (\rho^{(0)} + \rho_{2l} M^2) e^{-\alpha_1 M^2} \\ &= \rho^{(0)} + \left\{ \left(- \int_0^1 e^{-\alpha_1 M^2 \xi} d\xi \right) \alpha_1 \rho^{(0)} + \rho_{2l} e^{-\alpha_1 M^2} \right\} M^2 \\ &=: \rho^{(0)} + \hat{\rho}_{2l}(\alpha_1, M^2) M^2, \\ \hat{u}_l &= (u_{1l} + (\rho^{(0)} + \rho_{2l} M^2)^{\frac{\gamma-1}{2}} \psi_1(\alpha_1 M^2) \alpha_1) M \\ &=: \hat{u}_{1l}(\alpha_1, M^2) M, \\ \rho_r &= \hat{\rho}_r e^{\alpha_2 M^2}, \quad u_r = \hat{u}_r + (\hat{\rho}_r)^{\frac{\gamma-1}{2}} \psi_2(\alpha_2 M^2) \alpha_2 M.\end{aligned}\quad (2.42)$$

另一方面, 由于 $(\hat{\rho}_l, \hat{u}_l)$ 与 $(\hat{\rho}_r, \hat{u}_r)$ 通过零波连接, 那么根据引理 2.3 知, $(\hat{\rho}_r, \hat{u}_r)$ 在 $\mu = M^2 = 0$ 附近具有如下展开形式:

$$\begin{aligned}\hat{\rho}_r &= \rho^{(0)} + H^{(1)}(\mu, M^2, \hat{\rho}_{2l}(\alpha_1, M^2), \hat{u}_{1l}(\alpha_1, M^2)) M^2, \\ \hat{u}_r &= H^{(2)}(\mu, M^2, \hat{\rho}_{2l}(\alpha_1, M^2), \hat{u}_{1l}(\alpha_1, M^2)) M.\end{aligned}\quad (2.43)$$

将 (2.43) 代入 (2.42) 并利用 (ρ_r, u_r) 的展开形式和 (2.37), 整理可得

$$\begin{aligned}\rho_{2l} &= \left(\rho^{(0)} \int_0^1 e^{\alpha_2 M^2 s} ds \right) \alpha_2 + H^{(1)}(\mu, M^2, \hat{\rho}_{2l}(\alpha_1, M^2), \hat{u}_{1l}(\alpha_1, M^2)) e^{\alpha_2 M^2}, \\ (1 + \mu) u_{1l} &= H^{(2)}(\mu, M^2, \hat{\rho}_{2l}(\alpha_1, M^2), \hat{u}_{1l}(\alpha_1, M^2)) \\ &\quad + (\rho^{(0)} + H^{(1)}(\mu, M^2, \hat{\rho}_{2l}(\alpha_1, M^2), \hat{u}_{1l}(\alpha_1, M^2)) M^2)^{\frac{\gamma-1}{2}} \psi_2(\alpha_2 M^2) \alpha_2.\end{aligned}\quad (2.44)$$

由 (2.44) 推知, 当 $\mu = 0$ 或 $M^2 = 0$ 时, $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$. 为了从方程组 (2.44) 中得到解 α_1 和 α_2 , 令

$$\begin{aligned}&\hat{\mathcal{F}}_1(\mu, M^2, \alpha_1, \alpha_2, \Psi_1(\alpha_1, M^2), \Psi_2(\alpha_2, M^2)) \\ &= \left(\rho^{(0)} \int_0^1 e^{\alpha_2 M^2 s} ds \right) \alpha_2 + H^{(1)}(\mu, M^2, \hat{\rho}_{2l}(\alpha_1, M^2), \hat{u}_{1l}(\alpha_1, M^2)) e^{\alpha_2 M^2} - \rho_{2l}, \\ &\hat{\mathcal{F}}_2(\mu, M^2, \alpha_1, \alpha_2, \Psi_1(\alpha_1, M^2), \Psi_2(\alpha_2, M^2)) \\ &= H^{(2)}(\mu, M^2, \hat{\rho}_{2l}(\alpha_1, M^2), \hat{u}_{1l}(\alpha_1, M^2)) \\ &\quad + (\rho^{(0)} + H^{(1)}(\mu, M^2, \hat{\rho}_{2l}(\alpha_1, M^2), \hat{u}_{1l}(\alpha_1, M^2)) M^2)^{\frac{\gamma-1}{2}} \psi_2(\alpha_2 M^2) \alpha_2 - (1 + \mu) u_{1l},\end{aligned}\quad (2.45)$$

其中 $\Psi_j(\alpha_j, M^2) = \psi_j(\alpha_j M^2) \alpha_j$, $j = 1, 2$.

注意到

$$\hat{\mathcal{F}}_1(0, 0, 0, 0, 0, 0) = \hat{\mathcal{F}}_2(0, 0, 0, 0, 0, 0) = 0.$$

利用引理 2.3 和 ψ_j 的性质并直接计算可得

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial \hat{\mathcal{F}}_1}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial \hat{\mathcal{F}}_1}{\partial \Psi_1} \frac{\partial \Psi_1}{\partial \alpha_1} \right) \Big|_{\mu=M^2=0} &= -\rho^{(0)}, \quad \left(\frac{\partial \hat{\mathcal{F}}_1}{\partial \alpha_2} + \frac{\partial \hat{\mathcal{F}}_1}{\partial \Psi_1} \frac{\partial \Psi_1}{\partial \alpha_2} \right) \Big|_{\mu=M^2=0} = \rho^{(0)}, \\ \left(\frac{\partial \hat{\mathcal{F}}_2}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial \hat{\mathcal{F}}_2}{\partial \Psi_1} \frac{\partial \Psi_1}{\partial \alpha_1} \right) \Big|_{\mu=M^2=0} &= 0, \quad \left(\frac{\partial \hat{\mathcal{F}}_2}{\partial \alpha_2} + \frac{\partial \hat{\mathcal{F}}_2}{\partial \Psi_1} \frac{\partial \Psi_1}{\partial \alpha_2} \right) \Big|_{\mu=M^2=0} = (\rho^{(0)})^{\frac{\gamma-1}{2}}. \end{aligned}$$

因此, 当 $\mu = M^2 = 0$ 时,

$$\begin{aligned} \left| \begin{aligned} &\frac{\partial \hat{\mathcal{F}}_1}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial \hat{\mathcal{F}}_1}{\partial \Psi_1} \frac{\partial \Psi_1}{\partial \alpha_1} \frac{\partial \mathcal{F}_1}{\partial \alpha_2} + \frac{\partial \mathcal{F}_1}{\partial \Psi_1} \frac{\partial \Psi_1}{\partial \alpha_2} \\ &\frac{\partial \mathcal{F}_2}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial \mathcal{F}_2}{\partial \Psi_1} \frac{\partial \Psi_1}{\partial \alpha_1} \frac{\partial \mathcal{F}_1}{\partial \alpha_2} + \frac{\partial \mathcal{F}_1}{\partial \Psi_1} \frac{\partial \Psi_1}{\partial \alpha_2} \end{aligned} \right| &= -(\rho^{(0)})^{\frac{\gamma+1}{2}} \neq 0. \end{aligned}$$

故由隐函数定理和区域 $\overline{D_R}$ 紧性可得, 存在 $\mu'_0 > 0$ 和 $M_0''' > 0$ 及区域 $\{|\mu| < \mu'_0, |M| < M_0''', |\rho_{2l}| \leq R, |u_{1l}| \leq R, |\rho_{2r}| \leq R, |u_{1r}| \leq R\}$ 上的光滑函数 α_k , $k = 1, 2$, 使得当 $|\mu| < \mu'_0$, $|M| < M_0$ 且 $|\rho_{2l}| \leq R$, $|u_{1l}| \leq R$, $|\rho_{2r}| \leq R$, $|u_{1r}| \leq R$ 时, 函数 (α_1, α_2) 是方程组 $\hat{\mathcal{F}}_1 = 0$ 和 $\hat{\mathcal{F}}_2 = 0$ 在 $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ 附近唯一的光滑解. 于是, 通过变换 $\beta_j = \alpha_j M^2$ 可以得出方程 (2.38) 的解且其唯一性证明同引理 2.3.

进一步计算可得 $\frac{\partial \alpha_1}{\partial \mu}$ 和 $\frac{\partial \alpha_2}{\partial \mu}$ 满足

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial \hat{\mathcal{F}}_1}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial \hat{\mathcal{F}}_1}{\partial \Psi_1} \frac{\partial \Psi_1}{\partial \alpha_1} \right) \frac{\partial \alpha_1}{\partial \mu} + \left(\frac{\partial \hat{\mathcal{F}}_1}{\partial \alpha_2} + \frac{\partial \hat{\mathcal{F}}_1}{\partial \Psi_2} \frac{\partial \Psi_2}{\partial \alpha_2} \right) \frac{\partial \alpha_2}{\partial \mu} + \frac{\partial \hat{\mathcal{F}}_1}{\partial \mu} &= 0, \\ \left(\frac{\partial \hat{\mathcal{F}}_2}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial \hat{\mathcal{F}}_2}{\partial \Psi_1} \frac{\partial \Psi_1}{\partial \alpha_1} \right) \frac{\partial \alpha_1}{\partial \mu} + \left(\frac{\partial \hat{\mathcal{F}}_2}{\partial \alpha_2} + \frac{\partial \hat{\mathcal{F}}_2}{\partial \Psi_2} \frac{\partial \Psi_2}{\partial \alpha_2} \right) \frac{\partial \alpha_2}{\partial \mu} + \frac{\partial \hat{\mathcal{F}}_2}{\partial \mu} &= 0. \end{aligned}$$

直接计算可得 $\frac{\partial \hat{\mathcal{F}}_1}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial \hat{\mathcal{F}}_1}{\partial \Psi_1} \frac{\partial \Psi_1}{\partial \alpha_1}$, $\frac{\partial \hat{\mathcal{F}}_1}{\partial \alpha_2} + \frac{\partial \hat{\mathcal{F}}_1}{\partial \Psi_2} \frac{\partial \Psi_2}{\partial \alpha_2}$, $\frac{\partial \hat{\mathcal{F}}_1}{\partial \mu} \in C^1_{M^2}$, $\frac{\partial \hat{\mathcal{F}}_2}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial \hat{\mathcal{F}}_2}{\partial \Psi_1} \frac{\partial \Psi_1}{\partial \alpha_1}$, $\frac{\partial \hat{\mathcal{F}}_2}{\partial \alpha_2} + \frac{\partial \hat{\mathcal{F}}_2}{\partial \Psi_2} \frac{\partial \Psi_2}{\partial \alpha_2}$, $\frac{\partial \hat{\mathcal{F}}_2}{\partial \mu} \in C^1_{M^2}$, 因此, $\frac{\partial^2 \alpha_1}{\partial \mu \partial M^2}$ 和 $\frac{\partial^2 \alpha_2}{\partial \mu \partial M^2}$ 在 $\mu = M^2 = 0$ 附近有界. 故对 $\alpha_1(\mu, M^2)$ 利用 Taylor 展开式, 可得

$$\alpha_1(\mu, M^2) = \alpha_1(\mu, 0) + \alpha_1(0, M^2) - \alpha_1(0, 0) + O(1)\mu M^2 = O(1)\mu M^2.$$

同样, 对 $\alpha_2(\mu, M^2)$, 也可以推得

$$\alpha_2(\mu, M^2) = O(1)\mu M^2,$$

其中 $O(1)$ 不依赖于 μ 和 M^2 .

最后, 再由变换 $\beta_1 = \alpha_1 M^2$ 和 $\beta_2 = \alpha_2 M^2$ 可以得到 β_1 和 β_2 的估计. 命题证毕. $\square$

对于方程组 (1.6), 借助引理 2.2 并通过直接的计算可得到下面的引理:

引理 2.4 记

$$\begin{aligned} \rho_{2m1} &= \rho_{2m2} = \rho_{2l} - \frac{1}{2+\mu} \left((1+\mu)\rho_{2l} + \rho_{2r} + \frac{\sqrt{\gamma}\rho^{(0)}}{c^{(0)}}((1+\mu)u_{1l} + u_{1r}) \right), \\ u_{1m1} &= \frac{1}{2+\mu} \left(u_{1l} + u_{1r} + \frac{c^{(0)}}{\sqrt{\gamma}\rho^{(0)}}(\rho_{2l} - \rho_{2r}) \right), \\ u_{1m2} &= \frac{1+\mu}{2+\mu} \left(u_{1l} + u_{1r} + \frac{c^{(0)}}{\sqrt{\gamma}\rho^{(0)}}(\rho_{2l} - \rho_{2r}) \right), \end{aligned} \tag{2.46}$$

其中 $\mu = \int_0^h B(x_0 + s)ds$, $x_0 \in \mathbb{R}$, 则

$$(\rho_2, u_1)(x, t) = \begin{cases} (\rho_{2l}, u_{1l}), & x < x_0 - \frac{c^{(0)}}{\sqrt{\gamma}M}(t - \bar{t}), \\ (\rho_{2m1}, u_{1m1}), & x_0 - \frac{c^{(0)}}{\sqrt{\gamma}M}(t - \bar{t}) < x < x_0, \\ (\rho_{2m2}, u_{1m2}), & x_0 < x < x_0 + \frac{c^{(0)}}{\sqrt{\gamma}M}(t - \bar{t}), \\ (\rho_{2r}, u_{1r}), & x > x_0 + \frac{c^{(0)}}{\sqrt{\gamma}M}(t - \bar{t}) \end{cases} \quad (2.47)$$

即为方程组 (1.6) 具有初值 (2.25) 的 h -Riemann 解.

3 初值问题 (1.3) 和 (1.4) 解的适定性

本节研究初值问题 (1.3) 和 (1.4) 解的存在性、 L^1 -稳定性和唯一性以及初值问题 (1.6) 和 (1.7) 解的存在性和唯一性. 由文献 [12, 13, 16], 我们构造问题 (1.3) 和 (1.4) 的近似解如下.

命题 3.1 在 (H_1) 和 (H_2) 的假设下, 存在 $\delta_0 > 0$ 和 $M_0 > 0$, 当 $|M| < M_0$ 时, 若 $\text{T.V.}\{a\} < \delta_0$, 则对充分小的 $h > 0$, 存在一个非空集 $\mathcal{D}^M$ 和半群 $P_t^{M,h} : [0, +\infty) \times \mathcal{D}^M \mapsto \mathcal{D}^M$ 具有如下性质:

(i) 对于具有有限个间断的分片常数函数 $U_0^M(x)$, 当 $t > 0$ 充分小时, 若其间断 α 的横坐标满足 $x_\alpha \neq k_\alpha h$, 其中 $k_\alpha \in \mathbb{Z}$, 则 $P_t^{M,h}U_0^M$ 即为在点 $(x_\alpha, 0)$ 邻域内齐次方程 (2.2) Riemann 问题解, 即解是由分片常数以及连接这些分片常数的激波或者稀疏波所组成; 若其间断 α 的横坐标满足 $x_\alpha = k_\alpha h$, 则 $P_t^{M,h}U_0^M$ 即为在点 $(x_\alpha, 0)$ 邻域内非齐次方程 (2.1) 的 h -Riemann 解, 即解是由分片常数以及连接这些分片常数的零波、激波或者稀疏波所组成;

(ii) $P_t^{M,h}U_0$ 满足如下估计:

$$\begin{aligned} \sup_{t \geq 0} \text{T.V.}(P_t^{M,h}U_0^M) &\leq O(1)(\text{T.V.}U_0^M + \text{T.V.}(a)), \\ d_M(P_{t_1}^{M,h}U_1^M, P_{t_2}^{M,h}U_2^M) &\leq \mathcal{L}\left(d_M(U_1^M, U_2^M) + \frac{|t_1 - t_2|}{M}\right), \end{aligned} \quad (3.1)$$

其中 $U_1^M, U_2^M \in \mathcal{D}^M$ 且 $O(1)$ 和 $\mathcal{L}$ 不依赖于 h 和 M .

非空集 $\mathcal{D}^M$ 包含如下子集:

$$\{U^M = (\rho^M, u^M)^\top \mid (\rho^M - \rho^{(0)}, u^M) \in L^1, \text{T.V.}(\rho^M - \rho^{(0)}) < O(1)M^2, \text{T.V.}(u^M) < O(1)M\}, \quad (3.2)$$

其上度量定义如下:

$$d_M(V_1, V_2) = \|v_1^{(1)} - v_2^{(1)}\|_{L^1} + M\|v_1^{(2)} - v_2^{(2)}\|_{L^1}, \quad V_1 = (v_1^{(1)}, v_1^{(2)})^\top, \quad V_2 = (v_2^{(1)}, v_2^{(2)})^\top \in \mathcal{D}^M, \quad (3.3)$$

其中 $O(1)$ 不依赖于 M .

利用文献 [16], 我们还可进一步给出初值问题 (1.3) 和 (1.4) 解的存在性如下.

命题 3.2 在 (H_1) 和 (H_2) 的假设下, 存在常数 $\delta_0 > 0$ 和 $M_0 > 0$, 当 $M \in (0, M_0)$ 时, 若 $\text{T.V.}(a) < \delta_0$, 则存在不依赖于 M 的常数 $\tilde{\mathcal{L}} > 0$ 和唯一的半群 $P_t^M : [0, +\infty) \times \mathcal{D}^M \mapsto \mathcal{D}^M$, 使得对任

意 $U_0^M \in \mathcal{D}^M$, $U^M(x, t) = P_t^M U_0^M$ 是初值问题 (1.3) 和 (1.4) 的解且满足

$$\begin{aligned} \sup_{t \geq 0} \text{T.V.}(P_t^M U_0^M) &\leq O(1)(\text{T.V.} U_0^M + \text{T.V.}(a)), \\ d_M(P_{t_1}^M U_1^M, P_{t_2}^M U_2^M) &\leq \tilde{\mathcal{L}}\left(d_M(U_1^M, U_2^M) + \frac{|t_1 - t_2|}{M}\right), \end{aligned} \quad (3.4)$$

并存在一序列 h_i 满足 $h_i \rightarrow 0$, $i \rightarrow \infty$, 使得对任意的 $U_0^M \in \mathcal{D}^M$, 满足 $d_M(P_{t_i}^{M, h_i} U_0^M, P_t^M U_0^M) \rightarrow 0$, $i \rightarrow \infty$, 其中 h_i 的选取与 U_0^M 无关且 $\mathcal{D}^M$ 由命题 3.1 给出.

注 3.1 上述两个命题可以通过如下尺度变换方法证明. 对 $M > 0$, 令 $t' = \frac{t}{M}$, $x' = x$, $u' = Mu$, $\rho' = \rho$, 则 (1.3) 可被变换为

$$\begin{cases} \partial_{t'} \rho' + \partial_{x'}(\rho' u') = -\frac{a'(x')}{a(x')} \rho' u', \\ \partial_{t'}(\rho' u') + \partial_{x'}\left(\rho'(u')^2 + \frac{(\rho')^\gamma}{\gamma}\right) = -\frac{a'(x')}{a(x')} \rho'(u')^2. \end{cases} \quad (3.5)$$

于是利用 (3.5) 的存在性及 L^1 -稳定性相关结论即可证明上述两个命题.

类似地, 对初值问题 (1.6) 和 (1.7), 我们也可以利用引理 2.2 和 2.4 并通过直接计算得到相应的近似解的存在性和收敛性, 结论如下:

命题 3.3 在 (H_1) 和 (H_2) 的假设下, 对充分小的 $\nu > 0$, $h > 0$, 初值问题 (1.6) 和 (1.7) 存在唯一 (ν, h) -近似解 $(\rho_2^{M, h, \nu}, u_1^{M, h, \nu})(x, t) \in (BV \cap L^1)(\mathbb{R}, \mathbb{R}^2)$ 具有如下性质.

(1) 在整个 $(x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$ 平面上, $(\rho_2^{M, h, \nu}, u_1^{M, h, \nu})$ 是具有有限个间断的分片常数函数, 其间断由沿齐次线性声波方程组 (2.9) 的两族特征传播的弱间断以及由带源项的非线性声波方程 (1.6) 产生的零波组成并且每条间断线均为直线段;

(2) $(\rho_2^{M, h, \nu}, u_1^{M, h, \nu})(x, t)$ 满足下列估计:

$$\|(\rho_2^{M, h, \nu}(\cdot, t_1) - \rho_2^{M, h, \nu}(\cdot, t_2), u_1^{M, h, \nu}(\cdot, t_1) - u_1^{M, h, \nu}(\cdot, t_2))\|_{L^1} \leq \frac{O(1)}{M} |t_1 - t_2|, \quad (3.6)$$

且

$$\sup_{t \geq 0} \text{T.V.}\{(\rho_2^{M, h, \nu}, u_1^{M, h, \nu})(\cdot, t)\} \leq O(1)(\text{T.V.}\{(\rho_2^{(0)}, u_1^{(0)})\} + \text{T.V.}(a)), \quad (3.7)$$

这里 $O(1)$ 不依赖于 h, ν 和 M ;

(3) 存在唯一的 $(\rho_2^M, u_1^M) \in (BV \cap L^1)(\mathbb{R}, \mathbb{R}^2)$, 使得当 $h, \nu \rightarrow 0$ 时,

$$\|(\rho_2^{M, h, \nu} - \rho_2^M, u_1^{M, h, \nu} - u_1^M)\|_{L^1} \rightarrow 0, \quad (3.8)$$

并且 (ρ_2^M, u_1^M) 是初值问题 (1.6) 和 (1.7) 的解.

引理 3.1 假设 $U_w^M(x, t) = (\rho^{(0)} + \rho_2(x, t)M^2, u_1(x, t)M)$ 且对任意 $\bar{t} > 0$, $(\rho_2, u_1)(x, \bar{t})$ 满足 (2.12), 则当 $M \in (0, M_0)$ 时,

(1) 若 $c^{(0)}[\rho_{2*}] = -\rho^{(0)}[u_{1*}]$, 则

$$d_M(P_{t-\bar{t}}^{M, h}(U_w^M(\bar{t})), U_w^M(t)) \leq O(1)[u_{1*}]M^3(t - \bar{t}); \quad (3.9)$$

(2) 若 $c^{(0)}[\rho_{2*}] = \rho^{(0)}[u_{1*}]$, 则

$$d_M(P_{t-\bar{t}}^{M, h}(U_w^M(\bar{t})), U_w^M(t)) \leq O(1)[u_{1*}]M^3(t - \bar{t}), \quad (3.10)$$

其中 $[\rho_{2*}]$ 和 $[u_{1*}]$ 由引理 2.2 定义, $O(1)$ 不依赖于 $M, [u_{1*}], \mu, t$ 和 $\bar{t}$.

证明 首先考虑 (1). 由 (1) 的假设和引理 2.2 知, $(\rho_2^M(x, t), u_1^M(x, t))$ 的解为 (2.13) 的形式, 则 $U_w^M(x, t)$ 可以写成如下形式:

$$U_w^M(x, t) = \begin{cases} U_l^M = (\rho^{(0)} + \rho_{2l}M^2, u_{1l}M), & x < \bar{x} - \frac{c^{(0)}}{M}(t - \bar{t}), \\ U_r^M = (\rho^{(0)} + \rho_{2r}M^2, u_{1r}M), & x > \bar{x} - \frac{c^{(0)}}{M}(t - \bar{t}). \end{cases}$$

根据命题 2.1 可知, $P_t^{M,h}U_w^M(\bar{t})$ 的解 α_1 和 α_2 满足 (2.21). 再利用命题 2.1, 可得

$$\alpha_1 = \frac{1}{c^{(0)}}[u_{1*}]M^2 + O(1)[u_{1*}]M^4, \quad \alpha_2 = O(1)[u_{1*}]M^4.$$

假设 $U_m^M = (\rho_m^M, u_m^M)$ 为解 $P_t^{M,h}U_w^M(\bar{t})$ 的中间状态. 我们只考虑 α_1 和 α_2 均为激波情形, 对其他情形类似可证. 对 $M \in (0, M_0)$, 利用引理 2.1 及 α_1 和 α_2 估计, 直接计算可得

$$\begin{aligned} \rho_m^M &= \rho_l^M e^{-\alpha_1} = \rho_l^M \left(1 - \frac{1}{c^{(0)}}[u_{1*}]M^2 + O(1)[u_{1*}]M^4 \right), \\ c_l^M &= c^{(0)} + \frac{(\gamma - 1)c^{(0)}\rho_{2l}}{2\rho^{(0)}}M^2 + O(1)M^4, \\ u_m^M &= u_l^M + \frac{c_l^M}{M}\varphi_1(\alpha_1) = u_l^M + [u_{1*}]M + O(1)[u_{1*}]M^3, \end{aligned}$$

同样,

$$\begin{aligned} \rho_r^M &= \rho_m^M e^{\alpha_2} = \rho_m^M (1 + O(1)[u_{1*}]M^4), \\ c_m^M &= c^{(0)} + O(1)M^2, \\ u_r^M &= u_m^M + \frac{c_m^M}{M}\varphi_2(\alpha_2) = u_m^M + O(1)[u_{1*}]M^3. \end{aligned}$$

假设 α_1 和 α_2 的波速为 σ_1^M 和 σ_2^M . 利用估计 (3.3) 和 (3.4) 可得

$$\begin{aligned} \sigma_1^M &= \lambda_1^M(U_l^M) + \frac{(\gamma - 1)c_l^M}{4M}\alpha_1 + (1)\alpha_1^2 \\ &= -\frac{c^{(0)}}{M} + O(1)M, \end{aligned}$$

同样可得

$$\sigma_2^M = \frac{c^{(0)}}{M} + O(1)M.$$

从而有

$$\max \left\{ \sigma_1^M, -\frac{c^{(0)}}{M} \right\} - \min \left\{ \sigma_1^M, -\frac{c^{(0)}}{M} \right\} = O(1)M, \quad \sigma_2^M - \max \left\{ \sigma_1^M, -\frac{c^{(0)}}{M} \right\} = O(1)\frac{1}{M}.$$

令 $(\rho^M, u^M)(x, t) = P_t^h U_w^M(x, \bar{t})$, 则

$$\begin{aligned} \|\rho^M(t) - \rho_w^M(t)\|_{L^1} &= \int_{\bar{x} + \max\{\sigma_1^M, -\frac{c^{(0)}}{M}\}(t - \bar{t})}^{\bar{x} + \max\{\sigma_1^M, -\frac{c^{(0)}}{M}\}(t - \bar{t})} |\rho^M(x, t) - \rho_w^M(x, t)| dx \\ &\quad + \int_{\bar{x} + \max\{\sigma_1^M, -\frac{c^{(0)}}{M}\}(t - \bar{t})}^{\bar{x} + \sigma_2^M(t - \bar{t})} |\rho^M(x, t) - \rho_w^M(x, t)| dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &\leq O(1)[u_{1*}]M^2 \left(\max \left\{ \sigma_1^M, -\frac{c^{(0)}}{M} \right\} - \min \left\{ \sigma_1^M, -\frac{c^{(0)}}{M} \right\} \right) (t - \bar{t}) \\
 &\quad + O(1)[u_{1*}]M^4 \left(\max \left\{ \sigma_1^M, -\frac{c^{(0)}}{M} \right\} - \min \left\{ \sigma_1^M, -\frac{c^{(0)}}{M} \right\} \right) (t - \bar{t}) \\
 &\leq O(1)[u_{1*}]M^3(t - \bar{t}),
 \end{aligned}$$

同样,

$$\begin{aligned}
 \|u^M(t) - u_w^M(t)\|_{L^1} &= \int_{\bar{x} + \max\{\sigma_1^M, -\frac{c^{(0)}}{M}\}(t-\bar{t})}^{\bar{x} + \max\{\sigma_1^M, -\frac{c^{(0)}}{M}\}(t-\bar{t})} |u^M(x, t) - u_w^M(x, t)| dx \\
 &\quad + \int_{\bar{x} + \max\{\sigma_1^M, -\frac{c^{(0)}}{M}\}(t-\bar{t})}^{\bar{x} + \sigma_2^M(t-\bar{t})} |u^M(x, t) - u_w^M(x, t)| dx \\
 &\leq O(1)[u_{1*}]M \left(\max \left\{ \sigma_1^M, -\frac{c^{(0)}}{M} \right\} - \min \left\{ \sigma_1^M, -\frac{c^{(0)}}{M} \right\} \right) (t - \bar{t}) \\
 &\quad + O(1)[u_{1*}]M^3 \left(\max \left\{ \sigma_1^M, -\frac{c^{(0)}}{M} \right\} - \min \left\{ \sigma_1^M, -\frac{c^{(0)}}{M} \right\} \right) (t - \bar{t}) \\
 &\leq O(1)[u_{1*}]M^2(t - \bar{t}).
 \end{aligned}$$

结合上述两个估计, 得到估计 (3.9). 用类似的方法, 也可以得到估计 (3.10). 引理证毕. $\square$

引理 3.2 假设 $U_w^M(x, t) = (\rho^{(0)} + \rho_2(x, t)M^2, u_1(x, t)M)$ 且对任意的 $\bar{t} > 0$, $(\rho_2, u_1)(x, \bar{t})$ 满足

$$(\rho_2, u_1)(x, \bar{t}) = \begin{cases} (\rho_{2l}, u_{1l})^\top, & x < \bar{x}, \\ (\rho_{2r}, u_{1r})^\top, & x > \bar{x}. \end{cases} \quad (3.11)$$

若 $\rho_{2r} = \rho_{2l}$, $u_{1r} = (1 + \mu)u_{1l}$, 则当 $M \in (0, M_0)$ 和 $|\mu| < \mu_0$ 时, 成立下列估计:

$$d_M(P_{t-\bar{t}}^{M,h}(U_w^M(\bar{t})), U_w^M(t)) \leq O(1)\mu M^3(t - \bar{t}), \quad (3.12)$$

其中 $O(1)$ 不依赖于 M 、 $[u_{1*}]$ 、 μ 、 t 和 $\bar{t}$.

证明 由 (3.11) 及假设可知, $U_w^M(x, \bar{t})$ 具有如下形式:

$$U_w^M(x, \bar{t}) = \begin{cases} U_l^M = (\rho^{(0)} + \rho_{2l}M^2, u_{1l}M), & x < \bar{x}, \\ U_r^M = (\rho^{(0)} + \rho_{2r}M^2, u_{1r}(1 + \mu)M), & x > \bar{x}. \end{cases}$$

此时, $P_t^{M,h}U_w^M(t)$ 满足方程 (2.34). 当 $M \in (0, M_0)$ 和 $|\mu| < \mu_0$ 时, 由命题 2.2 可知, 方程 (2.34) 存在唯一的解 β_1 和 β_2 满足估计

$$\beta_1 = O(1)\mu M^4, \quad \beta_2 = O(1)\mu M^4.$$

我们用 $U_{m1}^M = (\rho_{m1}^M, u_{m1}^M)^\top$ 和 $U_{m2}^M = (\rho_{m2}^M, u_{m2}^M)^\top$ 来表示 $P_t^{M,h}U_w^M(\bar{t})$ 的中间状态, 则 U_{m1}^M 与 U_l^M 通过 1-波 β_1 来连接, U_{m1}^M 和 U_{m2}^M 通过零波 $x = \bar{x}$ 来连接, U_{m2}^M 和 U_r^M 则通过 2-波 β_2 来连接. 不妨假设 β_1 和 β_2 均为激波且波速为 $\sigma_1^M(\beta_1)$ 和 $\sigma_1^M(\beta_2)$, 则由引理 2.3 和命题 2.2 知, (ρ_{m1}^M, u_{m1}^M) 和 (ρ_{m2}^M, u_{m2}^M) 具有如下形式:

$$\rho_{m1}^M = \rho^{(0)} + \rho_{2m1}M^2, \quad u_{m1}^M = u_{1m1}M, \quad \rho_{m2}^M = \rho^{(0)} + \rho_{2m2}M^2, \quad u_{m2}^M = u_{1m2}M,$$

且满足

$$\rho_{2m2} = \rho_{2m1} + O(1)\mu M^2, \quad u_{1m2} = u_{1m1}(1 + \mu) + O(1)\mu M^2$$

以及

$$\beta_1 = O(1)\mu M^4, \quad \beta_2 = O(1)\mu M^4.$$

利用上述估计, 直接计算可得

$$\begin{aligned} \rho_{m1}^M &= \rho_l^M e^{\beta_1} = \rho_l^M + O(1)\mu M^4 = \rho^{(0)} + \rho_{2l}M^2 + O(1)\mu M^4, \\ c_{m1}^M &= \sqrt{\gamma}(\rho_{m1}^M)^{\frac{\gamma-1}{2}} = c^{(0)} + O(1)(1 + \mu M^2)M^2, \\ u_{m1}^M &= u_l^M + \frac{c_l^M}{\sqrt{\gamma}M} \varphi_1(\beta_1) = u_l^M + O(1)\mu M^3 = u_{1l}M + O(1)\mu M^3 \end{aligned}$$

和

$$\begin{aligned} \rho_{m2}^M &= \rho^{(0)} + \rho_{m1}^M M^2 + O(1)\mu M^4, \\ c_{m2}^M &= c^{(0)} + O(1)(1 + \mu M^2)M^2, \\ u_{m2}^M &= u_{1m1}(1 + \mu)M + O(1)\mu M^3. \end{aligned}$$

从而,

$$\begin{aligned} \rho_r^M &= \rho_{m2}^M e^{\beta_2} = \rho_{m2}^M + O(1)\mu M^4 = \rho^{(0)} + \rho_{2m1}M^2 + O(1)\mu M^4, \\ u_r^M &= u_{m2}^M + \frac{c_{m2}^M}{\sqrt{\gamma}M} \varphi_2(\beta_2) = u_{m2}^M + O(1)\mu M^3 = u_{1m1}(1 + \mu)M + O(1)\mu M^3. \end{aligned}$$

故

$$\begin{aligned} \sigma_1^M(\beta_1) &= \lambda_1^M(U_l^M) + \frac{(\gamma-1)c_l^M}{4\sqrt{\gamma}M} \beta_1 + O(1)\beta_1^2 \\ &= u_l^M - \frac{c_l^M}{M} + O(1)\mu M^3 \\ &= -\frac{c^{(0)}}{\sqrt{\gamma}M} + O(1)(1 + \mu M^2)M, \\ \sigma_2^M(\beta_2) &= \lambda_2^M(U_{m2}^M) + \frac{(\gamma-1)c_{m2}^M}{4\sqrt{\gamma}M} \beta_2 + O(1)\beta_2^2 \\ &= u_{m2}^M + \frac{c_{m2}^M}{\sqrt{\gamma}M} + O(1)\mu M^3 \\ &= \frac{c^{(0)}}{\sqrt{\gamma}M} + O(1)(1 + \mu M^2)M. \end{aligned}$$

因此,

$$\|\rho^M(t) - \rho_w^M(t)\|_{L^1} = \int_{\bar{x} + \sigma_1^M(\beta_1)(t-\bar{t})}^{\bar{x}} |\rho^M(x, t) - \rho_w^M(x, t)| dx$$

$$\begin{aligned}
 & + \int_{\bar{x}}^{\bar{x} + \sigma_2^M(\beta_2)(t - \bar{t})} |\rho^M(x, t) - \rho_w^M(x, t)| dx \\
 & \leq |\rho_{m1}^M - \rho_l^M|(-\sigma_1^M(\beta_1))(t - \bar{t}) + |\rho_{m2}^M - \rho_r^M|\sigma_2^M(\beta_2)(t - \bar{t}) \\
 & \leq O(1)\mu M^3(t - \bar{t})
 \end{aligned}$$

以及

$$\begin{aligned}
 \|u^M(t) - u_w^M(t)\|_{L^1} & \leq |u_{m1}^M - u_l^M|(-\sigma_1^M(\beta_1))(t - \bar{t}) + |u_{m2}^M - u_r^M|\sigma_2^M(\beta_2)(t - \bar{t}) \\
 & \leq O(1)\mu M^2(t - \bar{t}).
 \end{aligned}$$

结合上述两个估计, 得到估计 (3.12). 对 β_1 和 β_2 为稀疏波情形类似可证. 引理证毕. $\square$

4 定理 1.1 的证明

为了完成定理 1.1 的证明, 首先给出如下半群公式, 详细证明可参见文献 [11, 第一章].

引理 4.1 假设映射 $V(t) : I = [0, +\infty) \mapsto \mathcal{D}^M$ 满足 $V(t) - (\rho^{(0)}, 0) \in \text{Lip}(I, L^1(\mathbb{R}))$, 则对任意的 $t > 0$, 存在不依赖于 M 的常数 $L > 0$, 使得

$$d_M(P_t^{M,h}V(0), V(t)) \leq L \int_0^t \left(\liminf_{s \rightarrow 0^+} \frac{d_M(P_s^{M,h}V(\tau), V(s + \tau))}{s} \right) d\tau, \quad (4.1)$$

其中 $P_t^{M,h}$ 和 $\mathcal{D}^M$ 由命题 3.1 给出.

定理 1.1 的证明 首先, 对任意的参数 $h > 0$ 和 $\nu > 0$, 用分片常值函数 $(\rho_2^{(0),h,\nu}, u_1^{(0),h,\nu})(x)$ 逼近初值 $(\rho_2^{(0)}, u_1^{(0)})(x)$ 使得

$$\|(\rho_2^{(0),h,\nu} - \rho_2^{(0)}, u_1^{(0),h,\nu} - u_1^{(0)})\|_{L^1} \rightarrow 0, \quad h, \nu \rightarrow 0, \quad (4.2)$$

并且假设此近似初值 $(\rho_2^{(0),h,\nu}, u_1^{(0),h,\nu})(x)$ 只有有限个间断点. 由命题 3.3 可知, 若 $\text{T.V.}(a(x))$ 充分小, 则对任意的 $h > 0$ 和 $\nu > 0$ 充分小, 以 $(\rho_2^{(0),h,\nu}, u_1^{(0),h,\nu})(x)$ 为初值的方程组 (1.6) 存在唯一的整体 (h, ν) -近似解 $(\rho_2^{M,h,\nu}, u_1^{M,h,\nu})(x, t)$ 具有有限个间断且满足

$$\|(\rho_2^{M,h,\nu} - \rho_2^M, u_1^{M,h,\nu} - u_1^M)(x, t)\|_{L^1} \rightarrow 0, \quad h, \nu \rightarrow 0 \quad (4.3)$$

以及

$$\text{T.V.}\{(\rho_2^{M,h,\nu}, u_1^{M,h,\nu})(x, t)\} < \text{T.V.}\{(\rho_2^{(0)}, u_1^{(0)})(x)\} + \text{T.V.}(a(x)). \quad (4.4)$$

记 $\Lambda_c = \{x_k \mid x_k \neq jh, 1 \leq k \leq N\}$ 和 $\Lambda_0 = \{jh \mid j \in \mathbb{Z}\}$ 分别表示 $(\rho_2^{M,h,\nu}, u_1^{M,h,\nu})(x, t)$ 中所有沿着方程组 (1.6) 两族特征传播的间断和零波的集合.

令

$$\begin{aligned}
 U_w^{M,h,\nu}(x, t) & = (\rho^{(0)} + \rho_2^{M,h,\nu}(x, t)M^2, u_1^{M,h,\nu}(x, t)M)^\top, \\
 U_0^{M,h,\nu}(x) & = U_w^{M,h,\nu}(x, 0) = (\rho^{(0)} + \rho_2^{(0),h,\nu}(x)M^2, u_1^{(0),h,\nu}(x)M)^\top,
 \end{aligned} \quad (4.5)$$

则 $U_w^{M,h,\nu}(x, t)$ 的间断由 $(\rho_2^{M,h,\nu}, u_1^{M,h,\nu})(x, t)$ 确定. 假设对任意的 $\tau > 0$, 取 $s > 0$ 充分小, 使得在区间 $[t, t + \tau]$ 内, $U_w^{M,h,\nu}(x, t)$ 的间断互不相交. $P_t^{M,h}$ 是由命题 3.1 给出的 Lipschitz 半群, 则 $P_s^{M,h}U_w^{M,h,\nu}(\tau)$

是由以 $U_w^{M,h,\varepsilon}(\tau)$ 为初值的齐次 Riemann 问题 (2.2) 的解和非齐次方程 (2.1) 的 h -Riemann 解拼接起来的. 因此, 对于 $U_w^{M,h,\nu}(x, \tau)$ 上的每个间断, 当 $M \in (0, M_0)$ 时, 应用引理 3.1 和 3.2 可推出

$$d_M(P_s^{M,h}U_w^{M,h,\nu}(\tau), U_w^{M,h,\nu}(s+\tau)) \leq O(1)(\text{T.V.}\{(\rho_2^{(0)}(x), u_1^{(0)}(x))\} + \text{T.V.}(a))M^3s, \quad (4.6)$$

其中 $O(1)$ 不依赖于 M 、 h 、 ν 和 s .

再利用引理 4.1 和估计 (4.6), 进一步可得

$$\begin{aligned} d_M(P_t^{M,h}U_0^{M,h,\nu}, U_w^{M,h,\nu}(t)) &\leq L \int_0^t \left(\liminf_{s \rightarrow 0^+} \frac{d_M(P_s^{M,h}U_w^{M,h,\nu}(\tau), U_w^{M,h,\nu}(s+\tau))}{s} \right) d\tau \\ &\leq O(1)(\text{T.V.}\{(\rho_2^{(0)}(x), u_1^{(0)}(x))\} + \text{T.V.}(a))M^3t, \end{aligned} \quad (4.7)$$

其中 $O(1)$ 不依赖 M 、 h 、 ν 和 t .

假设 $U^M(x, t) = P_t^M U_0^M(x)$ 为初值问题 (1.3) 和 (1.4) 的解 $U_w^M(x, t) = (\rho^{(0)} + \rho_2^M(x, t)M^2, u_1^M(x, t)M)^\top$, 则

$$\begin{aligned} d_M(U^M(t), U_w^M(t)) &\leq d_M(P_t^M U_0^M, P_t^{M,h} U_0^M) + d_M(P_t^{M,h} U_0^M, P_t^{M,h} U_0^{M,h,\nu}) \\ &\quad + d_M(P_t^{M,h} U_0^{M,h,\nu}, U_w^{M,h,\nu}(t)) + d_M(U_w^{M,h,\nu}(t), U_w^M(t)). \end{aligned} \quad (4.8)$$

由命题 3.2 和 (4.3) 知, 当 $h \rightarrow 0$, $\nu \rightarrow 0$ 时,

$$d_M(P_t^M U_0^M, P_t^{M,h} U_0^M) \rightarrow 0 \quad (4.9)$$

以及

$$\begin{aligned} d_M(P_t^{M,h} U_0^M, P_t^{M,h} U_0^{M,h,\nu}) &\leq L d_M(U_0^M, U_0^{M,h,\nu}) \\ &\leq LM^2(\|\rho_2^{(0),h,\nu} - \rho_2^{(0)}\|_{L^1} + \|u_1^{(0),h,\nu} - u_1^{(0)}\|_{L^1}) \rightarrow 0. \end{aligned} \quad (4.10)$$

另一方面, 由命题 3.3 可知, 存在子序列 $h = h_k \rightarrow 0$ 和 $\nu = \nu_k \rightarrow 0$, 使得

$$d_M(U_w^{M,h,\nu}(t), U_w^M(t)) \leq M^2(\|\rho_2^{M,h,\nu}(t) - \rho_2^M(t)\|_{L^1} + \|u_1^{M,h,\nu}(t) - u_1^M(t)\|_{L^1}) \rightarrow 0. \quad (4.11)$$

最后, 利用估计 (4.7)–(4.11) 以及度量 d_M 定义, 我们就可以完成定理 1.1 的证明. $\square$

致谢 感谢审稿人对本文提出宝贵的修改意见.

参考文献

- 1 Majda A. Compressible Fluid Flow and Systems of Conservation Laws in Several Space Variables. New York: Springer, 1984
- 2 Chen G Q, Christoforou C, Zhang Y. Continuous dependence of entropy solutions to the Euler equations on the adiabatic exponent and Mach number. Arch Ration Mech Anal, 2008, 189: 97–130
- 3 Alazard T. A minicourse on the low mach number limit. Discrete Contin Dyn Syst Ser S, 2008, 1: 365–404
- 4 Colombo R M, Guerra G, Schleper V. The compressible to incompressible limit of one dimensional Euler equations: The non smooth case. Arch Ration Mech Anal, 2016, 219: 701–718
- 5 Feireisl E, Klingenberg C, Markfelder S. On the low Mach number limit for the compressible Euler system. SIAM J Math Anal, 2019, 51: 1496–1513
- 6 Klainerman S, Majda A. Compressible and incompressible fluids. Comm Pure Appl Math, 1982, 35: 629–651
- 7 Li M J, Wang T Y, Xiang W. Low Mach number limit of multidimensional steady flows on the airfoil problem. Calc Var Partial Differential Equations, 2020, 59: 68

- 8 Métivier G, Schochet S. The incompressible limit of the non-isentropic Euler equations. *Arch Ration Mech Anal*, 2001, 158: 61–90
- 9 Schochet S. The mathematical theory of low Mach number flows. *ESAIM Math Model Numer Anal*, 2005, 39: 441–458
- 10 Wang T Y, Zhang J J. Low Mach number limit of steady flows through infinite multidimensional largely-open nozzles. *J Differential Equations*, 2020, 269: 1863–1903
- 11 Bressan A. *Hyperbolic Systems of Conservation Laws. The One Dimensional Cauchy Problem.* Oxford: Oxford University Press, 2000
- 12 Chen S X, Geng J B, Zhang Y. Isentropic approximation of quasi-one-dimensional unsteady nozzle flow. *SIAM J Math Anal*, 2009, 41: 1693–1712
- 13 Geng J B, Zhang Y. Irrotational approximation to the quasi-1-d gas flow. *Z Angew Math Phys*, 2009, 60: 1053–1073
- 14 Liu T P. Nonlinear stability and instability of transonic flows through a nozzle. *Comm Math Phys*, 1982, 83: 243–260
- 15 Liu T P. Transonic gas flow in a duct of varying area. *Arch Ration Mech Anal*, 1982, 80: 1–18
- 16 Amadori D, Gosse L, Guerra G. Global BV entropy solutions and uniqueness for hyperbolic systems of balance laws. *Arch Ration Mech Anal*, 2002, 162: 327–366
- 17 Smoller J. *Shock Waves and Reaction-Diffusion Equations.* New York: Springer, 1994

Low Mach number limit for quasi-one-dimensional isentropic Euler flow

Jie Kuang & Yongqian Zhang

Abstract This paper is devoted to studying the low Mach number limit for the quasi-one-dimensional isentropic Euler equations in $BV \cap L^1$ space. Under assumptions that the total variation of the cross section of the nozzle is sufficiently small and the initial data is away from vacuum, by using the L^1 -stability estimates and the method of the standard Riemann semigroup, we rigorously prove that the solution can be expanded in the powers of small Mach number and that its coefficients satisfy a linear acoustic equation with the source term.

Keywords quasi-one-dimensional isentropic Euler flow, low Mach number limit, weak solutions, standard Riemann semigroup

MSC(2020) 35B07, 35B20, 35D30, 76J20

doi: 10.1360/SSM-2020-0237