

平面三次系统的一类极限环分布

李 继 彬

(昆明工学院数学教研室)

摘 要

本文得到以下结果:

1. 举出一个数值系数方程的例子, 证明平面三次系统存在结构为 $(1)+(1)+(1) \supset ((1)+(1))$ 的极限环分布 (见图 1)
2. 对形如 $(1, 1')$ 与 $(1, 2')$ 的非线性振动系统, 得到当条件 $xg(x) > 0$ 不满足时, 存在包围多个奇点的极限环的若干充分条件.

对于右端不含二次项的平面三次微分系统

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= y + \lambda x + \sum_{i+j=3} a_{ij} x^i y^j, \\ \frac{dy}{dt} &= -x - \lambda y + \sum_{i+j=3} b_{ij} x^i y^j,\end{aligned}\quad (E_3^{(3)})$$

1965 年, Сибирский^[1] 用 Баутин 的方法证明了系统 $(E_3^{(3)})$ 在原点小邻域内可能出现 5 个极限环. 1975 年, 应用秦元勋与蒲富全^[2] 的方法, 史松龄^[3] 给出了一个具体的例子, 使文献 [1] 的断言得到实现. 本文利用可积系统的闭轨线作地形系的 Poincaré 方法, 讨论属于 $(E_3^{(3)})$ 的一个数值系数方程:

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= y - \varepsilon y^3 = P(x, y), \\ \frac{dy}{dt} &= x + \alpha y - x^3 - x^2 y = Q(x, y),\end{aligned}\quad (E)_\alpha$$

其中 $\varepsilon = 10^{-16}$, $\alpha = 1 - \lambda$, $0 < \lambda < 10^{-95}$.

一、几个存在性定理

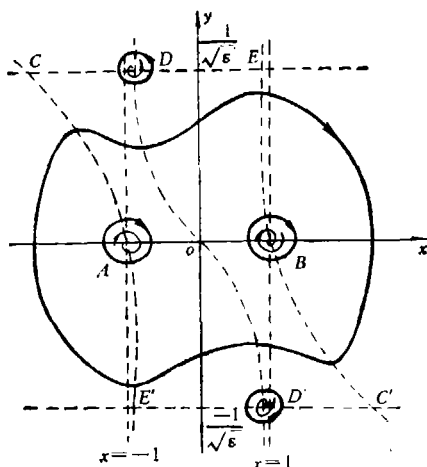
对于二阶非线性振动方程

$$\ddot{x} + f(x, \dot{x})\dot{x} + g(x) = 0 \quad (1.1')$$

与

$$\ddot{x} + f(x)\dot{x} + g(x) = 0, \quad (1.2')$$

当 $xg(x) > 0$ 时, 其极限环存在性已有许多文献论述^[4-6], 但若上述条件不满足, 相平面上原

图 1 $(1)+(1)+(1) \supset ((1)+(1))$ 结构示意图

点是鞍点时,结果尚不多见. 考虑到理论研究及应用方面的需要,本节作一些初步讨论. 方程 (1.1') 与 (1.2') 等价于方程组

$$\frac{dx}{dt} = y, \quad \frac{dy}{dt} = -g(x) - f(x, y)y, \quad (1.1)$$

与

$$\frac{dx}{dt} = y, \quad \frac{dy}{dt} = -g(x) - f(x)y. \quad (1.2)$$

设函数 $g(x)$, $f(x)$, $f(x, y)$ 关于变元连续,满足初值问题解的唯一性条件,以下不再重述. 对函数 $g(x)$ 假设

(I) $g(x)$ 恰有三个零点, $x = -\xi_1, 0, \xi_2$, $-\xi_1 < 0 < \xi_2$, 且 $g'(0) < 0$, $g'(-\xi_1) > 0$, $g'(\xi_2) > 0$,

$$xg(x) \begin{cases} < 0, & \text{当 } x \neq 0, -\xi_1 < x < \xi_2, \\ > 0, & \text{当 } -\infty < x < -\xi_2, \xi_2 < x < +\infty. \end{cases}$$

记 $G(x) = \int_0^x g(\tau) d\tau$, 假设 $G(\pm\infty) = +\infty$.

当条件 (I) 满足时,在相平面上,保守系统

$$\ddot{x} + g(x) = 0 \quad \left(\text{或等价方程组 } \frac{dx}{dt} = y, \frac{dy}{dt} = -g(x) \right), \quad (1.3)$$

以点 $A(-\xi_1, 0)$, $B(\xi_2, 0)$ 为中心,原点 $o(0, 0)$ 为鞍点. 系统 (1.3) 有初积分

$$\lambda(x, y) = \frac{1}{2} y^2 + G(x) = C. \quad (1.4)$$

当 $0 < C < +\infty$ 时, (1.4) 式是包围奇点 A, o, B 的闭积分曲线族,当 $C = 0$ 时, (1.4) 式是在原点 o 相互毗连并分别包围着奇点 A 与 B 的“ ∞ ”形鞍点分界线环,当 $C < 0$ 时, (1.4) 式或是分别包围 A 与 B 的两支闭曲线族,或是虚迹曲线.

为简单起见,用 C_K 表示包围 K 个奇点的极限环. 取 (1.4) 式作为地形曲线,用 Poincaré-Bendixson 环域定理可以证明

定理 1. 若方程组 (1.1) 中函数 $g(x)$ 满足条件 (I), 并设

(II₁) $f(x, y) = 0$ 的图形为包含原点于其内的闭 Jordan 曲线, 在该闭曲线内部与外部, $f(x, y)$ 异号.

(III₁) 联立方程组

$$\begin{cases} f(x, y) = 0, \\ \frac{1}{2}y^2 + G(x) = 0 \end{cases} \quad (1.5)$$

无实交点; 则方程组 (1.1) 至少存在一个 C_1 .

以下讨论方程组 (1.2). 作 Liénard 变换 $y_1 = y + F(x)$, $x = x$, 其中

$$F(x) = \int_0^x f(\tau) d\tau,$$

方程组 (1.2) 等价于方程组

$$\frac{dx}{dt} = y - F(x), \quad \frac{dy}{dt} = -g(x). \quad (1.6)$$

经过变换, 方程组 (1.2) 的奇点 $A(-\xi_1, 0)$, $B(\xi_2, 0)$, $o(0, 0)$ 变为 Liénard 平面上的奇点 $A'(-\xi_1, F(-\xi_1))$, $B'(\xi_2, F(\xi_2))$ 与 $o'(0, 0)$. 在 Liénard 平面上考察曲线 (1.4) 式, 设 $\lambda(x, y) = 0$ 与正 x 轴交于点 $(x_1, 0)$, 与负 x 轴交于点 $(x_2, 0)$. 取闭曲线族

$$\mu(x, y) = \frac{1}{2}(y - F(x))^2 + G(x) = C \quad (1.7)$$

作地形曲线, 可得

引理 1. 设方程组 (1.6) 中 $g(x)$ 满足条件 (I), 并且还满足

(II₂) 当 $x \in (x_2 - \varepsilon, x_1 + \varepsilon)$, $\varepsilon > 0$ 时, $f(x) < 0$. 则存在包含原点 o' 与奇点 A' , B' 于其内部的闭曲线 L_1 , 使得方程组 (1.6) 的一切轨线与 L_1 相交者, 都从内部穿到外部.

取引理 1 中的 L_1 作 Poincaré-Bendixson 环域的内境界线. 用文献 [7] 的方法构造环域的外境界线, 可以得到便于估计极限环位置的较弱的存在定理.

设函数 $F(x)$ 满足条件

(II₂) 条件 (II₂) 成立, 且存在数

$$-m_1 < -n_1 < x_2 < -\xi_1 < 0 < \xi_2 < x_1 < n_2 < m_2, \\ \Delta = \max_{x \in [-n_1, n_2]} |F(x)|,$$

使得

$$\begin{aligned} F(-n_1) &= F(0) = F(n_2) = 0, \\ F(x) &\geq -\Delta, \text{ 当 } x \in (0, n_2); \quad F(x) > 0, \text{ 当 } x \in (n_2, m_2), \\ F(x) &\leq \Delta, \text{ 当 } x \in (-n_1, 0); \quad F(x) < 0, \text{ 当 } x \in (-m_1, -n_1). \end{aligned}$$

引入可依次计算的常数记号

$$\begin{aligned} l_m &= \min [G(-m_1), G(m_2)], \quad l_n^* = \max [G(-n_1), G(n_2)], \\ l_n &= \min [G(-n_1), G(n_1)], \\ \sigma_{mn} &= \max [G(-m_1) - G(-n_1), G(m_2) - G(n_2)], \\ l_\xi^* &= \max [|G(-\xi_1)|, |G(\xi_2)|], \end{aligned}$$

$$l_{\xi} = \min [|G(-\xi_1)|, |G(\xi_2)|],$$

$$A = [(\sqrt{2\sigma_{mn}} - \Delta)^2 + 2l_n]^{\frac{1}{2}},$$

$$B_n = [(\Delta + \sqrt{2(l_n^* + l_{\xi}^*)})^2 - 2l_{\xi}]^{\frac{1}{2}},$$

$$\tilde{B} = [(\Delta + \sqrt{A^2 + 2l_{\xi}^*})^2 - 2l_{\xi}]^{\frac{1}{2}},$$

$$D_n = [(\Delta + \sqrt{B_n^2 - 2l_{\xi}^*})^2 - 2l_{\xi}]^{\frac{1}{2}},$$

$$\tilde{D} = [(\Delta + \sqrt{\tilde{B}^2 + 2l_{\xi}^*})^2 - 2l_{\xi}]^{\frac{1}{2}},$$

$$H_n = (D_n^2 - 2l_m)^{\frac{1}{2}},$$

$$\tilde{H} = (\tilde{D}^2 - 2l_m)^{\frac{1}{2}}.$$

定理 2. 若方程组 (1.6) 的右端函数满足条件 (I), (II₁), 并且满足

(III₂) 当 $\sqrt{2\sigma_{mn}} \leq \Delta$ 时, $F(m_2) \geq -\Delta + H_n > 0$, $F(-m_1) \leq \Delta - H_n < 0$;

或满足

(III₂) 当 $\sqrt{2\sigma_{mn}} \geq \Delta$ 时, $F(m_2) \geq -\Delta + \tilde{H} > 0$, $F(-m_1) \leq \Delta - \tilde{H} < 0$.

则方程组 (1.6) 在矩形域: $-m_1 < x < m_2$, $|y| < (B_n^2 + 2l_{\xi}^*)^{\frac{1}{2}}$ 内存在 C_3 , 其中 B_n 等于 B_n 或 $\tilde{B}$ 视方程组 (1.6) 满足条件 (III₂) 还是 (III₃) 而定.

若记

$$l_m^* = \max [G(-m_1), G(m_2)], \quad B_m = [(\Delta + \sqrt{2(l_m^* + l_{\xi}^*)})^2 - 2l_{\xi}]^{\frac{1}{2}},$$

$$D_m = [(\Delta + \sqrt{B_m^2 + 2l_{\xi}^*})^2 - 2l_{\xi}]^{\frac{1}{2}}, \quad H_m = (D_m^2 - 2l_m)^{\frac{1}{2}},$$

可得条件稍强, 但计算较简单的下述结论:

定理 3. 设方程组 (1.6) 中右端函数满足条件 (I), (II₂), 并满足 (III₃): 存在数 $-m_1 < x_2 < -\xi_1 < 0 < \xi_2 < x_1 < m_2$, $\Delta > 0$, 使得

$$F(x) \geq -\Delta, \quad \text{当 } x \in (0, m_2), \text{ 而 } F(m_2) \geq -\Delta + H_m > 0,$$

$$F(x) \leq \Delta, \quad \text{当 } x \in (-m_1, 0), \text{ 而 } F(-m_1) \leq \Delta - H_m < 0,$$

则方程组 (1.6) 在带域 $-m_1 < x < m_2$ 中存在 C_3 .

据引理 1, 仿丁大正一文¹⁾证明方法, 可得

定理 4. 设方程组 (1.6) 的右端函数满足条件 (I), (II₂), 并设 $F(x)$ 还满足 Драгилёв 定理 (见文献 [5, p.91]) 的条件, 即

(III₄) 存在常数 $M > 0$, $K > K'$ 使 $F(x) \geq K$, 当 $x > M$; $F(x) \leq K'$, 当 $x < -M$,

则方程组 (1.6) 至少存在一个 C_3 .

文献 [8] 给出 Liénard 方程的一个较弱的存在定理, 在构造环域外境界线时, 只用到 $\frac{f(x)}{g(x)}$ 与 $F(x)$ 等函数的极限性质, 故该定理可推广为

定理 5. 设方程组 (1.6) 满足条件 (I), (II₂), 并满足

1) 丁大正的 "Liénard 方程极限环的存在性" 一文, 见北京大学 1981 年大连全国微分方程定性理论会议交流资料.

$$(III_5) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = +\infty$$

$$(IV_5) \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = +\infty, \text{ 同时有 } \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)/F(x) = m < 0 \quad (m \text{ 为有限或 } -\infty),$$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)/F(x)f(x) = l > 1$ (l 为有限数或 $+\infty$), 则方程组 (1.6) 存在 C_3 .

二、 $(E)_\alpha$ 的极限环分布

方程组 $(E)_\alpha$ 有九个有限远奇点, 奇点 $o(0, 0)$, $A(-1, 0)$, $B(1, 0)$ 固定; 奇点 $C(-\xi_3, \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}})$, $D(-\xi_4, \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}})$, $E(\xi_5, \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}})$ 及它们关于原点的对称点 C' , D' , E' 随 α 的改变, 在直线 $y = \pm \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$ 上移动. 其中 $-\xi_3, -\xi_4, \xi_5$ 是三次代数方程

$$\sqrt{\varepsilon} x^3 + x^2 - \sqrt{\varepsilon} x - \alpha = 0 \quad (\alpha > 0) \quad (2.1)$$

的实根. $(E)_\alpha$ 的水平与垂直等倾线如图 2 所示, 当参数 α 通过 1 而改变时, 水平等倾线产生

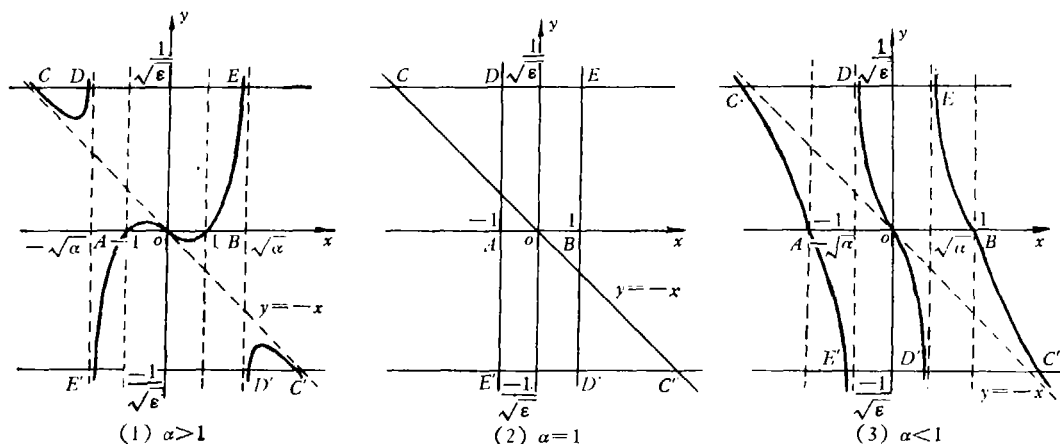


图 2 $(E)_\alpha$ 的水平与垂直等倾线

突变. 通过指标计算可知, A, B, D 与 D' 是指标等于 $+1$ 的奇点, 其余奇点是鞍点. 此外, $(E)_\alpha$ 有无穷远奇点 $(1, -u_1, 0)$ 与 $(1, -u_2, 0)$, $-u_1 < -u_2 < -1$, 前者是不稳定结点, 后者是鞍点, 其中 $(-u_1)$ 与 $(-u_2)$ 是四次代数方程

$$\varepsilon u^4 + u + 1 = 0$$

的两个实根.

先设 $\varepsilon = 0$, 此时 $(E)_\alpha$ 等价于 Liénard 方程组

$$\frac{dx}{dt} = y - \left(\frac{1}{3} x^3 - \alpha x \right), \quad \frac{dy}{dt} = -(x^3 - x). \quad (2.2)$$

对应于系统 (1.3) 中的 $g(x) = x^3 - x$, (1.4) 式化为

若 $C = 0$ 时, 当 $x_{1,2} = \pm \sqrt{2}$ 时曲线 (2.3) 与 x 轴相交.

引理 2. 设 $\alpha = 2.5$, 则 $(E)_\alpha$ 至少存在一个包围 A , o 与 B 的内稳定 C_3 .

证. 由方程组 (2.2),

$$G(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{2}x^2, \quad F(x) = \frac{1}{3}x^3 - \alpha x,$$

当 $\alpha = 2.5$ 时, 定理 2 的条件 (I), (II₂) 成立, 其中 $n_1 = n_2 \approx 2.7386$, $\Delta \approx 2.6352$, $\xi_1 = \xi_2 = 1$. 粗略地取 $m_1 = m_2 = 4$, 容易算出定理 2 中各常数:

$$l_m = l_n = 56, \quad \sqrt{2\sigma_{mn}} = 9.5590, \quad l_\xi^* = l_\xi = |G(1)| = \frac{1}{4},$$

$$A = 8.28, \quad \tilde{B} = 10.9228, \quad \tilde{D} = 13.5625,$$

$$\tilde{H} = 8.4818, \quad \tilde{B}^2 - 2l_\xi^* = 10.9457,$$

$$F(-m_1) = F(m_2) = F(4) = 11.3333,$$

$$-\Delta + \tilde{H} = 5.8456.$$

显然定理 2 的条件 (III₂) 成立, 在 Liénard 平面上的矩形: $-4 < x < 4$, $|y| < 10.9457$ 内存在 C_3 , 且 C_3 内稳定. 回到 $\varepsilon = 0$ 时的方程 $(E)_\alpha$, 在矩形 $R: -4 < x < 4$, $|y| < 13.5809$ 之内存在内稳定 C_3 . 当 $\varepsilon = 10^{-16}$ 时, 易证 $(E)_\alpha$ 的方向场仍然横截于 $\varepsilon = 0$ 时所构造的 Poincaré-Bendixson 环域的内外边界线, 故对于 $(E)_\alpha$, 引理 2 的结论成立.

容易验证, 在带域 $|y| < \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$ 内, $(E)_\alpha$ 所定义的向量场随参数 α 减少沿顺时针方向旋

转, 因此, 当 α 从 2.5 减少时, C_3 单调地收缩.

引理 3. 当 $2.5 \geq \alpha \geq 1$ 时, 对于系统 $(E)_\alpha$, 不存在分别围绕奇点 A 与 B 的极限环和鞍点分界线环.

证. 因 $(E)_\alpha$ 的方向场关于原点 o 对称, 只需对奇点 B 证明本引理. 设 $\alpha = 1$, 在右半相平面内, $(E)_{\alpha=1}$ 的过鞍点 o 的 α -分界线和 ω -分界线分别在原点与直线 $y = \left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)x$ 及 $y = -\left(\frac{\sqrt{5}-1}{3}\right)x$ 相切, 由图 2 的 (2) 易见, 右半平面内两分界线位于区域

$$S: x > 0, x + y > 0, -\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right) < y < \frac{\sqrt{5}+1}{2}$$

之内. 取 Dulac 函数 $B(x, y) = \frac{x}{x+y}$, 则对于 $(E)_{\alpha=1}$, 当 $(x, y) \in S$ 时,

$$\frac{\partial}{\partial x}(BP) + \frac{\partial}{\partial y}(BQ) = \frac{y^2(1-\varepsilon y^2)}{(x+y)^2} \geq 0,$$

故在 S 内, $(E)_{\alpha=1}$ 不可能存在闭轨线与鞍点分界线环. 当 $\alpha > 1$ 时, 引理 3 的结论由旋转向量场理论可以推出.

用经典的 Poincaré-Liapunov 程序可得

引理 4. 对于微分方程组

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= -ny + b_3y^2 + b_7y^3, \\ \frac{dy}{dt} &= mx + a_1x^2 + a_2xy + a_4x^3 + a_5x^2y.\end{aligned}\quad (2.4)$$

取函数: $F(x, y) = F_2(x, y) + F_3(x, y) + F_4(x, y)$,

$$F_2(x, y) = \frac{1}{2}(mx^2 + ny^2),$$

$$F_3(x, y) = \frac{1}{3}a_1x^3 - \frac{mb_3 + a_2n}{3m}y^3,$$

$$F_4(x, y) = \frac{a_4}{4}x^4 - \frac{A}{8n}x^3y + \frac{A}{8m}xy^3 + \frac{B}{4m^2}y^4,$$

则有

$$\left. \frac{dF}{dt} \right|_{(2.4)} = -g_1(x^2 + y^2)^2 + \text{H. o. t}, \quad (2.5)$$

其中 $m > 0$, $n > 0$, $A = \frac{n}{m}(a_1a_2 - a_5)$, $B = (a_2n + mb_3) - m^2b_7$, $g_1 = \frac{A}{8mn}$, H. o. t 表示多项式含 x, y 高于四次的项, 故当 $g_1 > 0$ ($g_1 < 0$) 时, 方程组 (2.4) 的原点是中心型稳定 (不稳定) 焦点.

兹考察包围奇点 A, B 与 D, D' 的极限环的存在性. 为此将原点移到 $B(1, 0)$. 记 $\lambda = 1 - \alpha$, 并令 $\tau = -t$, 得方程组

$$\begin{aligned}\frac{dx}{d\tau} &= -y + \varepsilon y^3, \\ \frac{dy}{d\tau} &= 2x + \lambda y + 3x^2 + 2xy + x^3 + x^2y.\end{aligned}\quad (2.6)_\lambda$$

同样, 将原点移到方程 $(E)_{\alpha=1}$ 的奇点 $D\left(-1, \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\right)$, 方程 $(E)_\alpha$ 化为

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= -2y - 3\sqrt{\varepsilon}y^2 - \varepsilon y^3, \\ \frac{dy}{dt} &= 2\left(\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} - 1\right) - \lambda y - \left(\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} - 3\right)x^2 + 2xy - x^3 - x^2y - \frac{\lambda}{\sqrt{\varepsilon}}.\end{aligned}\quad (2.7)_\lambda$$

对于方程组 $(2.6)_{\lambda=0}$, 引理 4 中给出的函数 F_i ($i = 2, 3, 4$) 及 g_1 为

$$\begin{aligned}F_2 &= \frac{1}{2}(2x^2 + y^2), & F_3 &= x^3 - \frac{1}{3}y^3, \\ F_4 &= \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{4}x^3y + \frac{1}{8}xy^3 + \frac{1}{8}(1 - 2\varepsilon)y^4, \\ g_1 &= \frac{1}{8}.\end{aligned}\quad (2.8)$$

同样, 方程组 $(2.7)_{\lambda=0}$ 的相应函数与 $\tilde{g}_1$ 为

$$\tilde{F}_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} - 1\right)x^2 + y^2, \quad \tilde{F}_3 = -\frac{1}{3}\left(\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} - 3\right)x^3 + \frac{3\varepsilon - \sqrt{\varepsilon}}{3(1 - \sqrt{\varepsilon})}y^3,$$

$$\begin{aligned}\tilde{F}_4 &= -\frac{1}{4}x^4 - \frac{\sqrt{\varepsilon}}{4(1-\sqrt{\varepsilon})}x^3y + \frac{\varepsilon}{4(1-\sqrt{\varepsilon})^2}xy^3 + \frac{\varepsilon(2-5\sqrt{\varepsilon}+\varepsilon)}{4(1-\sqrt{\varepsilon})^2}y^4, \\ \tilde{g}_1 &= \frac{\varepsilon\sqrt{\varepsilon}}{8(1-\sqrt{\varepsilon})^2}.\end{aligned}\quad (2.9)$$

用符号 X_2, X_3, Y_2, Y_3 分别表示方程组 (2.6) 与 (2.7) 右端的二次与三次齐式, 在圆周 $x^2 + y^2 = \rho^2 (\rho > 0)$ 上, 按不等式

$$\left| \sum_{i+j=k} a_{ij}x^i y^j \right| \leq \rho^k \sum |a_{ij}|$$

估值, 对于方程组 (2.6)₁ 得不等式

$$\begin{aligned}|X_2| &= 0, \quad |X_3| \leq \varepsilon \rho^2, \quad |Y_2| \leq 5\rho^2, \quad |Y_3| \leq 2\rho^3, \\ |F_2| &\leq 2\rho^2, \quad |F_3| \leq 2\rho^3, \quad |F_4| \leq \rho^4, \quad \left| \frac{\partial F_2}{\partial x} \right| \leq 2\rho, \quad \left| \frac{\partial F_2}{\partial y} \right| \leq \rho, \\ \left| \frac{\partial F_3}{\partial x} \right| &\leq 3\rho^2, \quad \left| \frac{\partial F_3}{\partial y} \right| \leq \rho^2, \quad \left| \frac{\partial F_4}{\partial x} \right| \leq 2\rho^3, \\ \left| \frac{\partial F_4}{\partial y} \right| &\leq 2\rho^3.\end{aligned}\quad (2.10)$$

对于方程组 (2.7) 得不等式

$$\begin{aligned}|X_2| &\leq 3\sqrt{\varepsilon}\rho^2, \quad |X_3| \leq \varepsilon\rho^3, \quad |Y_2| \leq \left(\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} + 5\right)\rho^2, \\ |Y_3| &\leq 2\rho^3, \quad |\tilde{F}_2| \leq \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\rho^2, \quad |\tilde{F}_3| \leq \frac{1}{3\sqrt{\varepsilon}}\rho^3, \quad |\tilde{F}_4| \leq \frac{1}{2}\rho^4, \\ \left| \frac{\partial \tilde{F}_2}{\partial x} \right| &\leq \frac{2}{\sqrt{\varepsilon}}\rho, \quad \left| \frac{\partial \tilde{F}_2}{\partial y} \right| \leq 2\rho, \quad \left| \frac{\partial \tilde{F}_3}{\partial x} \right| \leq \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\rho^2, \quad \left| \frac{\partial \tilde{F}_3}{\partial y} \right| \leq 2\sqrt{\varepsilon}\rho^2, \\ \left| \frac{\partial \tilde{F}_4}{\partial x} \right| &\leq 2\rho^3, \quad \left| \frac{\partial \tilde{F}_4}{\partial y} \right| \leq \sqrt{\varepsilon}\rho^3.\end{aligned}\quad (2.11)$$

根据引理 4, 沿着方程组 (2.6)₁₌₀ 的轨线

$$\frac{dF}{d\tau} \Big|_{(2.6)_{1=0}} = -\frac{1}{8}(x^2 + y^2)^2 + \text{H. o. t} = -\frac{1}{8}\rho^4 + \text{H. o. t},$$

其中

$$\begin{aligned}|\text{H. o. t}| &= \left| \frac{\partial F_3}{\partial x} X_3 + \frac{\partial F_3}{\partial y} Y_3 + \frac{\partial F_4}{\partial x} X_2 + \frac{\partial F_4}{\partial y} Y_2 + \frac{\partial F_4}{\partial x} X_3 \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial F_4}{\partial y} Y_3 \right| \leq 13\rho^5 + 5\rho^6.\end{aligned}$$

于是

$$\frac{dF}{d\tau} \Big|_{(2.6)_{1=0}} \leq -\frac{1}{16}\rho^4 + \rho^4 \left(5\rho^2 + 13\rho - \frac{1}{16} \right).$$

若取 $0 < \rho \leq 4.79 \times 10^{-3}$, 则上式右边第二项小于零, 故

$$\frac{dF}{d\tau} \Big|_{(2.6)_{1=0}} < -\frac{1}{16}\rho^4. \quad (2.12)$$

同样由引理 4, 对于方程组 (2.7)_{λ=0}, 有全导数

$$\left. \frac{d\tilde{F}}{dt} \right|_{(2.7)_{\lambda=0}} = -\frac{\varepsilon\sqrt{\varepsilon}}{8(1-\sqrt{\varepsilon})^2} (x^2 + y^2)^2 + \text{H. o. t} \leq -\frac{1}{8} \varepsilon \sqrt{\varepsilon} \rho^4 + \text{H. o. t},$$

其中

$$|\text{H. o. t}| \equiv \left| \frac{\partial \tilde{F}_3}{\partial x} X_3 + \cdots + \frac{\partial \tilde{F}_4}{\partial y} Y_3 \right| \leq 2\rho^5 + 3\sqrt{\varepsilon} \rho^6,$$

故

$$\left. \frac{d\tilde{F}}{dt} \right|_{(2.7)_{\lambda=0}} < -\frac{1}{16} \varepsilon \sqrt{\varepsilon} \rho^4 + \rho^4 \left(3\sqrt{\varepsilon} \rho^2 + 2\rho - \frac{1}{16} \varepsilon \sqrt{\varepsilon} \right).$$

只要 $0 < \rho < 3.125 \times 10^{-18}$, 上式右边第二项就小于零, 从而

$$\left. \frac{d\tilde{F}}{dt} \right|_{(2.7)_{\lambda=0}} < -\frac{1}{16} \varepsilon \sqrt{\varepsilon} \rho^4. \quad (2.13)$$

引理 5. 当 $0 < \lambda < \lambda_0 = 3.125 \times 10^{-6}$ 时, 在 $(E)_\alpha$ 的奇点 A 与 B 的小邻域内, 分别恰有一个不稳定极限环 C_1 .

证. 考察奇点 B 的小邻域, 兹对方程组 (2.6), 证明曲线 $F(x, y) = 10^{-8}$ 在圆 $\rho = \rho_0 = 10^{-3}$ 内存在闭分支, 方程组 (2.6) 的方向场横截该闭分支, 因而构成 Poincaré-Bendixson 环域的外境界线.

事实上, 根据 (2.8) 与 (2.10) 式,

$$F(x, y)|_{\rho=10^{-3}} \geq \rho^2 \left(\frac{1}{2} - 2\rho - \rho^2 \right) \geq 10^{-7},$$

故曲线 $F(x, y) = 10^{-8}$ 在圆 $\rho = \rho_1 = 10^{-3}$ 内存在闭分支, 取其中的一支, 记为 L_1 . 现证对于方程组 (2.6), 当 $0 < \lambda < \lambda_0$ 时, L_1 是无切环线, 由于

$$\rho^2 \left(\frac{1}{2} - 2\rho - \rho^2 \right) \leq F(x, y) = 10^{-8} \leq \rho^2 (2 - 2\rho + \rho^2),$$

故在闭曲线 L_1 上满足 $10^{-5} < \rho < 10^{-3}$. 在 L_1 内再取圆 $\rho = \rho_2 = 10^{-5}$, 则在圆环域 $\rho_2 < \rho < \rho_1$ 内

$$\left. \frac{dF}{d\tau} \right|_{(2.6)_{\lambda=0}} < -\frac{1}{16} \rho_2^4 = -6.25 \times 10^{-22},$$

因为

$$\left. \frac{dF}{d\tau} \right|_{(2.6)_{\lambda \neq 0}} = \left. \frac{dF}{d\tau} \right|_{(2.6)_{\lambda=0}} + \left[\left. \frac{dF}{d\tau} \right|_{(2.6)_{\lambda \neq 0}} - \left. \frac{dF}{d\tau} \right|_{(2.6)_{\lambda=0}} \right],$$

在上述圆环内

$$\begin{aligned} \left| \left. \frac{dF}{d\tau} \right|_{(2.6)_{\lambda \neq 0}} - \left. \frac{dF}{d\tau} \right|_{(2.6)_{\lambda=0}} \right| &\leq \left| \frac{\partial F}{\partial y} \right| |\lambda| |y| \leq \left| \frac{\partial F}{\partial y} \right| |\lambda| \rho \\ &\leq \rho^2 (1 + \rho + 2\rho^2) |\lambda| \leq (2 \times 10^{-6}) |\lambda|. \end{aligned}$$

只要 $(2 \times 10^{-6}) |\lambda| \leq 6.25 \times 10^{-22}$, 即 $0 < \lambda < \lambda_0 = 3.125 \times 10^{-16}$, 则有 $\left. \frac{dF}{d\tau} \right|_{(2.6)_\lambda} < 0$. 换言之, 方程组 (2.6) 的轨线当 τ 增加时, 由外向内穿过闭曲线 L_1 . 即 L_1 对方程组 (2.6)_λ 无切. 又因为当 $\lambda > 0$ 时, L_1 内只有不稳定焦点 $(0, 0)$, 且 $\rho_i \rightarrow 0$ 时, $\lambda_i \rightarrow 0$. 故 $0 < \lambda < \lambda_0$ 时

在原点邻域存在方程组 (2.6) 的稳定极限环.

将 τ 还原为 t , 在上述条件下, 存在围绕 $(E)_\alpha$ 的奇点 $(1, 0)$ 的不稳定极限环. 由于方程组 (2.6) 变 τ 为 t 后所得方程的导算子矩阵为:

$$A(\lambda) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -\lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = A(0) + \lambda B(\lambda). \quad (2.14)$$

又 $\text{tr } A(0) = 0$, $\det A(0) = 2 > 0$, $\text{tr } B(0) \neq 0$, 引用文献 [9] 的 Hopf 分支定理可得 C_1 的唯一性结论. 再根据 $(E)_\alpha$ 所定义的方向场的对称性, 对于奇点 A 引理 5 的结论也成立.

引理 6. 当 $0 < \lambda < 10^{-95}$ 时, 在 $(E)'$ 的奇点 D 与 D' 邻域内分别存在稳定极限环 C_1 .

证. 类似于引理 5 的证明, 考察方程组 (2.7). 由 (2.9) 与 (2.11) 式得

$$\tilde{F}(x, y)|_{\rho=10^{-18}} > \rho^2 \left[\left(\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} - 2 \right) - \frac{1}{3\sqrt{\varepsilon}} \rho - \frac{1}{2} \rho^2 \right] > 10^{-29}.$$

曲线 $\tilde{F}(x, y) = 10^{-29}$ 在圆 $\rho = \tilde{\rho}_1 = 10^{-18}$ 内有闭分支, 取其一支作闭曲线 $\tilde{L}_1$, 又因

$$\rho^2 \left[\left(\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} - 2 \right) - \frac{1}{3\sqrt{\varepsilon}} \rho - \frac{1}{2} \rho^2 \right] < F(x, y) = 10^{-29} < \rho^2 \left(\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} + \frac{1}{3\sqrt{\varepsilon}} \rho + \frac{1}{2} \rho^2 \right),$$

故在 $\tilde{L}_1$ 上满足 $10^{-19} < \rho < 10^{-18}$. 再在 $\tilde{L}_1$ 内取圆 $\rho = \tilde{\rho}_2 = 10^{-19}$, 在圆环 $\tilde{\rho}_2 < \rho < \tilde{\rho}_1$ 之内有

$$\left. \frac{d\tilde{F}}{dt} \right|_{(2.7)_{\lambda=0}} \leq -\frac{1}{16} \varepsilon \sqrt{\varepsilon} \tilde{\rho}_2^4 = -6.25 \times 10^{-102} < -10^{-102}.$$

由于方程 (2.7) 的奇点 $(-\xi_4, 0)$ 满足三次代数方程

$$\sqrt{\varepsilon}(-\xi_4)^3 + \xi_4^2 - \sqrt{\varepsilon}(-\xi_4) - (1 - \lambda) = 0,$$

即

$$(\xi_4^2 - 1)(1 - \sqrt{\varepsilon} \xi_4) + \lambda = 0. \quad (2.15)$$

又方程 (2.15) 的根 ξ_4 连续地依赖于参数 λ , 当 λ 较小时, 可证 $\xi_4 \approx \sqrt{1 - \lambda} \approx 1 - \frac{1}{2} \lambda$, 若

$\lambda = 10^{-95}$, $1 - \xi_4 \approx \frac{1}{2} \lambda < 10^{-95}$. 故 $(E)_\alpha$ 的奇点 $D \left(-\xi_4, \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \right)$ 位于 $(2.7)_{\lambda=0}$ 的奇点 $\left(-1, \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \right)$ 的小邻域内, 包含在小圆 $\rho = \tilde{\rho}_2 = 10^{-19}$ 的内部. 因为

$$\left. \frac{d\tilde{F}}{dt} \right|_{(2.7)_\lambda} = \left. \frac{d\tilde{F}}{dt} \right|_{(2.7)_{\lambda=0}} + \left[\left. \frac{d\tilde{F}}{dt} \right|_{(2.7)_{\lambda \neq 0}} - \left. \frac{d\tilde{F}}{dt} \right|_{(2.7)_{\lambda=0}} \right].$$

注意到 $\lambda \leq 10^{-95}$, $\sqrt{\varepsilon} = 10^{-8}$, $\tilde{\rho}_1 = 10^{-18}$, 在圆环域 $\tilde{\rho}_2 < \rho < \tilde{\rho}_1$ 内

$$\begin{aligned} \left| \left. \frac{d\tilde{F}}{dt} \right|_{(2.7)_{\lambda \neq 0}} - \left. \frac{d\tilde{F}}{dt} \right|_{(2.7)_{\lambda=0}} \right| &= \left| \frac{\partial \tilde{F}}{\partial y} \left(-\lambda y - \frac{\lambda}{\sqrt{\varepsilon}} \right) \right| \leq \left| \frac{\partial \tilde{F}}{\partial y} \right| \left(|\lambda y| + \left| \frac{\lambda}{\sqrt{\varepsilon}} \right| \right) \\ &\leq \left(2\rho + \frac{2}{3} \sqrt{\varepsilon} \rho^2 + \sqrt{\varepsilon} \rho^3 \right) \left(\frac{\lambda}{\sqrt{\varepsilon}} + \lambda \rho \right) < 10^{-104}, \end{aligned}$$

故 $\left. \frac{d\tilde{F}}{dt} \right|_{(2.7)_\lambda} < 0$. 即方程组 (2.7) 的轨线当 t 增加时从外向内穿过 $\tilde{L}_1$, 又因 $\lambda > 0$ 时, 方程

组 $(2.7)_\lambda$ 的奇点 D 是不稳定焦点, 故根据广义环域定理, 在奇点 D 邻域存在方程组 $(2.7)_\lambda$ 的稳定极限环. 同样由方向场的对称性, 引理 6 的结论对奇点 D' 也成立.

综上所述,根据 Андронов 等^[10]的结果,由引理 2 可知,当包围奇点 A, B, D 与 D' 的 C_1 出现时, C_3 仍然存在,于是根据引理 5, 6 得到本文的主要结果

定理 6. 当 $0 < \lambda < 10^{-95}$, $\varepsilon = 10^{-16}$ 时,系统 $(E)_\alpha$ 存在结构为 $(1)+(1)+(1) \supset ((1)+(1))$ 的极限环分布(如图 1 所示).

作者对秦元勋教授的宝贵意见表示衷心感谢.

参 考 文 献

- [1] Сибирский, К. С., *Диффир. урав.*, **1** (1965), 1: 53—66.
- [2] 秦元勋,蒲富全,数学学报, **9**(1959), 2: 213—226.
- [3] 史松龄,数学学报, **18**(1975), 4: 300—304.
- [4] 秦元勋,微分方程所定义的积分曲线(上、下册),科学出版社, 1959.
- [5] 叶彦谦,极限环论,上海科技出版社, 1965.
- [6] 张芷芬,常微分方程定性理论,北京大学出版, 1979.
- [7] 李继彬,东北师大学报, **2**(1981), 15—27.
- [8] 王现,数学年刊, **6**(1983), 723—730.
- [9] 张锦炎,常微分方程几何理论与分支问题,北京大学出版, 1981.
- [10] Андронов, А. А. и Др., *Теория бифуркаций динамических систем на плоскости*, М., «Наука», 1967.