

三向网架结构内力分析

徐植信 曹菊王 胡学仁

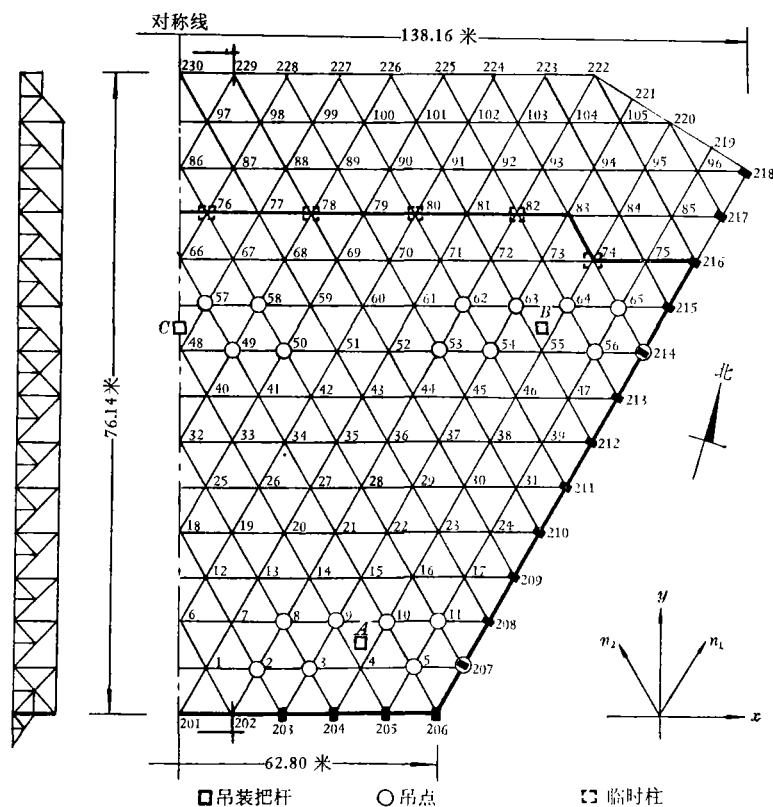
(上海同济大学)

摘 要

本文用差分法计算三向网架,适用于各种边界条件和荷载情况,易于推广到不等刚度网架。文中讨论了网架与中厚度板边界条件以及基本差分方程的差别。还对一个工程的计算结果和模型试验作了分析,并比较了两种不同的边界条件。最后介绍了吊装内力分析和探讨了起吊差的影响。

上海文化广场大厅是在原广场扇形场地上建造的,同济大学与上海市规划建筑设计院的同志一起参加了设计工作。为了满足大厅内无柱、平屋面庄严美观的要求,适应场地外形,我们选用了三向网架结构。网架结构传力直捷合理,杆件起相互支撑作用。在同样大跨度中,比平面结构节省钢材,提高刚度。采用三向网架则空间作用和刚度的提高更为显著。

所采用的网架平面见图1。正三角形网格边长为6.28米,网架高度为5米。杆件采用圆钢管,用空心钢球节点对焊联接。斜腹杆按受拉布置,部分节间剪力有变号可能,故设置交叉斜杆,竖杆均受压。网架用钢量(包括气楼等)为45公斤/米²。网架与柱铰接,以增加房屋



粗线范围内为整体吊装部分

图1 网架平面、立面图

整体刚度。

我国工人阶级和技术人员遵照毛主席关于“中国人民有志气,有能力,一定要在不远的将来,赶上和超过世界先进水平”的教导,根据场地条件,除后看台上部分外,把整个网架在地面制作,整体起吊。整体吊装部分重 260 吨,面积 5700 米²。在安装位置后退 90 厘米拼装,起吊后在空中前移就位。这样,减少了高空作业,有利于保证网架制作质量,加快了建造速度。整个工程三个月建成。建成后经两年多使用,情况良好。

一、使用荷载下网架内力分析

1. 基本假定和微分方程式

网架中每一个方向的桁架,可近似视作刚度相当的梁。则 x 方向桁架中和轴的挠度应满足:

$$EJ \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} = q_x. \quad (1)$$

E 为弹性模量; J 取桁架上、下弦杆截面对中和轴的惯性矩乘以折减系数,忽略杆件截面变化,取平均截面计算, J 取作常数; q_x 为沿 x 向的线荷载, w 为挠度, q, w 取向向下为正。桁架的抗扭刚度和较小起拱均忽略不计。

正三角形网架在均布荷载下的平衡方程,可以考虑三个方向受力,分别用式(1)并叠加而得:

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 w}{\partial n_1^4} + \frac{\partial^4 w}{\partial n_2^4} = \frac{1}{EJ} q \left(\frac{\sqrt{3}}{2} s \right); \quad (2)$$

w 为网架中面挠度; x, n_1, n_2 为正三角坐标; q 为屋面均布荷载; s 为网格长度, $\frac{\sqrt{3}}{2} s$ 为桁架间距。

网架节点受集中荷载时平衡方程为:

$$\frac{\partial^3 w}{\partial x^3|_{k+0}} - \frac{\partial^3 w}{\partial x^3|_{k-0}} + \frac{\partial^3 w}{\partial n_1^3|_{k+0}} - \frac{\partial^3 w}{\partial n_1^3|_{k-0}} + \frac{\partial^3 w}{\partial n_2^3|_{k+0}} - \frac{\partial^3 w}{\partial n_2^3|_{k-0}} = \frac{P_k}{EJ}, \quad (3)$$

P_k 为作用在节点 k 的集中荷载。屋面上承受均布荷载时,网架的节点集中荷载为:

$$P_k = \frac{\sqrt{3}}{2} q s^2,$$

$k+0, k-0$, 分别表示节点 k 沿坐标正方向和负方向的一边。

式(3)是由三个方向的平衡方程:

$$P_{kx} + Q_{x|_{k+0}} - Q_{x|_{k-0}} = 0, P_{kn_1} + Q_{n_1|_{k+0}} - Q_{n_1|_{k-0}} = 0, P_{kn_2} + Q_{n_2|_{k+0}} - Q_{n_2|_{k-0}} = 0$$

叠加而得。(2)式转化到直角坐标系,因

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 w}{\partial n_1^4} + \frac{\partial^4 w}{\partial n_2^4} = \frac{9}{8} \left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right),$$

可得:

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{4\sqrt{3}}{9} \frac{qs}{EJ}.$$

与中厚度板的微分方程

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{q}{D} \quad (4)$$

比较,可知正三角网架的微分方程与中厚度板的微分方程相同,只要取

$$D = \frac{3\sqrt{3}}{4} \frac{EJ}{s}.$$

2. 边界条件

假定网架支承点竖向位移相同,在边界上与边桁架平面垂直的方向无约束,也即

$$w|_{\text{边界}} = 0, \quad (5)$$

$$M_{n|_{\text{边界}}} = 0 \text{ (角点除外)}, \quad (6)$$

M_n 为边界法向弯矩. 另外在边界点上二个方向的桁架转角与边桁架转角相协调.

$$\frac{\partial w}{\partial n_1} - \frac{\partial w}{\partial n_2} = \frac{\partial w}{\partial x}, \quad (7)$$

在上式中, x, n_1, n_2 三个方向桁架的转角分别为 $\frac{\partial w}{\partial x}, \frac{\partial w}{\partial n_1}, \frac{\partial w}{\partial n_2}$. A 点为网架上弦节点, 变形后移到 A' 位置(参见图 2). 沿用直法线假定, 三个转角协调的条件为:

AA' 在三个坐标轴上的投影分别为

$$\frac{h}{2} \frac{\partial w}{\partial x}, \frac{h}{2} \frac{\partial w}{\partial n_1}, \frac{h}{2} \frac{\partial w}{\partial n_2}.$$

$$AB = \frac{h}{2} \frac{\partial w}{\partial x},$$

$$AH = \frac{h}{2} \frac{\partial w}{\partial n_1} \cdot \frac{1}{\cos 60^\circ},$$

$$AC = \frac{h}{2} \frac{\partial w}{\partial n_2} \cdot \frac{1}{\cos 60^\circ}, \text{ 式中 } h \text{ 为网架}$$

高度.

$$CB = BH,$$

$$AB = AH - BH = AH - CB = AH - AC - AB,$$

$$AB = \frac{1}{2} (AH - AC), \text{ 即得式(7).}$$

式(5)~(7)所表示的边界条件, 以下称为边界条件(I).

在 218 点可用同法推导, 式(7)将改为:

$$\frac{1}{2} \frac{\partial w}{\partial n_1} - \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{\partial w}{\partial n_3} = \frac{\partial w}{\partial x}. \quad (8)$$

n_3 为与 x 轴成 150° 角的轴线, 即自点 218 至点 222 方向的轴线. 式(7), (8) 也可由直角坐标与斜坐标的微分关系推得.

如边桁架刚度很大, 可假定边桁架平面内无转角, 代替式(7)或式(8), 有:

$$\varphi|_{\text{边界}} = 0, \quad (9)$$

φ 为沿边界的转角.

式(5), (6), (9)称为边界条件(II), 即中厚度板的基尔霍夫 (Kirchhoff) 边界条件.

如边桁架刚度很小, 可假定网架沿边界方向亦无约束, 代替式(7)或式(8)有:

$$M_t|_{\text{边界}} = 0, \quad (10)$$

M_t 为边界切向弯矩. 此时式(6)在角点也成立.

式(5), (6), (10)称为边界条件(III).

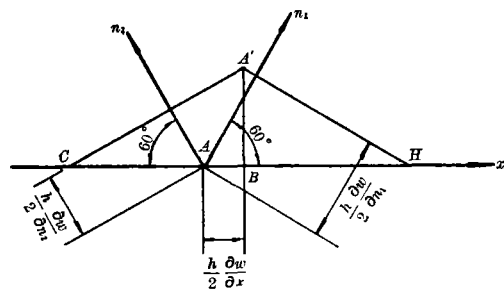


图 2 网架上弦节点水平位移图

3. 方程的解法

由角变位移法得出的差分方程,双向网架时其展开式与中厚度板的微分方程相似;三向网架当网格长度无限缩小时,其解趋向中厚度板微分方程的解^[1-3]。因此,等刚度正三角形网架亦可按各向同性板的微分方程求解,这一点在不少文献中已论述过。但实际上两者边界条件是不同的。我们认为:网架采用那种边界条件符合实际,主要决定于边桁架刚度大小。边桁架刚度一般不很大,且不象板那样沿边界通长支承,所以一般来说在边界方向的转角不容忽视。简支板按方程(4)求解,用的都是边界条件(II)。由于假定了边桁架为绝对刚性,因而和实际情况有些出入。

用差分法求解可从方程(3)出发,方程(3)的差分式通常写为(见图3):

$$18w_A - 4(w_a + w_b + w_c + w_d + w_e + w_f) + w_g + w_h + w_i + w_j + w_k + w_l = \frac{P_A s^3}{EJ}. \quad (11)$$

方程(2)的差分方程左端与此相同,右端项换做 $\frac{\sqrt{3}}{2} \frac{qs^5}{EJ}$ 即可。界外点挠度须由边界条件定值。

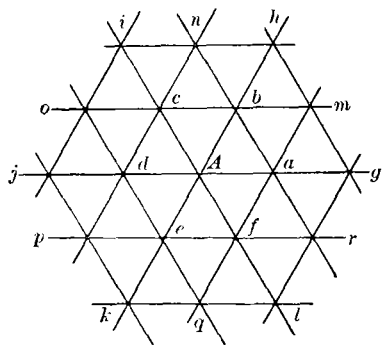
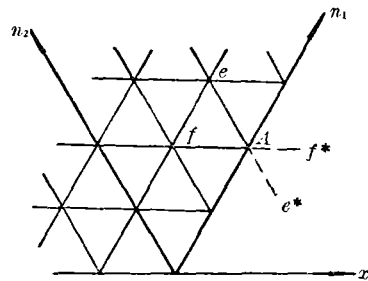


图3 差分方程所用的网格点编号图



(e^* 点的挠度记作 w_e^*)

图4 网架边界点及界外点编号图

考虑边界条件(I),以 n_1 方向的边界为例(参见图4),

$$w_A = 0, \quad (5)$$

$$M_n = 0, \quad (6)$$

$$M_n = -M_x \cos 30^\circ - M_{n_2} \cos 30^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2} (M_x + M_{n_2}),$$

$$M_t = M_x \sin 30^\circ - M_{n_2} \sin 30^\circ = \frac{1}{2} (M_x - M_{n_2}),$$

M_n, M_t 分别为作用在边桁架上的网架弯矩(M_x 与 M_{n_2}) 在法线与切线方向的分量。

$$M_x = -EJ \frac{w_i^* - 2w_A + w_f}{s^2} = -EJ \frac{w_f^* + w_i}{s^2},$$

$$M_{n_2} = -EJ \frac{w_e - 2w_A + w_e^*}{s^2} = -EJ \frac{w_e + w_e^*}{s^2}.$$

由式(7)得:

$$\varphi_A = \frac{\partial w}{\partial n_2} = \frac{\partial w}{\partial x},$$

式中 $\varphi_A = \sum_i \varphi_{Ai} \cdot M_{ii}$, φ_{Ai} 为边桁架 i 点作用单位力矩时引起的 A 点转角, M_{ii} 为作用

在 i 点的 M_i ; $\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{w_f^* - w_l}{2s}$; $\frac{\partial w}{\partial n_2} = \frac{w_e - w_s^*}{2s}$.

一般边界点有两个未知界外点挠度,有(6)、(7)两个方程。角点 206 有一个界外点未知挠度,由网架弯矩求得作用在二方向边桁架上的弯矩,可列出方程(7)。角点 218 有一个界外点未知挠度,有一个方程(8)。220 点有三个未知界外挠度,有(6)——(8)三个方程。这些方程连同网格点的平衡方程组成线性代数方程组。解出 w 后,即可求得各方向桁架的 M 及 Q 。按简单桁架求得杆件内力。竖杆为三方向桁架共有,其内力即为三方向桁架竖杆内力之和。

边界条件(II)时,有 $w_e^* = -w_f$, $w_f^* = -w_e$, 角点 206 有 $w_s^* = w_s$;

边界条件(III)时,有 $w_e^* = -w_e$, $w_f^* = -w_f$, 角点 206 有 $w_s^* = -w_s$ 。

在舞台口网架支承在台口桁架上,每一支承点有一未知挠度,同时有一方程:

$$w_A = \sum_i \delta_{Ai} \cdot P_i. \quad (12)$$

δ_{Ai} 为台口桁架 i 点作用单位力引起的 A 点挠度值, P_i 为作用在桁架 i 点的集中力,包括网架反力及其他作用在桁架上的荷载。

网架前边承受悬挑荷载,只要在式(6)中包括进悬臂弯矩即可。

4. 计算结果及讨论

为了比较边桁架强弱的优缺点,我们曾按(1)、(2)两种方案进行计算分析。方案(1)时,网架 $J = 2.65 \times 10^6$ 厘米⁴。东、南、西三边边桁架高 5 米, $J = 6.16 \times 10^5$ 厘米⁴,均取桁架上下弦杆截面对中和轴的惯性矩乘 0.7。这三边按边界条件(I)计算, $\frac{J_{\text{边桁架}}}{J_{\text{网架}}} = \frac{1}{4.3}$ 。网架北边支承在

已有建筑上,限于条件、边桁架很弱, $\frac{J_{\text{边桁架}}}{J_{\text{网架}}} = \frac{1}{16.7}$, 故该段按边界条件(III)。方案(2)周边都

按边界条件(III)计算。计算结果表明两种方案在网架中间部分挠度和内力相差都不大。方案(2)时最大挠度约大 3%, 弦杆最大内力约大 10%。弦杆最大内力发生在 n_2 方向桁架 71 点处。两种方案计算结果在边界附近差别较大。除内力数值上相差较多外,单榀桁架支座反力且有异号。方案(1)时,各向单榀桁架的支座反力除角点 206, 218 两处外,均为压力。方案(2)时,除角点 206, 218 外,网架支座反力仍均为压力;但 204, 205, 207, 208 四处 n_2 方向桁架与 213, 214, 215, 216, 217 五处 x 方向桁架的支座反力均为拉力。两种方案下该部分腹杆内力异号。这种剪力异号的差别只发生在靠近边界的一个网格内。我们认为:网架靠近边界且与边界平行的桁架也能象边桁架那样起一定的约束作用,所以不同边界条件的差别在中间部分就比较小。

两种方案用钢量非常接近,方案(1)略为省些。但由于角支座 206 拉力过大,结构处理有困难,且建筑设计边桁架高度小些较为有利,因此边桁架高度改为 2.5 米,弦杆选用较小截面。

$\frac{J_{\text{边桁架}}}{J_{\text{网架}}} = \frac{1}{16.7}$, 采用了方案(2)。同时在设计中适当考虑了边桁架约束作用的影响。

我们对桁架当作等刚度梁引起的误差也作了一些分析。桁架视作等刚度梁,包括了两个假定:(1)假定桁架杆件截面无变化。(2)杆件截面不变的桁架视作等刚度梁。网架内力分析是以每个网格点上三个方向桁架挠度相等为依据的,因此误差大小可以三个方向桁架同一点的挠度是否接近来衡量。我们曾取 15, 41, 94 三点计算三个方向桁架挠度[内力均为按等刚度

梁计算所得,计算时采用了边界条件(III)], 结果见表 1.

表 1 通过同一网格点的三方向桁架挠度比较表

网 格 点	(1) 按等刚度梁计 算挠度(厘米) $J = 2.65 \times 10^6 \text{厘米}^4$	(2) 按等截面桁架计算挠度(厘米) [上 弦 $\phi 121 \times 10$ (直径 $\times$ 管壁厚度、单 位: 毫米)下弦 $\phi 114 \times 8$, 斜杆 ϕ 89×4 , 竖杆 $\phi 159 \times 6$, 与(1)相当]			(3) 按实际选用的截面计算挠度 (厘米)		
		x	n_1	n_2	x	n_1	n_2
15	20.3	17.5	14.4	16.1	18.1	14.1	14.3
41	42.0	31.1	33.2	31.1	41.6	30.4	29.3
94	5.92	5.96	4.98	5.76	13.1	7.60	4.62

由表 1 可见: (1) 这些假定引起的误差在网架中间部分较小, 后面尖角部分较大. (2) 忽略桁架杆件截面变化引起的误差较大. 杆件截面不变的桁架视作等刚度梁引起误差甚小. (3) J 取桁架弦杆截面对中和轴的惯性矩乘系数 0.7, 略为偏小. 我们认为网架构件材料及联接有足够的塑性, 这些误差不影响结构安全. 如果桁架截面相差更大或要求更可靠的内力值, 可以考虑把桁架视作不等刚度梁进行分析, 角隅处短桁架还可象台口桁架那样按式(12)计算.

网架内部网格点是否满足转角协调方程(7)? 微分方程(4)可看作是由角变位移法得到的差分方程的近似. 方程(2)与(4)是等同的, 方程(11)又是微分方程(2)的差分近似, 所以差分方程(11)可看作由角变位移法经过两次近似后得出的. 因而方程(11)的解在网架内部各网格点只能近似地满足方程 (7). 要做到差分方程的解在网架内部各网格点满足方程 (7), 需从方程(3)出发, 考虑三个方向等代梁间相互作用的弯矩(以后简称“梁间弯矩”), 同时满足方程(7)列出差分方程. 设在某一方向等代梁 k 点作用力矩 M_k ; 因荷载不连续, 把该方向等代梁看作在 k 点间断, 作为边界处理, 以 w, w' 连续, $\sum M = 0$ 三条件求出界外点的挠度值 (参见图 5).

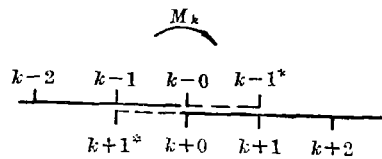


图 5 等代梁间断点及界外点编号图

$w \text{ 连续:}$

$$w_{k+0} = w_{k-0} = w_k,$$

$w' \text{ 连续:}$

$$\frac{w_{k-1}^* - w_{k-1}}{2s} = \frac{w_{k+1} - w_{k+1}^*}{2s},$$

$\sum M = 0:$

$$(-EJ) \frac{w_{k-1}^* - 2w_k + w_{k-1}}{s^2} - (-EJ) \frac{w_{k+1} - 2w_k + w_{k+1}^*}{s^2} + M_k = 0.$$

解得:

$$w_{k-1}^* = w_{k+1} + \frac{M_k s^2}{2EJ}, \quad w_{k+1}^* = w_{k-1} - \frac{M_k s^2}{2EJ}.$$

由此可得:

$$w_k' = \frac{w_{k+1} - w_{k-1}}{2s} + \frac{M_k s}{4EJ}.$$

$k \text{ 点:}$

$$w_{|k+0}''' - w_{|k-0}''' \text{ 的差分式为 } \frac{w_{k+2} - 4w_{k+1} + 6w_k - 4w_{k-1} + w_{k-2}}{s^3}, \text{ 与无 } M_k \text{ 时相同,}$$

$k+1 \text{ 点:}$

$$w_{|(k+1)+0}''' - w_{|(k+1)-0}''' \text{ 的差分式为 } \frac{w_{k+3} - 4w_{k+2} + 6w_{k+1} - 4w_k + w_{k-1}}{s^3} - \frac{M_k}{2EJs},$$

$k-1 \text{ 点:}$

$$w_{|(k-1)+0}''' - w_{|(k-1)-0}''' \text{ 的差分式为 } \frac{w_{k+1} - 4w_k + 6w_{k-1} - 4w_{k-2} + w_{k-3}}{s^3} + \frac{M_k}{2EJs}.$$

可知 k 点有力矩 M_k 作用时, 该点的差分方程仍和无力矩作用时相同. 在前一点 (坐标正

方向)的差分方程中,增加一个垂直荷载 $\frac{M_k}{2s}$, 在后一点差分方程中,加一个垂直荷载 $-\frac{M_k}{2s}$ 即可。

解出 w 后, 可求得 $M_{k+0} = (-EJ) \frac{w_{k+1} - 2w_k + w_{k+1}^*}{s^2} = (-EJ) \frac{w_{k+1} - 2w_k + w_{k-1}}{s^2} + \frac{M_k}{2}$, $M_{k-0} = (-EJ) \frac{w_{k+1} - 2w_k + w_{k-1}}{s^2} - \frac{M_k}{2}$, 其余各点内力与无力矩作用时算法相同。

如连续几个点都有力矩作用时, 用同法计算可知只要按上述方法分别考虑后叠加即可。

现考虑网架内部各网格点的梁间弯矩, 令 A 点等代梁间相互作用在 x 方向梁上的弯矩 $M_{xA} = M_A$, 则作用在 n_1 和 n_2 方向梁上的弯矩为 $M_{n_1A} = -M_A$, $M_{n_2A} = M_A$ 。可得 A 点的差分方程为:

$$18w_A - 4(w_a + w_b + w_c + w_d + w_e + w_f) + w_g + w_h + w_i + w_j + w_k + w_l \\ = \frac{s^3}{EJ} \left(P_A - \frac{M_a}{2s} + \frac{M_b}{2s} - \frac{M_c}{2s} + \frac{M_d}{2s} - \frac{M_e}{2s} + \frac{M_f}{2s} \right).$$

因 A 点 $\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{w_a - w_d}{2s} + \frac{M_A s}{4EJ}$, $\frac{\partial w}{\partial n_1} = \frac{w_b - w_e}{2s} - \frac{M_A s}{4EJ}$, $\frac{\partial w}{\partial n_2} = \frac{w_c - w_f}{2s} + \frac{M_A s}{4EJ}$ 。

由 $\frac{\partial w}{\partial n_1} - \frac{\partial w}{\partial n_2} = \frac{\partial w}{\partial x}$ 可得: $M_A = \frac{2EJ}{3s^2} (w_b + w_d + w_f - w_a - w_e - w_c)$, 以 $M_a, M_b, M_c, M_d, M_e, M_f$ 之值代入, 可得:

$$20w_A - \frac{14}{3}(w_a + w_b + w_c + w_d + w_e + w_f) + \frac{2}{3}(w_g + w_h + w_i + w_j + w_k + w_l) \\ + \frac{2}{3}(w_m + w_n + w_o + w_p + w_q + w_r) = \frac{P_A s^3}{EJ}. \quad (11A)$$

如略去梁间弯矩, 取各网格点梁间弯矩均为零, 即得式(11)。可知式(11)是忽略了三方向桁架间的转动约束。

如令各网格点梁间弯矩增至 1.5 倍, 则得:

$$21w_A - 5(w_a + w_b + w_c + w_d + w_e + w_f) + \frac{1}{2}(w_g + w_h + w_i + w_j + w_k + w_l) \\ + w_m + w_n + w_o + w_p + w_q + w_r = \frac{P_A s^3}{EJ}, \quad (11B)$$

在均布荷载作用下, 即微分方程(4)的常用差分方程式:

$$42w_A - 10(w_a + w_b + w_c + w_d + w_e + w_f) + (w_g + w_h + w_i + w_j + w_k + w_l) \\ + 2(w_m + w_n + w_o + w_p + w_q + w_r) = \frac{9}{4} \frac{qs^4}{D} = 2 \frac{P_A s^3}{EJ}.$$

可知按中厚度板的微分方程求解时, 在网架中间也是过多地估计了约束。

当 $s \rightarrow 0$ 时, 式(11)、(11A)、(11B)趋于一致。前已述及, 相应于式(11)与(11B)的微分方程是等同的; (11A)介于(11)与(11B)之间, 当 $s \rightarrow 0$ 时, 其解亦必趋向同一微分方程的解, 且梁间弯矩趋于零。三个差分方程解的差别是较小的, 一般在屋面垂直荷载作用下其差别也在差分法的误差范围内。我们比较了按式(11)与式(11B)求解的结果, 相差甚小。按式(11)求解后再复算各网格点 $\frac{\partial w}{\partial n_1} - \frac{\partial w}{\partial n_2}$ 与 $\frac{\partial w}{\partial x}$, 仅 2, 3, 4, 5, 10, 11, 16, 104, 105 等九点相差较为

显著。从用角变位移法解算不等刚度大型三向网架的结果^[4]来看, 也仅在桁架刚度改变处的网格点及边界凹角处梁间弯矩才较大。我们认为一般边界较规则, 且无集中外力矩作用的等

刚度网架,可用式(11)计算.其他情况下需考虑梁间弯矩时,可按式(11A)计算.

设在网格点 A 沿 x 方向桁架作用有外力矩 M_{Ax}^0 , 此时 A 点的梁间弯矩记为 $\bar{M}_A$, 仍按上法以 w, w' 连续, $\Sigma M = 0$ 三条件定出间断点界外挠度值. 有 $w_d^* = w_a + \frac{\bar{M}_A s^2}{2EJ} + \frac{M_{Ax}^0 s^2}{2EJ}$, $w_a^* = w_d - \frac{\bar{M}_A s^2}{2EJ} - \frac{M_{Ax}^0 s^2}{2EJ}$, $\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{w_a - w_d}{2s} + \frac{\bar{M}_A s}{4EJ} + \frac{M_{Ax}^0 s}{4EJ}$; n_1, n_2 方向的各阶差分表达式与无 M_{Ax}^0 作用时相同. 由 $\frac{\partial w}{\partial n_1} - \frac{\partial w}{\partial n_2} = \frac{\partial w}{\partial x}$ 可得 $\bar{M}_A = \frac{2EJ}{3s^2} (w_b + w_d + w_f - w_a - w_c - w_e) - \frac{M_{Ax}^0}{3}$. 可知列差分方程时, A 点方程与无外力矩作用时相同, 仍为式(11A); a 点, d 点方程在右端荷载项上分别加、减 $\frac{M_{Ax}^0}{3s}$, b, f 点方程在右端荷载项上加 $\frac{M_{Ax}^0}{6s}$, c, e 点方程在右端荷载项减去 $\frac{M_{Ax}^0}{6s}$ 即可. 解出 w 后, 仍按 $M_A = \frac{2EJ}{3s^2} (w_b + w_d + w_f - w_a - w_c - w_e)$ 求出各点的值, 而由 $M_{xA+0} = -EJ \frac{w_a - 2w_A + w_d}{s^2} + \frac{M_A}{2} + \frac{M_{Ax}^0}{3}$, $M_{xA-0} = -EJ \frac{w_d - 2w_A + w_a}{s^2} - \frac{M_A}{2} - \frac{M_{Ax}^0}{3}$; $M_{n_1A+0} = -EJ \frac{w_b - 2w_A + w_e}{s^2} - \frac{M_A}{2} + \frac{M_{Ax}^0}{6}$, $M_{n_1A-0} = -EJ \frac{w_b - 2w_A + w_e}{s^2} + \frac{M_A}{2} - \frac{M_{Ax}^0}{6}$; $M_{n_2A+0} = -EJ \frac{w_c - 2w_A + w_f}{s^2} + \frac{M_A}{2} - \frac{M_{Ax}^0}{6}$, $M_{n_2A-0} = -EJ \frac{w_c - 2w_A + w_f}{s^2} - \frac{M_A}{2} + \frac{M_{Ax}^0}{6}$ 计算弯矩.

更精确的解法: 如把各方向桁架视作梁, 以每一网格点的挠度及两个转角为未知数, 用角变位移法求解; 或把网架视作空间桁架, 以每个节点在 x, y, z 三个方向的位移为未知数, 求得各构件的变形从而得到内力, 列出三个方向力的平衡方程求解; 甚至考虑网架构件的受弯和受扭, 以每个节点三个方向的位移和转角为未知数, 列出六个力和弯矩的平衡方程求解; 在理论上都已解决. 只是线性代数方程组的阶数将增高很多, 有时受计算机储存的限制, 难于应用. 而正确程度同样为基本假定和实际构造与计算依据的差别所限制. 因此, 计算简便且适用于各种荷载情况和边界条件的差分解法有其实际意义.

二、网架模型试验和挠度实测

1. 网架模型试验

为了检验计算理论, 我们做了 1/20 网架模型试验. 模型上、下弦杆和竖杆采用 $\phi 7.5$ 毫米 A_3 钢筋, 斜杆和边桁架采用 $\phi 5.5 A_3$ 钢筋. 节点用直径 30 毫米实心低碳钢球. 模型 $\frac{J_{边桁架}}{J_{网架}} = \frac{1}{3.46}$, 边桁架比方案(1)强些. 在模型边界的支承节点上焊有具有尖端的短杆, 作测支座反力用. 为了使支承很好接触, 短杆下设置可以上下调整高度的螺帽. 用电阻应变仪测杆件应变, 用百分表、千分表测挠度和水平位移. 加荷方法采用盛水于开口塑料袋. 气楼及其他设备荷载也相应予以考虑. 试验结果及看法如下.

(1) 在设计荷载下网架内力, 模型中部弦杆受力较大区域, 所有二十个测点上、下弦杆内力的试验值均较好地与理论值相符, 九个测点试验值与理论值相差在 10% 以内, 六个相差

10%—15%，其余五个中相差最大的为 28%。可见理论计算在网架中间部分是比较正确的。

在边界和近边界区域，支座反力，竖杆、斜杆内力与理论值定性相符。竖杆内力试验值均比理论值小。拉力支座 206 的反力和经此点沿 n_2 方向桁架的竖杆、斜杆内力比理论值小很多。舞台口桁架杆件内力基本上与理论值相符。出现这些差别，可能是模型的支承情况与理论分析时假定的条件不尽相符，其影响在边界附近较显著的缘故。

(2) 挠度。在设计荷载下网架最大挠度为 43.4 厘米。用同样方法计算模型最大挠度为 0.37 厘米，测试结果为 0.34 厘米。

2. 网架挠度实测

在屋面板荷载下(85 公斤/米²)网架 41 点挠度实测为 11.2 厘米，折合设计荷载(230 公斤/米²)时为 30.3 厘米。41 点计算挠度为 42.0 厘米。

三、吊装内力分析

网架整体吊装部分及把杆布置见图 1。每根把杆南北各设一副起重滑轮组，各由一台卷扬机起动。每一滑轮组下设四个吊点，吊在网架上弦节点(参见图 6 和图 8)。提升网架高出柱顶 40 厘米后，把五台控制南边滑轮组的卷扬机同步放松 32 厘米，控制北边滑轮组的卷扬机刹住不动，网架就南移 90 厘米。然后十台卷扬机同步放松，滑轮组均匀下降，使网架搁置在钢筋混凝土柱和临时支柱上。

1. 网架荷载和杆件内力

网架用五根把杆起吊，假定保持对称，设后排中间把杆 C 的起吊力为 T ，则其余四根把杆起吊力都可求得。每副滑轮组四个吊点的钢丝绳是穿通的，略去摩擦力不计，钢丝绳的拉力相等。每根把杆都有：

$$\sum_i P_i l_i = 0, \quad (13)$$

$$\sum_i P_i m_i = 0, \quad (14)$$

$$\sum_i P_i n_i = Z, \quad (15)$$

l, m, n 为钢丝绳的方向余弦， Z 为把杆的起吊力。

一根把杆前后两副滑轮组有两个未知的拉力，由于对称式(13)自然满足，由式(14)，(15)可求得每根钢丝绳的拉力。

作用在网架吊点 k 的拉力 P_k 求出后，分解为 $P_k l_k, P_k m_k, P_k n_k$ ，三个分力。 $P_k l_k, P_k m_k$ 作用在网架上弦杆平面内(参见图 7)。假定这组力只使吊点范围以内的网架杆件受力，就可按简单桁架求出各杆件内力。这些内力以作用在桁架中心线的内力和作用在网格点的集中力矩 $M = -\Delta N \cdot \frac{h}{2}$ 来代替。 $\Delta N = N_{k-k+1} - N_{k-1-k}$ 即作用在节点前后两端杆件的内力差。

设作用在桁架中心线的内力不影响网架的弯曲。网格点 k 除有垂直力外还作用有外力矩 M_k 。可用第一节中所述方法计算。

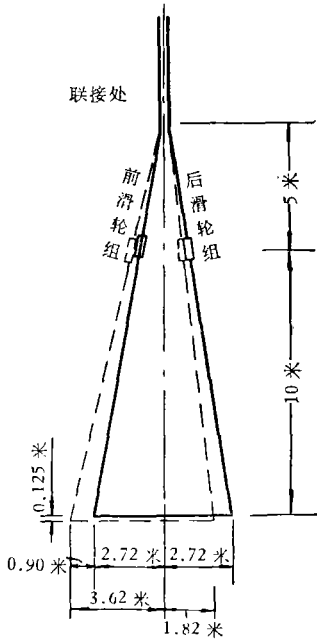


图 6 网架吊装及空中位移示意图

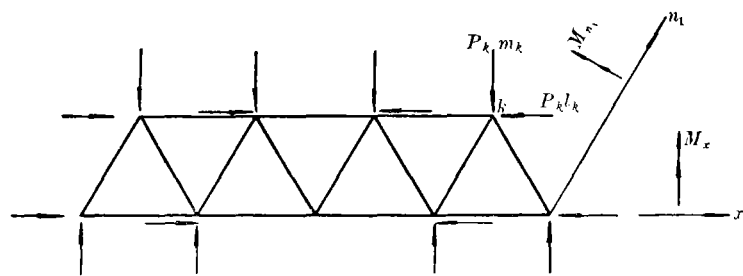


图7 一根把杆吊点范围内网架上弦杆件组成的水平桁架受力图
(M_x, M_{n_1} 表示作用在网格点的正力矩方向, M_{n_2} 仿此)

求出弯曲引起的杆件内力后,上、下弦杆内力加上作用在桁架中心线的内力之半即得总的吊装内力。

外力矩作用在边界点上时,因边桁架刚度甚小,略去其约束作用不计。用同法可知列差分方程时只须在该点及相邻点加、减垂直荷载 $\frac{M_k}{s}$ 即可(在座标正方向前端的点加 $\frac{M_k}{s}$,在后端的点减 $\frac{M_k}{s}$)。

吊装荷载下还遇到自由边界。此时式(5)不成立,仍可按不同的边界条件定出界外点挠度。每一边界点也有一个平衡方程。

2. 把杆起吊力与起吊位移

吊装荷载下平衡方程数与未知挠度数相同;还有一个未知量 T ,须要通过后排把杆滑轮组位移关系建立方程求解。

滑轮组位移 w_0 与网架吊点挠度的关系可略去钢丝绳拉伸的影响求得。

从图8看吊点挠度 w_i ,该段钢丝绳长度变化 δ_i (缩短为正)和滑轮组位移 w_0 之间有关系:

$$w_i = -\frac{\delta_i}{\sin \alpha_i} + w_0 = -\frac{\delta_i}{n_i} + w_0.$$

一副滑轮组有

$$\sum_i \delta_i = 0, \text{ 可得}$$

$$w_0 = \frac{\sum_i w_i n_i}{\sum_i n_i}. \quad (16)$$

在吊装中,有几副滑轮组四根钢丝绳不是全部穿通;而是两根,两根分别穿通。此时滑轮组除有垂直位移 w_0 外,还有水平位移 u (参见图9)。

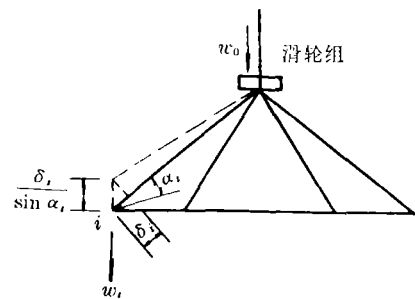


图8 滑轮组正面图

(并表示了滑轮组位移与吊点挠度的关系)

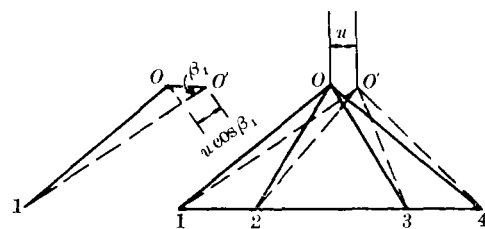


图9 滑轮组侧移图

(侧移 u 对吊点1的影响相当于钢丝绳缩短 $u \cos \beta_1$)

$$w_1 = -\frac{\delta_1 + u \cos \beta_1}{\sin \alpha_1} + w_0 = -\frac{\delta_1 + u \cos \beta_1}{n_1} + w_0,$$

$$w_2 = -\frac{\delta_2 + u \cos \beta_2}{n_2} + w_0,$$

$$w_3 = -\frac{\delta_3 - u \cos \beta_2}{n_2} + w_0,$$

$$w_4 = -\frac{\delta_4 - u \cos \beta_1}{n_1} + w_0.$$

$$\delta_1 + \delta_2 = 0, \quad \delta_3 + \delta_4 = 0.$$

解得

$$w_0 = \frac{(w_1 + w_4)n_1 + (w_2 + w_3)n_2}{2(n_1 + n_2)},$$

与式(16)相同。由于 u 和钢丝绳长度相比甚小,各钢丝绳拉力也和四根穿通时相同。

如果同一把杆前后两滑轮组再通过一个总滑轮组用钢丝绳连通,则可仿上法建立总滑轮组的位移与前后两滑轮组位移的关系。这样,总滑轮组的位移就可用八个吊点的挠度来表达。假定同步提升,令把杆 C 总滑轮组位移与把杆 B 总滑轮组位移相等,就得到决定全部 w 和 T 所缺的一个方程。

我们前后两滑轮组是各自独立的,所以网架内力决定于前后滑轮组的提升是否同步。也可以这样来列方程:令把杆 C 前后滑轮组之一的位移与把杆 B 任一滑轮组位移相等,认为其余两组滑轮组位移与之相适应。这四种都属于起吊均匀的理想情况。我们比较了这四种情况的最大差别,只相当于把杆 C 和把杆 B 总起吊位移相差 0.4 厘米。内力差别是很小的。如果前后滑轮组的位移差超出这个范围,在一根把杆范围内,网架和把杆都将受到不平衡的 y 方向水平力。五根把杆前后滑轮组位移差一致时,网架就水平移动。如果五根把杆前后滑轮组位移差不一致,网架整个上弦平面作为一个桁架受力,同时把杆前后滑轮组联接处将有水平位移。由于整个上弦平面刚度甚大,且联接处水平位移易于察觉,我们在设计中没有考虑这种起吊不匀的影响。

网架内力也决定于几根把杆起吊是否同步。要求五根把杆的总起吊位移(理想情况为总滑轮位移;或前后滑轮组的任一位移,而另一滑轮组与之相适应)相等,或原在一个平面内的各点保持在一个平面内的理想情况是难于达到的。为了比较吊装方案和考虑起吊差控制多少,我们计算了起吊过程中后排三根把杆起吊力相同时的内力,此时把杆 C 总起吊位移落低于把杆 B 6.22 厘米。我们还计算了在网架下降时把杆 C 完全脱空($T = 0$,即四根把杆起吊)时的内力,此时把杆 C 总起吊位移落低于把杆 B 22.5 厘米。考虑到把杆 C 总起吊位移因起吊力较大,而落低不至超过后排三根把杆起吊力相等时的限度,且四根把杆起吊网架需加强很多。所以采用五根把杆起吊,网架杆件按理想起吊、下降和后排三根把杆起吊力相等这三种情况时的内力进行验算,有少部分截面决定于吊装内力。在吊装过程中,控制起吊差在这个范围内。吊装工作在一天内完成,所有杆件都没有失稳或其他不良现象。

3. 刚体位移的限定

吊装荷载给出力边界条件,决定结构位移可有一任意刚体平移和一任意刚体转动。需要规定不在一直线上的任意三点的位移值,方程组才有唯一解。从数学角度看,给出力边界条件

时,平衡方程组方程数虽和未知挠度数相同,但其中不在一直线上的任意三点的平衡方程和其余的方程线性相关。对称条件下,网架半边就有两个不在同一 x 轴上的点的平衡方程和其余方程线性相关。从方程组中去掉不在同一 x 轴上、且不都在对称线上的任意两点的平衡方程,指定不在同一 x 轴上、且不都在对称线上的任意两点的位移值,这样就得到方程数与未知量数相同的线性无关的方程组。

通过这一工程的实践,我们认为用差分法解算网架内力,适用于各种边界条件和荷载,也可考虑刚度变化。所得结果在网架中间部分是比较正确的。在边界附近由于差分法本身误差稍大,且理想的边界条件与实际不同产生的影响也较显著,宜结合工程实际作适当考虑用于设计。

参 考 文 献

[1] Renton, J. D., 1967 *Space Structures*, (edited Davies, R. M.,) Blackwell Sci. Pub., Oxford, 19.
[2] Wan, T., 1964 *J. Eng. Mech. Div., Proc. Am. Soc. Civil Eng.*, **90** (EM2), 83.
[3] Renton, J. D., 1966 *Intern. J. Solids Struct.*, **2**(2), 307.
[4] Makowski, Z. S., Nooshin, H., 1967 *Space Structures*, (edited Davies, R. M.,) Blackwell Sci. Pub., Oxford, 327.