

关于曲线动力扩展裂纹尖端场*

靳志和

(北方交通大学工程力学研究所, 北京)

关键词 动力扩展、裂纹尖端场、曲线路径

一、引言

由于工程实际的需要, 弹性固体中复合型载荷作用下的裂纹动力扩展问题近年来受到了较大重视^[1]. 在复合型载荷作用下, 裂纹一般沿曲线路径扩展. Freund 和 Clifton^[2] 首先分析了这一问题. 他们证明了在以裂纹尖端为原点、以裂纹瞬时扩展方向为 x 轴的局部坐标系中, 裂纹尖端主奇异场的结构和直线扩展裂纹是相同的. Achenbach 和 Bažant^[3] 亦得到了相同的结果. 鉴于裂纹尖端高阶渐近解对曲裂准则有较大影响, Nishioka 和 Atluri^[4] 给出了直线动力扩展裂纹尖端的各阶渐近解. 现今关于复合型动力扩展裂纹问题的实验及数值研究^[1,5] 均是以文献[4]的结果为基础的.

当裂纹沿曲线路径扩展时, 局部坐标系相对于固定坐标系要发生转动. 此时, 若不修改加速度的定义, 则运动方程在局部坐标系中不成立^[6]. 文献[2—4]的作者均未考虑运动方程的非客观性对裂纹尖端应力位移场的影响. 在本文中, 我们从连续介质力学的基本方程出发, 给出了求解弹性介质中曲线动力扩展裂纹尖端场问题的正确提法. 证明文献[4]关于直线动力扩展裂纹尖端场的前两阶渐近解仍适用于曲线扩展裂纹, 但第三阶及更高阶渐近解对曲线扩展裂纹不成立. 这为今后曲裂的数值及实验研究提供了理论依据.

二、问题的提法

考虑在 I-II 复合型载荷作用下裂纹的动力扩展问题. 此时, 裂纹沿曲线路径扩展. 建立

固定直角坐标系 $\{O; XY\}$ 及局部直角坐标系 $\{o; xy\}$, 如图 1 所示. 选取局部坐标系的原点为动裂纹尖端而 x 轴沿裂纹瞬时扩展方向. 设 x 轴和 X 轴间的夹角为 β , a_1, a_2 分别为裂纹沿 X 和 Y 方向的扩展量. 则 (x, y) 和 (X, Y) 之间有如下的坐标变换关系:

$$\mathbf{x} = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{X} - \mathbf{Q} \cdot \mathbf{a}, \quad (2.1)$$

式中 $\mathbf{x}, \mathbf{X}$ 分别为局部和固定坐标系中的径矢, $\mathbf{a} = (a_1, a_2)$, $\mathbf{Q}$ 为二阶张量, 它对应的

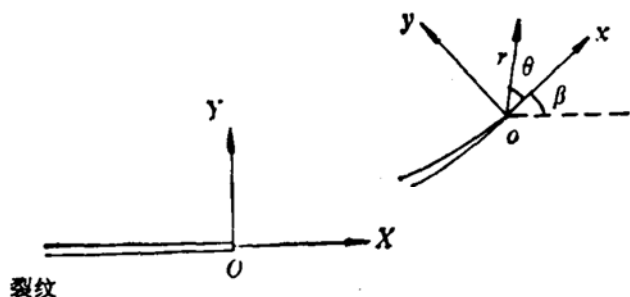


图 1 裂纹曲线动力扩展

固定坐标系 $\{O; XY\}$ 及局部坐标系 $\{o; xy\}$

矩阵为

本文 1989 年 4 月 14 日收到, 1989 年 7 月 3 日收到修改稿.

* 中国科学院地质研究所工程地质力学开放实验室资助课题.

$$\begin{pmatrix} \cos \beta & \sin \beta \\ -\sin \beta & \cos \beta \end{pmatrix},$$

引入裂纹沿 X 及 Y 方向的扩展速度 $V_1 = \dot{a}_1$, $V_2 = \dot{a}_2$, 则 V_1 , V_2 和 β 之间有如下运动学关系:

$$\operatorname{tg} \beta = V_2/V_1, \quad (2.2)$$

式中 V_1, V_2 及 β 一般都是时间 t 的函数。

显然, 局部坐标系 $\{o; xy\}$ 相对于固定坐标系 $\{O; XY\}$ 为非惯性系。此时, 在局部坐标系中, 运动方程有如下形式(无体力)^[6]:

$$\sigma \cdot \nabla = \rho \ddot{\mathbf{u}} + \rho [\ddot{\mathbf{x}} - \ddot{\mathbf{b}} - 2\mathbf{A} \cdot (\dot{\mathbf{x}} + \dot{\mathbf{u}} - \dot{\mathbf{b}}) + (\mathbf{A}^2 - \dot{\mathbf{A}}) \cdot (\mathbf{x} + \mathbf{u} - \mathbf{b})], \quad (2.3)$$

式中 σ 为应力张量, ∇ 为局部坐标系中的 Hamilton 算子, $\mathbf{u}$ 为位移矢量, ρ 为质量密度, $\mathbf{b} = -\mathbf{Q} \cdot \boldsymbol{\alpha}$, $\mathbf{A} = \dot{\mathbf{Q}} \cdot \mathbf{Q}^*$, $\mathbf{Q}^*$ 为 $\mathbf{Q}$ 的转置张量。裂纹沿直线路径扩展时, $\mathbf{A}$ 为零张量, 而 $\ddot{\mathbf{x}} = \ddot{\mathbf{b}} = -\ddot{\mathbf{a}}$ 。

在文献[2—4]中, (2.3) 式中方括号内各项均未被考虑, 即采用直线扩展裂纹的运动方程, 这显然是不合理的。

方程(2.3)式中, $(\cdot)$ 代表物质导数。在局部坐标系中有^[13]

$$(\cdot) = \frac{\partial(\cdot)}{\partial t} + V \frac{\partial(\cdot)}{\partial x} + \beta \left[y \frac{\partial(\cdot)}{\partial x} - x \frac{\partial(\cdot)}{\partial y} \right], \quad (2.4)$$

$$\begin{aligned} (\ddot{\cdot}) = & V^2 \frac{\partial^2(\cdot)}{\partial x^2} + V \frac{\partial(\cdot)}{\partial x} - 2V \frac{\partial^2(\cdot)}{\partial x \partial t} + \frac{\partial^2(\cdot)}{\partial t^2} \\ & + 2\beta \left[y \frac{\partial^2(\cdot)}{\partial x \partial t} - x \frac{\partial^2(\cdot)}{\partial y \partial t} + \frac{1}{2} V \frac{\partial(\cdot)}{\partial y} - V \left(y \frac{\partial^2(\cdot)}{\partial x^2} - x \frac{\partial^2(\cdot)}{\partial x \partial y} \right) \right] \\ & + (\beta)^2 \left[x^2 \frac{\partial^2(\cdot)}{\partial y^2} + y^2 \frac{\partial^2(\cdot)}{\partial x^2} - 2xy \frac{\partial^2(\cdot)}{\partial x \partial y} - \left(x \frac{\partial(\cdot)}{\partial x} + y \frac{\partial(\cdot)}{\partial y} \right) \right] \\ & + \beta \left[y \frac{\partial(\cdot)}{\partial x} - x \frac{\partial(\cdot)}{\partial y} \right]. \end{aligned} \quad (2.5)$$

以上两式中, $V = \sqrt{V_1^2 + V_2^2}$ 为裂纹扩展速度。

本构方程是客观的, 故在局部坐标系中, 对线弹性介质有

$$\sigma = G(\mathbf{u} \nabla + \nabla \mathbf{u}) + \lambda I(\mathbf{u} \cdot \nabla), \quad (2.6)$$

式中 λ, G 为拉梅常数, I 为二阶单位张量。

求裂纹尖端渐近解时, 裂纹面应力自由条件为

$$\sigma_y = \sigma_{xy} = 0, \text{ 当 } \theta = \pm \pi. \quad (2.7)$$

这里 (r, θ) 为以裂纹尖端为原点的极坐标, 和 (x, y) 有如下关系:

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta. \quad (2.8)$$

(2.3)、(2.6)和(2.7)式构成了曲线动力扩展裂纹尖端渐近场的边值问题。

三、裂纹尖端的渐近解

在讨论曲线动力扩展裂纹尖端渐近解前, 我们先给出如下关于裂纹尖端局部应力位移场的等价定理。

定理 曲线动力扩展裂纹尖端应力及位移场的前两阶渐近解(即应力奇异项和常数项)和直线动力扩展裂纹问题的前两阶解相同,但第三阶渐近解不同。

根据此定理及文献[4]的结果,我们便可得到曲线动力扩展裂纹尖端应力及位移的前两阶渐近解

$$\sigma_{\alpha\beta} = \frac{K_I(t)}{\sqrt{2\pi r}} \bar{\sigma}_{\alpha\beta}^I(\theta, V) + \frac{K_{II}(t)}{\sqrt{2\pi r}} \bar{\sigma}_{\alpha\beta}^{II}(\theta, V) + T_{\alpha\beta}, \quad (3.1)$$

$$u_\alpha = \frac{K_I(t)}{G} \sqrt{\frac{2r}{\pi}} \bar{u}_\alpha^I(\theta, V) + \frac{K_{II}(t)}{G} \sqrt{\frac{2r}{\pi}} \bar{u}_\alpha^{II}(\theta, V) + \frac{3K_I^0(t)}{\sqrt{2\pi} G} r \bar{u}_{\alpha 2}^I(\theta, V) + \frac{3K_{II}^0(t)}{\sqrt{2\pi} G} r \bar{u}_{\alpha 2}^{II}(\theta, V). \quad (3.2)$$

以上两式中, K_I, K_{II} 分别为 I 型及 II 型应力强度因子, K_I^0, K_{II}^0 仅依赖于时间 t ($K_I, K_{II}, K_I^0, K_{II}^0$ 不能由局部分析确定), $T_{\alpha\beta}$ 中只有 T_{xx} 不为零且和裂纹扩展速度有关。在 (3.1)、(3.2) 式中的角分布函数及 T_{xx} 的详细表达式可参见文献[4]。

下面我们给出定理的证明。

将 (3.1)、(3.2) 式代入 (2.3) 式可知, (2.3) 式左端对应于首阶渐近解(奇异应力)及二阶渐近解(常应力, 指不依赖于空间位置)的项在裂纹尖端分别有阶次 $O(r^{-3/2})$ 和 $O(r^{-1})$ 。而由 (2.4) 式、(2.3) 式右端方括号中对应于首阶渐近解的项具有阶次 $O(r^{-1/2})$, 从而这些项对裂纹尖端前两阶渐近解没有贡献。此外, 将 (3.2) 代入 (2.5) 式可知, 仅 (2.5) 式右端第一项对前两阶渐近解有贡献。故求裂纹尖端前两阶渐近解时, 运动方程简化为

$$\sigma \cdot \nabla - \rho V^2 \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial x^2}, \quad (3.3)$$

这和直线扩展裂纹问题的运动方程是相同的。由于本构方程 (2.6) 式和边界条件 (2.8) 式对两种扩展问题是相同的, 因此, 定理的第一部分得证。

考虑三阶渐近解。由文献[4], 此时应力和位移的阶次分别为 $O(r^{1/2})$ 和 $O(r^{3/2})$ 。从而应力梯度具有阶次 $O(r^{-1/2})$ 。如上所述, (2.3) 式右端方括号中的项亦具阶次 $O(r^{-1/2})$ (对应于首阶渐近解)。故求三阶渐近解时, 运动方程可简化为

$$\sigma \cdot \nabla - \rho V^2 \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial x^2} + \rho \left[-\dot{V} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} - 2V \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial x \partial t} + V\beta \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial y} - 2V\beta \left(y \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial x^2} - x \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial x \partial y} \right) + 2V\mathbf{A} \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} \right], \quad (3.4)$$

这和直线扩展裂纹是不同的。因此, 文献[4]关于直线扩展裂纹问题的三阶渐近解不适合于曲线扩展裂纹问题。至此已完成了证明。

参 考 文 献

- [1] Ramulu, M. and Kobayashi, A. S., *Int. J. Fracture*, 27(1985), 3-4: 187-201.
- [2] Freund, L. B. and Clifton, R. J., *J. Elasticity*, 4(1974), 4: 293-299.
- [3] Achenbach, J. D. and Bažant, Z. P., *J. Appl. Mech.*, 42(1975), 1: 183-189.
- [4] Nishioka, T. and Atluri, S. N., *Engng Fracture Mech.*, 18(1983), 1: 1-22.
- [5] Atluri, S. N. and Nishioka, T., *Int. J. Fracture*, 27(1985), 3-4: 245-261.
- [6] 郭仲衡, 非线性弹性理论, 科学出版社, 1980.