



规范势分解与拓扑流理论及其在拓扑绝缘体研究中的应用

朱温文¹, 刘鑫^{1,2*}

1. 北京工业大学理论物理研究所, 北京 100124;

2. 北京工业大学北京-都柏林国际学院, 北京 100124

*联系人, E-mail: xin.liu@bjut.edu.cn

收稿日期: 2018-05-01; 接受日期: 2018-05-17; 网络出版日期: 2018-08-29

国家自然科学基金(批准号: 11572005)及北京市海聚工程青年项目资助

摘要 段一士教授等人提出的规范势分解理论和拓扑流理论, 在规范场的拓扑和内部几何结构的研究方面具有重要理论指导意义, 同时在各种物理系统中的拓扑缺陷和激发的分析方面具有广泛的适用性和实用价值。本文先对这一理论体系做简短的总结回顾, 然后结合一个具体实例—二维拓扑绝缘体—加以说明。拓扑绝缘体是近年来国际上凝聚态物理的一个研究热点, 其拓扑效应来源于其中非平庸的陈数等拓扑数。本文拟着重研究当中的各种拓扑缺陷, 将其纳入一个统一的框架加以分析—’t Hooft单极子规范理论, 即非Abel规范场中的U(1)子场理论。

关键词 规范势分解, 拓扑流理论, 拓扑绝缘体, 陈数, 拓扑缺陷

PACS: 11.15.-q, 02.40.-k, 73.43.-f

1 引言

揭示物理问题中的几何与拓扑本质是理论物理研究的核心任务之一。现代几何和拓扑学的概念和方法对宇宙学、粒子和凝聚态物理研究都产生了深远的影响, 重要例子包括: 黎曼几何框架下的广义相对论, Yang-Mills场和纤维丛理论的等同, 椭圆微分算子指标对物理系统零模解的确定, 超对称量子力学与流形的拓扑数通过Morse理论的相互联系, Chern-Simons场论中的纽结不变量及其在圈量子引力方面的应用, 早期宇宙中的宇宙弦拓扑缺陷, 超流

和超导体中的涡线拓扑量子化, 以及本文将要讨论的二维拓扑绝缘体, 等等。

段一士和葛墨林^[1]提出的规范势分解和拓扑流理论, 核心内容是从规范场(Abelian与非Abelian)的纤维丛理论出发, 认为流形的几何和拓扑信息可用其上分布的基本物理场(复标量、矢量、旋量等)来表达。基本场可诱导出一个拓扑规范势, 表出其内部结构。规范势是主纤维丛上的联络, 用它可以构造丛上的曲率张量即规范场强度; 更进一步, 流形上的拓扑示性类又可以用曲率张量通过Chern-Weil同态的方式来构造^[2]。这样流形的几何拓扑信息就逐层

引用格式: 朱温文, 刘鑫. 规范势分解与拓扑流理论及其在拓扑绝缘体研究中的应用. 中国科学: 物理学 力学 天文学, 2018, 48: 100003
 Zhu W W, Liu X. Gauge potential decomposition and topological current theories with applications in the study of topological insulators (in Chinese). Sci Sin-Phys Mech Astron, 2018, 48: 100003, doi: 10.1360/SSPMA2018-00165

传递到示性类; 特别地, 发现示性类往往具有一种被称为拓扑流的特定数学形式, 该形式可化为关于基本场的 δ -函数. 后者清晰地表明系统中含有拓扑缺陷, 其拓扑荷以及位置、运动等重要信息都可加以确定. 这一理论阐明了示性类的内部微分结构, 揭示出拓扑效应的微分起源, 可广泛适用于不同维度的物理系统, 具有重要的实用价值. 本文将对这一理论进行简要地回顾与概括, 然后以二维拓扑绝缘体为例进行展示与说明.

2 规范势分解

2.1 规范势分解思想的起源—黎曼几何

令 M 为一个流形, 坐标为 x^μ , $\mu = 1, 2, \dots, \dim M$. 流形的几何可用度规张量 $g_{\mu\nu}(x)$ 描述, 定义为 $ds^2 = g_{\mu\nu}x^\mu x^\nu$. 黎曼几何基于如下3个条件:

- 度规对称性(Symmetric Metric):

$$g_{\mu\nu} = g_{\nu\mu}. \quad (1)$$

- 无挠性(Torsion Free):

$$T_{\mu\nu}^\sigma = \Gamma_{\mu\nu}^\sigma - \Gamma_{\nu\mu}^\sigma = 0. \quad (2)$$

- 平行场条件(Parallel Field Condition):

$$\nabla_\lambda g_{\mu\nu} = 0. \quad (3)$$

其中平行场条件是规范势分解思想的起源. 事实上, 式(3)中的协变微商定义为

$$\nabla_\lambda g_{\mu\nu} = \partial_\lambda g_{\mu\nu} - \Gamma_{\lambda\mu}^\sigma g_{\sigma\nu} - \Gamma_{\lambda\nu}^\sigma g_{\mu\sigma}, \quad (4)$$

其中, $\Gamma_{\mu\nu}^\sigma$ 是仿射联络(Affine Connection). 取 $\nabla_\lambda g_{\mu\nu} = 0$, 从式(4)即可反解出

$$\Gamma_{\mu\nu}^\rho = \frac{1}{2}g^{\rho\sigma}\left(\partial_\mu g_{\nu\sigma} + \partial_\nu g_{\sigma\mu} - \partial_\sigma g_{\mu\nu}\right), \quad (5)$$

被称为克里斯托弗(Christoffel)联络. 它意味着:

- 作为流形 M 的基本场, 度规 $g_{\mu\nu}$ 可以完全传达 M 的几何信息;

- $g_{\mu\nu}$ 通过式(5)诱导(Induce)出一个仿射联络, 能够保证 $\nabla_\lambda g_{\mu\nu} = 0$ 条件处处被满足.

• 这样一来, 基本场 $g_{\mu\nu}$ 所携带的几何信息就输入进联络 $\Gamma_{\mu\nu}^\rho$.

接下来, 由于流形的曲率张量本就由联络定义,

$$R_{\sigma\mu\nu}^\lambda = \partial_\mu \Gamma_{\nu\sigma}^\lambda - \partial_\nu \Gamma_{\mu\sigma}^\lambda + \Gamma_{\mu\sigma}^\lambda \Gamma_{\nu\sigma}^\alpha - \Gamma_{\nu\sigma}^\lambda \Gamma_{\mu\sigma}^\alpha, \quad (6)$$

那么式(5)代入式(6)就把基本场 $g_{\mu\nu}$ 及几何信息输入了曲率 $R_{\sigma\mu\nu}^\lambda$:

$$R_{\sigma\mu\nu}^\lambda = R_{\sigma\mu\nu}^\lambda [g_{\mu\nu}(x)]. \quad (7)$$

进一步地, 我们知道多种著名的拓扑示性类如Chern类、Pontrjagin类、Euler类, 都是由曲率张量通过Chern-Weil同态构造的, 如^[2]:

总陈类:

$$C(E) = \det\left(I + \frac{i}{2\pi}R\right), \quad (8)$$

总Pontrjagin类:

$$P(E) = \det\left(I - \frac{1}{2\pi}R\right), \quad (9)$$

其中, E 是纤维丛, R 是曲率. 进一步地, 式(8)和(9)各自都可展开, 比如总陈类有展开:

$$C(E) = 1 + C_1(E) + C_2(E) + \dots, \quad (10)$$

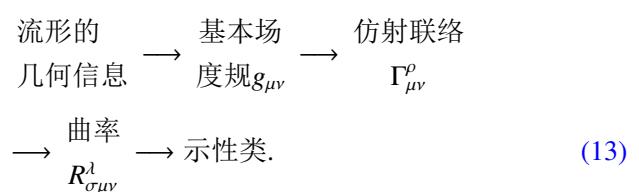
其中每一项 C_i , $i = 1, 2, \dots$, 都是拓扑不变量, 称为第*i*陈类:

$$C_1(E) = \frac{i}{2\pi} \text{Tr } R, \quad (11)$$

$$C_2(E) = \frac{1}{8\pi^2} [\text{Tr}(R \wedge R) - (\text{Tr } R) \wedge (\text{Tr } R)], \quad (12)$$

...

于是 $g_{\mu\nu}$ 的几何信息就进一步输入示性类, 过程可图示为



这可称为用基本场 $g_{\mu\nu}$ 对仿射联络 $\Gamma_{\mu\nu}^\rho$ 的分解, 即用前者表达出后者的内部结构.

2.2 规范势分解

式(13)的逻辑可推广到更宽泛的情形—规范场, 即主纤维丛(Principal Bundle)的联络. 所谓主纤维丛是如下定义的一个纤维丛($E, \pi, \mathcal{M}, F, G$):

$$\begin{array}{ccc} F & \longrightarrow & E \\ & \downarrow \pi & \\ G & \quad \mathcal{M}, & \end{array} \quad (14)$$

其中, F 是标准纤维, π 是投射. G 是结构群, 表达底流形不同欧式覆盖之间的坐标转换函数所满足的群结构. 那么, 如果结构群同构于标准纤维,

$$F \cong G, \quad (G \text{可左作用于 } F), \quad (15)$$

则此纤维丛称为主丛, 或主 G -丛, 记为

$$\begin{array}{ccc} G & \longrightarrow & E \\ & \downarrow \pi & \\ & \quad \mathcal{M}. & \end{array} \quad (16)$$

物理上结构群称为规范群(Gauge Group), 通常取Lie群. 在主丛的条件下, 流形上的坐标转换就可转化为纤维上的滑动来处理, 对应于物理上的规范变换.

物理的规范场理论中的规范势(Gauge Potential)从数学角度看是主丛上的联络, 可认为由底流形上的联络水平提升得来; 规范场强度(Gauge Field Strength)则是主丛上的曲率张量. 那么, 模仿式(13), 我们也可用基本场对主丛联络(规范势)进行分解. 考虑一个物理系统, 用作用量泛函描述为

$$I(\Phi) = \int_{\mathcal{M}} \mathcal{L}(\Phi) d^n x, \quad (17)$$

其中, \mathcal{L} 是拉氏量. x^μ 是流形坐标, $\mu = 1, 2, \dots, n = \dim \mathcal{M}$. 基本场一般性地用 $\Phi(x)$ 标记, 可指代复标量、矢量、旋量场等, $\Phi = \Phi^a(x) T_a$, 其中 T_a 是规范群的生成元. $\{T_a\}$ 构成李代数的基, 群指标 $a = 1, 2, \dots, \dim G$. 对作用量的变分给出Euler-Lagrange方程:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi^a} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \Phi^a} = 0. \quad (18)$$

在一定的底流形 \mathcal{M} 上的边条件之下, 此方程的解给出 Φ -场的一个分布, $\Phi(x)$. 这里注意, 式(18)是动力学方程; 所求出的 Φ 分布是动力学算子与底流形拓扑联合作用的结果. Φ 分布一旦求出, 就已经带上了动力学和底流形几何的双重信息.

循黎曼几何式(4)的思路, 可基于 Φ 场分布诱导出一个协变微商, 满足平行场条件:

$$D_\mu \Phi = \partial_\mu \Phi - g_A [A_\mu^{\text{ind}}, \Phi] = 0, \quad (19)$$

其中, A_μ^{ind} 是引进的诱导规范势, 李括号表示其与 Φ 场的相互作用, 作用常数 g_A (为方便起见取为 $g_A = 1$). 然后, 就可模仿Christoffel联络式(5)对 A_μ^{ind} 进行规范势分解, 也即通过式(19)反解出 A_μ^{ind} , 用 Φ 表达其内部结构¹⁾:

$$A_\mu = A_\mu(\Phi, d\Phi, D\Phi), \quad \text{其中 } D\Phi = 0. \quad (20)$$

A_μ 满足规范变换

$$A'_\mu = S A_\mu S^{-1} + dS S^{-1}, \quad (21)$$

其中, $S(x)$ 是群 G 的规范变换.

这样一来, 对主丛的拓扑研究也可以有与式(13)类似的几何拓扑信息输入链条:

$$\begin{array}{ccccc} & & \text{基本场 } \Phi \text{ 分布} & & \\ \text{运动方程} & \xrightarrow{\quad} & (\text{流形及缺陷} & \xrightarrow{\quad} & \text{主丛} \\ + & \xrightarrow{\quad} & \text{的几何信息}) & \xrightarrow{\quad} & \text{联络 } A_\mu \\ \text{边界条件} & & + & & (\text{规范势}) \\ & & & & \text{诱导平行场条件} \\ & & & & \\ \xrightarrow{\quad} & & \text{主丛曲率} & \xrightarrow{\quad} & \text{示性类} \\ & & \xrightarrow{\quad} & & \\ \xrightarrow{\quad} & & \text{张量 } F_{\mu\nu} & \xrightarrow{\quad} & \text{或} \\ & & (\text{规范场强度}) & & \xrightarrow{\quad} \text{拓扑流} \\ & & & & \xrightarrow{\quad} \text{缺陷, } \\ & & & & \text{示性类} \end{array} \quad (22)$$

其中,

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu - [A_\mu, A_\nu]. \quad (23)$$

而示性类用 $F_{\mu\nu}$ 构造, 如前式(8)和(9)所示. 次级示性类用 $F_{\mu\nu}$ 和 A_μ 构造, 如3-维流形上的Chern-Simons形式¹⁾:

$$I = \int_{\mathcal{M}} \text{Tr} \left[F \wedge A + \frac{1}{3} A \wedge A \wedge A \right]. \quad (24)$$

1) 式(24)是一般形式, 其中的规范群是一般的Non-Abelian群 G . 若 G 特别地是一个Abelian群, 则没有非线性项, 写作 $I = \int_{\mathcal{M}} F \wedge A$.

2.3 几点说明

2.3.1 外加规范势与诱导规范势的区别

在描述物理模型的系统拉氏量 \mathcal{L} 中可能含有一些外加规范势, 记为 $B_\mu^{\text{ext}}, C_\mu^{\text{ext}}, \dots$, 其来源是外加物理作用. 基本场 Φ 是给定 $B_\mu^{\text{ext}}, C_\mu^{\text{ext}}, \dots$ 之后, 通过解微分方程得到的解. 而 A_μ^{ind} 则不同, 它是在 Φ 场确定以后, 从 Φ 的分布诱导出的规范势, 承载的是由 Φ 传递而来的动力学算子和底流形几何(由边条件表达)联合作用的信息. 与下文式(25)不同的是, 内部结构 $A_\mu^{\text{ind}}(\Phi, d\Phi)$ 中只含流形的背景几何, 不牵涉具体的物质场, 因为 $d\Phi$ 只是普通微商而非协变的 $D\Phi$.

$B_\mu^{\text{ext}}, C_\mu^{\text{ext}}, \dots$ 作为规范势描述某外加物理场的作用; 从量子场论观点看, 它们代表某些粒子. 对此我们可推广规范势分解的思想, 也用基本场表达出 $B_\mu^{\text{ext}}, C_\mu^{\text{ext}}, \dots$ 的内部结构, 如

$$B_\mu^{\text{ext}} = B_\mu^{\text{ext}}(\Phi, d\Phi, \tilde{D}\Phi), \quad (25)$$

但此时 $\tilde{D}\Phi$ 一般不为零,

$$\tilde{D}_\mu\Phi = \partial_\mu\Phi - [B_\mu^{\text{ext}}, \Phi] \neq 0. \quad (26)$$

对式(25)的理解是: 当中 $(\Phi, d\Phi)$ 仍然反映流形的背景几何信息, 但 $\tilde{D}\Phi$ 是协变微商, 可用于构造拉氏量, 反映真实物理粒子的场^[3,4].

2.3.2 此方法与 θ -项方法的区别

通常在考察物理系统的拓扑效应时, 人们习惯于在通常的物理拉氏量以外再增加一个额外的拓扑项^[2,5]

$$S = \int_M \sqrt{-g} d^4x [L_{\text{dyn}} + L_{\text{top}}], \quad (27)$$

其中 L_{dyn} 是物理的动力学项, 而 L_{top} 是一个拓扑不变量, 比如以第二陈类来充当的 θ -项. 但是, 我们认为这样的 θ -项只能用来传递底流形 M 自身的整体拓扑信息, 而不能反映由于动力学算子作用上去以后新产生的拓扑缺陷引起的拓扑非平庸性质.

如图1所示的例子, 底流形 M 是一个环面 T^2 . 动力学的运动方程和边条件联合起来可解出基本场 Φ , 而后者的分布当中存在非平庸性; 比如源或

汇的形状, 从拓扑观点看就是缺陷, 而 Φ 分布正携带了形成源或汇的几何拓扑信息. 为提炼这些信息, 我们用 Φ 通过平行场条件诱导构造出有一个规范势 A^{ind} 及相应的规范场张量 F^{ind} , 这就为进一步构造使用拓扑示性类创造了条件.

2.4 一些典型的规范势分解结果

2.4.1 $U(1)$ 规范势的复标量分解

宇宙学暗能量的Quitessence模型当中可以有如下的协变微商及平行场条件^[5,6]

$$D_\mu^{\text{ind}}\psi = \partial_\mu\psi - \frac{i}{\alpha}A_\mu^{\text{ind}}\psi = 0, \quad (28)$$

其中, ψ 是复标量, 充当宇宙Quitessence背景场. $\alpha = \sqrt{\hbar G/c^3}$ 是耦合常数, \hbar, G, c 分别是普朗克常数、引力常数和光速. 诱导规范势满足 $U(1)$ 对称性, 其分解结果是

$$A_\mu^{\text{ind}} = \frac{\alpha}{2i\psi^*\psi} (\psi^*\partial_\mu\psi - \partial_\mu\psi^*\psi),$$

* — 复共轭. (29)

此结果恰与量子力学的流体力学图景(Formalism)中的速度场定义一致.

2.4.2 $SO(2)$ 规范势的矢量分解

从群结构来讲 $U(1) \cong SO(2)$. 在上例中, 可写出 ψ 的实部和虚部:

$$\psi(x) = \phi^1(x) + i\phi^2(x), \quad \phi^1, \phi^2 \in \mathbb{R}, \quad (30)$$



图1 (网络版彩图)考虑一个底流形 T^2 , 其上分布有3个拓扑缺陷. θ -项只能表达环面 $T^2 = S^1 \times S^1$ 的非平庸拓扑, 却无法关注拓扑缺陷所造成的非平庸

Figure 1 (Color online) Let us consider a base manifold T^2 , on which exist three topological defects. A θ -term can only deliver the non-trivial topology of the torus $T^2 = S^1 \times S^1$, but not able to reflect the non-triviality caused by the defects.

则可进一步定义二维单位矢量

$$n^a = \frac{\phi^a}{\|\phi\|}, \quad a = 1, 2; \quad \|\phi\|^2 = \phi^a \phi^a = \psi^* \psi. \quad (31)$$

于是 A_μ^{ind} 作为 $SO(2)$ 规范势可分解为 [5,6]

$$A_\mu^{\text{ind}} = \alpha \epsilon_{ab} n^a \partial_\mu n^b. \quad (32)$$

2.4.3 $SU(N)$ 规范势用Cartan子代数局域基进行分解

令 T_a , $a = 1, 2, \dots, r$, 为 $SU(N)$ 群的 r 个生成元, 即 $\mathfrak{su}(N)$ 李代数基的 r 个分量, $r = N^2 - 1$. T_a 满足如下(反)对易性、厄米性与无迹性 [7]:

$$[T_a, T_b] = i f_{abc} T_c, \quad \{T_a, T_b\} = d_{abc} T_c + \frac{1}{N} \delta_{ab} I, \quad (33)$$

$$T_a^\dagger = T_a, \quad \text{Tr}(T_a) = 0,$$

其中, f_{abc} 和 d_{abc} 是 $\mathfrak{su}(N)$ 结构常数, f_{abc} 全反对称, d_{abc} 全对称. 在 $\{T_a\}$ 当中有 $N - 1$ 个分量, 记为 $\{H_l\}$, 构成一个Cartan子代数, 满足

$$[H_l, H_m] = 0, \quad l, m = 1, \dots, N - 1. \quad (34)$$

定义 $SU(N)$ 局域基为

$$n_l = U(x) H_l U^\dagger(x), \quad n_l = n_l^a T_a, \quad l = 1, \dots, N - 1, \quad (35)$$

其中 $U(x)$ 是 $SU(N)$ 规范变换矩阵, 表达一种局域旋转. 于是, 定义协变微商及平行场条件为

$$D_\mu n_l = \partial_\mu n_l - ig \left[A_\mu, n_l \right] = 0, \quad g—耦合常数, \quad (36)$$

就可得到规范势分解

$$A_\mu = (A, n_l) n_l + \frac{1}{ig} \left[\partial_\mu n_l, n_l \right], \quad \text{i.e.,}$$

$$A_\mu^a = A_\mu^l n_l^a + \frac{1}{g} f_{abc} \partial_\mu n_l^b n_l^c, \quad (37)$$

其中, $[,]$ 表内积. 进一步地可证明 $\partial_\mu n_l = [V_\mu, n_l]$, 其中 $V_\mu = \partial_\mu U U^\dagger$ 是平联络(纯规范). 则有 [8]

$$A_\mu = (A, n_l) n_l + \frac{1}{ig} \left[[V_\mu, n_l], n_l \right]. \quad (38)$$

2.4.4 $SO(N)$ 规范势用Clifford代数1-矢量局域基进行分解

Clifford代数 Cl_N 的 $\frac{1}{2}N(N - 1)$ 维子空间 $Cl_N^{(2)}$ 同构于群 $SO(N + 1)$ 的无穷小环, 因此 Cl_{N-1} 的每个表示都导致李代数 $\mathfrak{so}(N)$ 的一个表示. 故 $SO(N)$ 群生成元 I_{ab} 可表达为Clifford代数2-矢量:

$$I_{ab} = \frac{1}{4} [\gamma_a, \gamma_b], \quad (39)$$

其中 γ_a 是Clifford的代数的生成元, 定义为

$$\{\gamma_a, \gamma_b\} = 2\delta_{ab} \mathbf{1}, \quad a = 1, \dots, N. \quad (40)$$

I_{ab} 满足对易关系:

$$[I_{ab}, \gamma_c] = \delta_{bc} \gamma_a - \delta_{ac} \gamma_b, \quad (41)$$

$$[I_{ab}, I_{cd}] = \delta_{ad} I_{bc} + \delta_{bc} I_{ad} - \delta_{ac} I_{bd} - \delta_{bd} I_{ac}, \quad (42)$$

满足 $I_{ab} = -I_{ba}$.

这被称为 $\mathfrak{so}(N)$ 李代数的Clifford表示或旋表示, 而相应地 $SO(N)$ 规范势就成为自旋联络.

引进Clifford 1-矢量局域基

$u_i = \mathbf{O}(x) \gamma_i \mathbf{O}^\dagger(x)$, 可有展开

$$u_i = u_i^a \gamma_a, \quad i = 1, \dots, N. \quad (43)$$

其中, $\mathbf{O}(x)$ 是 $SO(N)$ 规范变换矩阵, 表达一种局域旋转.

协变微商及平行场条件定义为

$$D_\mu u_i = \partial_\mu u_i - [\omega_\mu, u_i] = 0, \quad (44)$$

其中, $SO(N)$ 规范势 $\omega_\mu = \frac{1}{2} \omega_\mu^{ab} I_{ab}$ 是一个Clifford 2-矢量. 于是可计算规范势分解为 [9]

$$\omega_\mu = \frac{1}{4} \partial_\mu u_i u_i. \quad (45)$$

2.4.5 $SO(N)$ 规范势用Clifford代数2-矢量局域基进行分解

引进Clifford 2-矢量局域基

$u_{ij}(x) = \mathbf{O}(x) I_{ij} \mathbf{O}^\dagger(x)$, 可有展开

$$u_{ij} = \frac{1}{2} u_{ij}^{ab} I_{ab}, \quad i, j = 1, \dots, N. \quad (46)$$

协变微商及平行场条件定义为

$$D_\mu u_{ij} = \partial_\mu u_{ij} - [\omega_\mu, u_{ij}] = 0, \quad (47)$$

其中 $SO(N)$ 规范势 $\omega_\mu = \frac{1}{2}\omega_\mu^{ab}I_{ab}$ 是一个 Clifford 2-矢量. 于是可计算规范势分解为 [9]

$$\omega_\mu = \frac{1}{2N}\partial_\mu u_{ij}u_{ji}. \quad (48)$$

2.4.6 $SU(M|N)$, $M \neq N$, 规范势用李超代数局域基进行分解

$SU(M|N)$, $M \neq N$, 李超群的生成元, 即 $\mathfrak{su}(M|N)$ 李超代数的基, 为

$$\{\hat{e}_{ab} | a, b = 1, \dots, M, M+1, \dots, M+N\}. \quad (49)$$

\hat{e}_{ab} 是 Z_2 -阶化代数元素, 其阶化

$$[\hat{e}_{ab}] = [a] + [b], \quad (50)$$

当中前 M 个计数的字称为偶, 后 N 个字称为奇,

$$\begin{aligned} [1] &= \dots = [M] = \text{even} = 0, \\ [M+1] &= \dots = [M+N] = \text{odd} = 1. \end{aligned} \quad (51)$$

$\{\hat{e}_{ab}\}$ 满足如下超对易关系 [10]:

$$[\hat{e}_{ab}, \hat{e}_{cd}] = \hat{e}_{ad}\delta_{bc} - (-1)^{(|a|+|b|)(|c|+|d|)}\hat{e}_{cb}\delta_{da}. \quad (52)$$

在基础表示下:

$$\hat{e}_{ab} = e_{ab} - \delta_{ab}\frac{(-1)^{|a|}}{M-N}\mathbf{1}, \quad (53)$$

其中, e_{ab} 是 $(M+N) \times (M+N)$ 矩阵, 其矩阵元只有 (a, b) 位置的为 1, 其余都为 0. $\mathbf{1}$ 是单位阵. \hat{e}_{ab} 满足无迹性

$$S\text{tr}(\hat{e}_{ab}) = 0. \quad (54)$$

$S\text{tr}(\mathbf{X})$ 是表示矩阵 \mathbf{X} 的超迹, 定义为

$$S\text{tr}(\mathbf{X}) = \sum_i (-1)^{|i|} X_{ii}, \quad (55)$$

i 为矩阵元指标. \hat{e}_{ab} 满足恒等式 $\sum_{a=1}^{M+N} \hat{e}_{ab} = 0$.

与上文类似, 引进局域基

$$\hat{u}_{ab} = U\hat{e}_{ab}U^{-1}, \quad \text{满足 } S\text{tr}(\hat{u}_{ab}) = 0. \quad (56)$$

需要指出, $[U] = \text{even}$ 总成立, 这是因为将其在局域基上展开, $U = U^{ab}\hat{e}_{ab}$, a, b 总是成对出现.

协变微商及平行场条件定义为

$$\begin{aligned} D_\mu \hat{u}_{ab} &= \partial_\mu \hat{u}_{ab} - [A_\mu, \hat{u}_{ab}] \\ &= \partial_\mu \hat{u}_{ab} - (A_\mu \hat{u}_{ab} - \hat{u}_{ab} A_\mu) = 0, \end{aligned} \quad (57)$$

其中类似地总有 $[A] = \text{even}$.

规范势分解的结果为

$$A_\mu = \frac{(-1)^{|b|}}{M-N}\partial_\mu \hat{u}_{ab}\hat{u}_{ba}, \quad M \neq N. \quad (58)$$

等价地还可表示为下面两种形式:

$$\begin{aligned} A_\mu &= \frac{(M-N)^2 - 1}{(M-N)^2}\partial_\mu UU^{-1} - \frac{1}{M-N}S\text{tr}(\partial_\mu UU^{-1})\mathbf{1} \\ &\quad + \frac{1}{(M-N)}\partial_\mu UU^{-1}, \end{aligned} \quad (59)$$

或

$$A = A^{ij}\hat{e}_{ij}, \quad (60)$$

其中

$$\begin{aligned} A^{ij} &= \frac{1}{M-N}(-1)^{|b|}(-1)^{(|i|+|k|)(|a|+|b|+|k|+|j|)} \\ &\quad \times \left[\text{d}\hat{u}_{ab}^{ik}\hat{u}_{ba}^{kj} - \text{Dd}\hat{u}_{ab}^{ik}\hat{u}_{ba}^{kj} \right]. \end{aligned}$$

2.4.7 $SU(2)$ (即 $SO(3)$) 规范势用 Pauli 2-旋量进行分解

含自旋的非相对论性量子力学的运动方程是 Pauli 方程, 其中的协变微商及平行场条件定义为

$$D_\mu \Phi = \partial_\mu \Phi - A_\mu \Phi = 0. \quad (61)$$

这里 Φ 是 Pauli 2-旋量, $\Phi = \begin{pmatrix} \psi^1 \\ \psi^2 \end{pmatrix}$, $\psi^1, \psi^2 \in \mathbb{C}$. A_μ 是 $SU(2)$ 规范势, 可展开为 $\mathfrak{su}(2)$ 矢量, $A_\mu = A_\mu^a T_a$. 其中 $T_a = \frac{\sigma_a}{2i}$ 是 $SU(2)$ 生成元, σ_a 是 Pauli 矩阵, $a = 1, 2, 3$.

规范势分解的结果为 [11]

$$A_\mu^a = \frac{i}{\Phi^\dagger \Phi} [\Phi^\dagger \sigma_a \partial_\mu \Phi - \partial_\mu \Phi^\dagger \sigma_a \Phi], \quad (62)$$

或等价地,

$$A_\mu = \frac{1}{\Phi^\dagger \Phi} \left[(\partial_\mu \Phi \Phi^\dagger - \Phi \partial_\mu \Phi^\dagger) - \frac{1}{2} (\Phi^\dagger \partial_\mu \Phi - \partial_\mu \Phi^\dagger \Phi) I \right]. \quad (63)$$

2.4.8 $SO(4)$ 规范势用Dirac 4-旋量进行分解

弯曲空间中相对论性量子力学运动方程为广义协变Dirac方程. 取粒子质量为零(如中微子情况)就得到协变微商

$$\mathbf{D}\Psi = \gamma^\mu \mathbf{D}_\mu \Psi = \gamma^\mu \left(\partial_\mu \Psi - \frac{1}{2} \omega_{\mu ab} I_{ab} \right) \Psi = 0. \quad (64)$$

这里 $\Psi(x)$ 是Dirac 4-旋量, $\Psi = (\psi^1 \ \psi^2 \ \psi^3 \ \psi^4)^T$, $\psi^1, \psi^2, \psi^3, \psi^4 \in \mathbb{C}$, T指转置. 底流形弯曲, 坐标用指标 $\mu = 1, 2, 3, 4$ 表示, 区分上下标; 群空间平直, 用指标 $a, b = 1, 2, 3, 4$ 表示, 不区分上下标. $\omega_\mu(x)$ 是 $SO(4)$ 规范势, $\omega_\mu = \frac{1}{2} \omega_{\mu ab} I_{ab}$, 满足 a, b 指标反对易, $\omega_{\mu ab} = -\omega_{\mu ba}$. $\gamma^\mu(x) = e_a^\mu \gamma_a$ 是广义Dirac矩阵, 由普通Dirac矩阵 γ_a 通过标架(Vierbein) $e_a^\mu(x)$ 提升指标而来. 定义 $\omega_{abc} = e_a^\mu \omega_{\mu bc}$, 就有 $\omega_{abc} = -\omega_{acb}$. 于是式(64)成为

$$\gamma_a \partial_a \Psi - \frac{1}{4} \omega_{abc} \gamma_a \gamma_b \gamma_c \Psi = 0. \quad (65)$$

引进两个实参数 ρ 和 θ :

$$\rho = \sqrt{(\Psi^\dagger \Psi)^2 - (\Psi^\dagger \gamma_5 \Psi)^2},$$

其中

$$\gamma_5 = \gamma_1 \gamma_2 \gamma_3 \gamma_4, \quad (66)$$

$$\cosh \theta = \frac{\Psi^\dagger \Psi}{\rho}, \quad \sinh \theta = \frac{\Psi^\dagger \gamma_5 \Psi}{\rho}, \quad (67)$$

并利用谐和坐标条件

$$\frac{1}{\sqrt{g}} \partial_\nu (\sqrt{g} g^{\nu l}) = 0,$$

即

$$e_a^\mu \partial_\mu e_a^\nu + \frac{1}{2} \omega_a e_a^\nu = 0, \quad (68)$$

可最终得到规范势分解结果 [12]

$$\gamma^\mu \omega_\mu = -\frac{1}{\rho} \gamma^\mu e^{-\gamma_5 \theta} (j_\mu + \tilde{j}_\mu + J_\mu + \tilde{J}_\mu), \quad (69)$$

其中,

$$j_\mu = \frac{1}{2} [(\partial_\mu \Psi^\dagger) \Psi - \Psi^\dagger \partial_\mu \Psi], \quad (70)$$

$$\tilde{j}_\mu = \frac{\gamma_5}{2} [(\partial_\mu \Psi^\dagger) \gamma_5 \Psi - \Psi^\dagger \gamma_5 \partial_\mu \Psi], \quad (71)$$

$$J_\mu = \nabla_\nu (F^\nu_\mu) = \nabla_\nu (\Psi^\dagger \gamma^\nu_\mu \Psi), \quad (72)$$

$$\tilde{J}_\mu = \nabla_\nu (\tilde{F}^\nu_\mu) = \nabla_\nu (\gamma_5 \Psi^\dagger \gamma^\nu_\mu \gamma_5 \Psi). \quad (73)$$

容易看出: j_μ 和 \tilde{j}_μ 分别是相对论量子力学的速度流和赝速度流; F^ν_μ 和 \tilde{F}^ν_μ 具有相对论量子力学的 $U(1)$ 电磁场和赝电磁场张量的意义, 而式(72)和(73)则对应于相应的广义协变Maxwell方程组的第一个方程.

3 拓扑流

3.1 从简单示例说起

前文式(22)指出, 获得规范势基于某特定基本场的分解结果后, 可代入曲率张量构造示性类, 后者常常具有所谓拓扑流的内部结构. 以下先以简单例子示意之.

3.1.1 示例一: $U(1)$ 规范场的第一陈类及相应的拓扑缺陷

前文式(29)给出了 $U(1)$ 规范势分解结果. 将复标量基本场表达为 $\psi = \phi^1 + i\phi^2$ 形式后就转化为 $SO(2)$ 规范势分解的结果式(32),

$$A_\mu^{\text{ind}} = \alpha \epsilon_{ab} n^a \partial_\mu n^b,$$

即1-形式:

$$A^{\text{ind}} = A_\mu^{\text{ind}} dx^\mu = \alpha \epsilon_{ab} n^a dn^b. \quad (74)$$

其中 \mathbf{n} 是由 ϕ 定义的二维单位矢量, $n^a = \frac{\phi^a}{\|\phi\|}$, $a = 1, 2$. 以下为简单起见取物理常数 $\alpha = 1$, 并略去上标“ind”字样.

将式(74)代入 $U(1)$ 规范场张量的定义:

$$f_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu,$$

有

$$f_{\mu\nu} = \epsilon_{ab} \partial_\mu n^a \partial_\nu n^b, \quad (75)$$

也即2-形式:

$$\begin{aligned} f &= \frac{1}{2} f_{\mu\nu} dx^\mu \wedge dx^\nu = \frac{1}{2} \epsilon_{ab} \partial_\mu n^a \partial_\nu n^b dx^\mu \wedge dx^\nu, \\ &= \epsilon_{ab} dn^a \wedge dn^b = \frac{1}{2} \epsilon^{\mu\nu} \epsilon_{ab} \partial_\mu n^a \partial_\nu n^b d^2x. \end{aligned} \quad (76)$$

若底流形为简单的二维²⁾, 可以有拓扑不变量第一陈数, 定义为第一陈类式(11)的积分,

$$c_1 = \int_{M^2} C_1 = \frac{1}{2\pi} \int_{M^2} f, \quad \text{其中, } C_1 = f. \quad (77)$$

引入2-维拓扑流^[5,6]:

$$j(x) = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{2} \epsilon^{\mu\nu} \epsilon_{ab} \partial_\mu n^a \partial_\nu n^b, \quad (78)$$

有

$$f(x) = 2\pi j(x) d^2x,$$

那么

$$c_1 = \int_{M^2} j(x) d^2x. \quad (79)$$

可以证明, 利用以下公式:

$$\partial_\mu n^a = \frac{\partial_\mu \phi^a}{\|\phi\|} + \phi^a \partial_\mu \frac{1}{\|\phi\|}, \quad (80)$$

$\partial_a \partial_a \ln \|\phi\| = 2\pi \delta^2(\phi)$ (格林公式),

拓扑流可以表达成二维 δ -函数的形式

$$j(x) = \delta^2(\phi) D\left(\frac{\phi}{x}\right), \quad (81)$$

其中, $D\left(\frac{\phi}{x}\right)$ 是Jacobian,

$$\epsilon^{ab} D\left(\frac{\phi}{x}\right) = \epsilon^{\mu\nu} \partial_\mu \phi^a \partial_\nu \phi^b,$$

即

$$D\left(\frac{\phi}{x}\right) = \frac{1}{2} \epsilon_{ab} \epsilon^{\mu\nu} \partial_\mu \phi^a \partial_\nu \phi^b, \quad (82)$$

于是第一陈数

$$c_1 = \int_{M^2} \delta^2(\phi) D\left(\frac{\phi}{x}\right) d^2x. \quad (83)$$

δ -函数是广义函数, 它仅在 ϕ 的零点即**n**的奇点处不为零, 其他地方全为零,

$$\delta^2(\phi) = \begin{cases} 0, & \text{当且仅当 } \phi^a \neq 0; \\ \infty, & \text{当且仅当 } \phi^a = 0, \end{cases} \quad a = 1, 2. \quad (84)$$

这就要求在以 x^1, x^2 为坐标的二维底流形上解如下的零点方程:

$$\phi^1(x^1, x^2) = 0, \quad \phi^2(x^1, x^2) = 0. \quad (85)$$

隐函数定理指出, 在正规条件(Regular Condition) $D\left(\frac{\phi}{x}\right) \neq 0$ 下, 式(85)有N个孤立解:

$$x^\mu = x_k^\mu, \quad k = 1, 2, \dots, N. \quad (86)$$

这对应着 ϕ 场的N个零点, 即单位向量场**n**的N个奇点, 也即二维底流形上的N个拓扑点缺陷. 于是 δ -函数可以展开到这些奇点上,

$$\delta^2(\phi) = \sum_{k=1}^N W_k \delta^2(x^\mu - x_k^\mu),$$

其中

$$W_k = \beta_k \eta_k. \quad (87)$$

W_k 的意义是第k个缺陷的拓扑荷, β_k 是Hopf 指标, $\eta_k = \pm 1$ 是Brouwer映射度. 进而第一陈数就成为下面的形式, 清楚地显示它其实就是底流形上二维点缺陷各自所携带的拓扑荷的代数和:

$$c_1 = \sum_{k=1}^N W_k = \sum_{k=1}^N \beta_k \eta_k. \quad (88)$$

2) 如果底流形不是二维, 则取其二维子流形, 相应的坐标用二维的子流形坐标 u^1, u^2 . 参后文.

3.1.2 示例二: Abelian Chern-Simons场论及纽结不变量

延续上面的例子. 上面考虑的是底流形为二维的情况; 如果底流形为三维空间, 则拓扑缺陷就是一维曲线. 更进一步, 如果这些曲线是闭合的³⁾, 则它们之间就有相互缠绕的情况出现, 即进入了纽结理论的范畴.

考虑三维底流形 \mathcal{M}^3 , 坐标为 x^1, x^2, x^3 . 我们现在考虑另一个拓扑不变量, $U(1)$ Chern-Simons 3-形式:

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathcal{M}^3} A \wedge f = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathcal{M}^3} \frac{1}{2} \epsilon^{\mu\nu\rho} A_\mu f_{\nu\rho} d^3x \\ &= \int_{\mathcal{M}^3} A_\mu j^\mu d^3x, \end{aligned} \quad (89)$$

其中已引进拓扑流:

$$j^\mu = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{2} \epsilon^{\mu\nu\rho} \epsilon_{ab} \partial_\nu n^a \partial_\rho n^b. \quad (90)$$

与上文相似, 拓扑流可以写成 δ -函数的形式,

$$j^\mu = \delta^2(\phi) D^\mu \left(\frac{\phi}{x} \right),$$

其中

$$D^\mu \left(\frac{\phi}{x} \right) = \frac{1}{2} \epsilon_{ab} \epsilon^{\mu\nu\rho} \partial_\nu \phi^a \partial_\rho \phi^b. \quad (91)$$

同样有

$$\delta^2(\phi) = \begin{cases} 0, & \text{当且仅当 } \phi^a \neq 0, \\ \infty, & \text{当且仅当 } \phi^a = 0, \end{cases} \quad a = 1, 2,$$

因此就需要解零点方程:

$$\phi^1(x^1, x^2, x^3) = 0, \quad \phi^2(x^1, x^2, x^3) = 0. \quad (92)$$

在正规条件下, 式(92)的解是 N 条一维拓扑线缺陷,

$$x^\mu = x_k^\mu(s), \quad k = 1, 2, \dots, N, \quad (93)$$

其中, s 是弦参数. 记第 k 条曲线为 l_k , 则 $\delta^2(\phi)$ 就可展开到这 N 条线上去,

$$\delta^2(\phi) D^\mu \left(\frac{\phi}{x} \right) = \sum_{k=1}^N W_k \int_{l_k} dx^\mu \delta^3 [\mathbf{x} - \mathbf{x}_k(s)], \quad (94)$$

$W_k = \beta_k \eta_k$ 为 l_k 的拓扑荷.

式(94)代入式(91), 并进一步代入式(89), 就得到

$$\begin{aligned} I &= \int_{\mathcal{M}^3} A_\mu(\mathbf{x}) \left(\sum_{k=1}^N W_k \int_{l_k} dx^\mu \delta^3 [\mathbf{x} - \mathbf{x}_k(s)] \right) d^3x \\ &= \sum_{k=1}^N W_k \int_{l_k} dx^\mu \left(\int_{\mathcal{M}^3} A_\mu(\mathbf{x}) \delta^3 [\mathbf{x} - \mathbf{x}_k(s)] d^3x \right), \end{aligned} \quad (95)$$

其中最后一步交换了三重积分和一重积分的顺序. 积掉三重积分, 其结果落在了奇异弦上, 即

$$I = \sum_{k=1}^N W_k \int_{l_k} A_\mu(\mathbf{x}_k) dx^\mu = \sum_{k=1}^N W_k \int_{l_k} A,$$

其中1-形式:

$$A = A_\mu dx^\mu. \quad (96)$$

此中 l_k 可以是任意曲线. 如果我们要讨论曲线之间的缠绕情况, 就需要讨论闭曲线, 或等价的两端固定于无穷边界的辫子情况. 于是记曲线为闭曲线 γ_k , 这样上述积分成为

$$I = \sum_{k=1}^N W_k \int_{\gamma_k} A_\mu dx^\mu = \sum_{k=1}^N W_k \int_{\gamma_k} A. \quad (97)$$

这样一来, 原来的Chern-Simons 3-形式积分, 就转化成一维纽结族上的线积分. 由此可以推导出众多纽结拓扑不变量, 如(自)缠绕数、Jones多项式、HOMFLYPT多项式, 以及基于多项式代数空间的重要结论和规律. 参考文献[13-17].

3.1.3 示例三: $SU(2)$ 规范场的第二陈类及相应的拓扑缺陷

前文式(63)和(62)得到了 $SU(2)$ 规范势的旋量分解. 将此结果代入第二陈类定义式(12), 有表达式:

$$C_2 = -\frac{1}{4\pi^2} d\Phi^\dagger \wedge d\Phi \wedge d\Phi^\dagger \wedge d\Phi = \rho(x) d^4x, \quad (98)$$

其中 $\rho(x)$ 是陈密度,

$$\rho(x) = -\frac{1}{4\pi^2} \epsilon^{\mu\nu\lambda\rho} \partial_\mu \Phi^\dagger \partial_\nu \Phi \partial_\lambda \Phi^\dagger \partial_\rho \Phi. \quad (99)$$

3) 开曲线总可以经过拓扑同胚变换去除纠缠, 因此若要保持纠缠状态就需要研究闭曲线. 进一步地, 两端固定在无穷边界上的情况也可等同于封闭于无穷远处的闭曲线来研究.

注意到Pauli旋量

$$\Phi = \begin{pmatrix} \psi^1 \\ \psi^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \phi^0 + i\phi^1 \\ \phi^2 + i\phi^3 \end{pmatrix}, \quad (100)$$

$\psi^1, \psi^2 \in \mathbb{C}; \phi^0, \phi^1, \phi^2, \phi^3 \in \mathbb{R}$.

ψ^1, ψ^2 各自的实部和虚部分别是 ϕ^0, ϕ^1 和 ϕ^2, ϕ^3 . 引入4-维单位矢量

$$n^a = \frac{\phi^a}{\|\phi\|}, \quad a = 0, 1, 2, 3. \quad (101)$$

将式(100)和(101)代入式(63)和(62), 立刻得到

$$\rho(x) = \frac{1}{12\pi^2} \epsilon^{\mu\nu\lambda\rho} \epsilon_{abcd} \partial_\mu n^a \partial_\nu n^b \partial_\lambda n^c \partial_\rho n^d. \quad (102)$$

引入4-维拓扑流为

$$j(x) = \rho(x) = \frac{1}{12\pi^2} \epsilon^{\mu\nu\lambda\rho} \epsilon_{abcd} \partial_\mu n^a \partial_\nu n^b \partial_\lambda n^c \partial_\rho n^d, \quad (103)$$

利用 ϕ -空间的格林公式:

$$\frac{\partial^2}{\partial \phi^a \partial \phi^b} \left(\frac{1}{\|\phi\|} \right) = -4\pi^2 \delta^4(\phi) \quad (104)$$

可以证明

$$j(x) = \delta^4(\phi) D\left(\frac{\phi}{x}\right), \quad (105)$$

其中 $D\left(\frac{\phi}{x}\right)$ 是 Jacobian 行列式

$$\epsilon^{abcd} D\left(\frac{\phi}{x}\right) = \epsilon^{\mu\nu\lambda\rho} \partial_\mu \phi^a \partial_\nu \phi^b \partial_\lambda \phi^c \partial_\rho \phi^d. \quad (106)$$

与前文相似, δ -函数只在 ϕ 场不为零处非零, 其他地方全平庸,

$$\delta^4(\phi) = \begin{cases} 0, & \text{当且仅当 } \phi^a \neq 0, \\ \infty, & \text{当且仅当 } \phi^a = 0, \end{cases} \quad a = 0, 1, 2, 3,$$

同样需要在四维底流形 \mathcal{M}^4 上求解零点方程:

$$\phi^a(x^1, x^2, x^3, x^4) = 0, \quad a = 0, 1, 2, 3. \quad (107)$$

在正规条件下, 其解为 N 个孤立的四维点缺陷, 对应于瞬子(Instantons). 于是 $\delta^4(\phi)$ 可展开到这些点缺陷上

$$\delta^4(\phi) = \sum_{k=1}^N W_k \delta^4(x^\mu - x_k^\mu),$$

拓扑荷

$$W_k = \beta_k \eta_k. \quad (108)$$

于是第二陈数就可计算为

$$\begin{aligned} c_2 &= \int_{\mathcal{M}^4} C_2 = \int_{\mathcal{M}^4} j(x) d^4 x \\ &= \int_{\mathcal{M}^4} \left[\sum_{k=1}^N W_k \delta^4(x^\mu - x_k^\mu) D\left(\frac{\phi}{x}\right) \right] d^4 x \\ &= \sum_{k=1}^N W_k. \end{aligned} \quad (109)$$

这就是说, 拓扑数第二陈数 c_2 就等于各瞬子拓扑荷 W_k 的代数和.

3.2 拓扑流的一般理论

从前文示例看出, 形如式(78), (90), (103)的拓扑流其数学结构往往能够导出一个 δ -函数, 预示着拓扑缺陷的存在. 鉴于此, 有必要给出拓扑流的一般定义和讨论 [18–20].

3.2.1 拓扑张量流和拓扑流的定义

令 \mathcal{M} 为 D -维光滑定向流形, 度规为 $g_{\mu\nu}$, 坐标为 x^μ , $\mu = 1, \dots, D$. 在 \mathcal{M} 上建立一个矢量丛 E , 其纤维是一个 d -维欧式空间 \mathbb{R}^d , $d \leq D$. 在丛 E 中考虑一个截面, 即一个 d -维光滑矢量场 $\phi^a(x)$, 它是从 \mathcal{M} 到 \mathbb{R}^d 的单值映射:

$$\begin{aligned} \phi^a : \mathcal{M} &\rightarrow \mathbb{R}^d \\ x &\mapsto \phi^a(x) \end{aligned} \quad a = 1, \dots, d. \quad (110)$$

ϕ^a 模掉自身长度诱导出一个单位矢量

$$n^a(x) = \frac{\phi^a(x)}{\|\phi(x)\|},$$

其中

$$\|\phi\| = \sqrt{\phi^a \phi^a},$$

以及满足

$$n^a n^a = 1. \quad (111)$$

$\phi^a(x)$ 的零点是 $n^a(x)$ 的奇点. 可以看出, 条件 $n^a n^a = 1$ 诱导出一个群空间中的 $(d - 1)$ -维单位球 S^{d-1} ; 而单位矢量 $n^a(x)$ 则成为 \mathcal{M} 上的一个球丛的截面.

定义 $D - d$ 维拓扑张量流为

$$\begin{aligned} j^{\mu_1 \cdots \mu_{D-d}}(x) &= \frac{1}{\sqrt{g} A(S^{d-1}) d!} \epsilon^{\mu_1 \cdots \mu_{D-d} \mu_{D-d+1} \cdots \mu_D} \\ &\times \epsilon_{a_1 \cdots a_d} \partial_{\mu_{D-d+1}} n^{a_1} \cdots \partial_{\mu_D} n^{a_d}, \end{aligned} \quad (112)$$

其中, $A(S^{d-1})$ 是 S^{d-1} 的球面积,

$$A(S^{d-1}) = \frac{2\pi^{\frac{d}{2}}}{\Gamma(\frac{d}{2})}, \quad \Gamma(x) \text{为}\Gamma\text{-函数.} \quad (113)$$

容易看出, 当 $d < D$ 时, 此拓扑张量流是守恒流

$$\partial_{\mu_l} j^{\mu_1 \cdots \mu_{D-d}} = 0, \quad l = 1, \dots, D - d. \quad (114)$$

注: 拓扑张量流的直观几何意义——超球面的面元:

对拓扑张量流式(112)的积分记为

$$\begin{aligned} W &= \int_{\Omega} j^{\mu_1 \cdots \mu_{D-d}}(x) d^d x \\ &= \int_{\Omega} \frac{1}{\sqrt{g} A(S^{d-1}) d!} \epsilon^{\mu_1 \cdots \mu_{D-d} \mu_{D-d+1} \cdots \mu_D} \\ &\quad \times \epsilon_{a_1 \cdots a_d} \partial_{\mu_{D-d+1}} n^{a_1} \cdots \partial_{\mu_D} n^{a_d} d^d x \\ &= \frac{1}{A(S^{d-1}) d!} \int_{\Omega} \frac{1}{\sqrt{g}} \epsilon_{a_1 \cdots a_d} \partial_{\nu_{D-d+1}} n^{a_1} \cdots \partial_{\nu_D} n^{a_d} \\ &\quad \times (\sqrt{g} dx^{\nu_{D-d+1}} \wedge \cdots \wedge dx^{\nu_D}) \\ &= \frac{1}{A(S^{d-1}) d!} \int_{\Omega} \epsilon_{a_1 \cdots a_d} dn^{a_1} \wedge dn^{a_2} \wedge \cdots \wedge dn^{a_d}, \end{aligned} \quad (115)$$

其中 Ω 是 \mathcal{M} 中的 d -维子流形. 利用Stokes定理, 上述 Ω 上的体积分可以化到它的表面 $\partial\Omega$ 上去:

$$W = \frac{1}{A(S^{d-1})(d-1)!} \int_{\partial\Omega} \epsilon_{a_1 \cdots a_d} n^{a_1} \wedge dn^{a_2} \wedge \cdots \wedge dn^{a_d}. \quad (116)$$

可以看出, 被积函数恰是一个超球面的高斯面元.

一个简单但重要的情形是 $D - d = 1$, 也即拓扑矢量流的情形(有时也简称为拓扑流):

$$j^\mu(x) = \frac{1}{\sqrt{g} A(S^{d-1}) d!} \epsilon^{\mu \mu_1 \cdots \mu_d} \epsilon_{a_1 \cdots a_d} \partial_{\mu_1} n^{a_1} \cdots \partial_{\mu_d} n^{a_d}. \quad (117)$$

这种情形有广泛的应用. 此时守恒关系(114)简化为 $\partial_\mu j^\mu = 0$.

当 $d = D$ 也即 $D - d = 0$ 时, 也称拓扑标量流.

3.2.2 拓扑张量流中蕴含的 δ -函数

可以证明

$$\begin{aligned} j^{\mu_1 \cdots \mu_{D-d}}(x) &= C_d \epsilon^{\mu_1 \cdots \mu_{D-d+1} \cdots \mu_D} \epsilon_{a_1 \cdots a_d} \partial_{\mu_{D-d+1}} \\ &\quad \times \phi^{a_1} \cdots \partial_{\mu_D} \phi^{a_d} \Delta_\phi G_d(\|\phi\|), \end{aligned} \quad (118)$$

其中 C_d 是一个常数

$$C_d = \begin{cases} -\frac{1}{A(S^{d-1}) d! (d-2)}, & \text{当 } d > 2, \\ \frac{1}{4\pi}, & \text{当 } d = 2. \end{cases} \quad (119)$$

Δ_ϕ 是 ϕ 空间的拉普拉斯算子:

$$\Delta_\phi = \frac{\partial}{\partial \phi^a} \frac{\partial}{\partial \phi^a}, \quad a = 1, \dots, d. \quad (120)$$

$G_d(\|\phi\|)$ 是广义格林函数:

$$G_d(\|\phi\|) = \begin{cases} \frac{1}{\|\phi\|^{d-2}}, & \text{当 } d > 2, \\ \ln(\|\phi\|), & \text{当 } d = 2. \end{cases} \quad (121)$$

使用两个公式:

- ($D - d$)-维Jacobian行列式

$$\begin{aligned} D^{\mu_1 \cdots \mu_{D-d}} \left(\frac{\phi}{x} \right) &= \frac{1}{d!} \epsilon_{a_1 \cdots a_d} \epsilon^{\mu_1 \cdots \mu_{D-d} \mu_{D-d+1} \cdots \mu_D} \\ &\times \partial_{\mu_{D-d+1}} \phi^{a_1} \cdots \partial_{\mu_D} \phi^{a_d}. \end{aligned} \quad (122)$$

其特例是 $d = D$, 此时有

$$D \left(\frac{\phi}{x} \right) = \frac{1}{d!} \epsilon_{a_1 \cdots a_d} \epsilon^{\mu_1 \cdots \mu_d} \partial_{\mu_1} \phi^{a_1} \cdots \partial_{\mu_d} \phi^{a_d}. \quad (123)$$

- ϕ 空间的点状Poisson方程

$$\Delta_\phi(G_d(\|\phi\|)) = \begin{cases} -\frac{4\pi^{\frac{d}{2}}}{\Gamma(\frac{d}{2} - 1)} \delta^d(\phi), & \text{当 } d > 2, \\ 2\pi\delta^2(\phi), & \text{当 } d = 2, \end{cases} \quad (124)$$

可证明拓扑量流 $j^{\mu_1 \dots \mu_{D-d}}$ 可写为如下 δ -函数形式:

$$j^{\mu_1 \dots \mu_{D-d}}(x) = \frac{1}{\sqrt{g}} \delta^d(\phi) D^{\mu_1 \dots \mu_{D-d}} \left(\frac{\phi}{x} \right). \quad (125)$$

特别地, 当 $d = D$ 时, 拓扑量流有

$$j(x) = \frac{1}{\sqrt{g}} \delta^d(\phi) D \left(\frac{\phi}{x} \right). \quad (126)$$

式(125)是一个重要结论, 它表明拓扑量流只在 $\phi(x)$ 场的零点也即 $\mathbf{n}(x)$ 场的奇点处非平庸:

$$j^{\mu_1 \dots \mu_{D-d}} \begin{cases} = 0, & \text{当且仅当 } \phi \neq 0, \\ \neq 0, & \text{当且仅当 } \phi = 0, \end{cases} \quad d \leq D. \quad (127)$$

这就要求解 ϕ 场的零点方程

$$\phi^a(x) = 0, \quad a = 1, 2, \dots, d. \quad (128)$$

隐函数定理指出, 在如下的正规条件之下

$$D^{\mu_1 \dots \mu_{D-d}} \left(\frac{\phi}{x} \right) \neq 0, \quad (129)$$

当 $d < D$:

$$D \left(\frac{\phi}{x} \right) \neq 0,$$

当 $d = D$, 式(128)有一族 N 个孤立的连续函数解, 记为 z_k , $k = 1, \dots, N$, 其坐标是

- 当 $d < D$ 时,

$$x^\mu = z_k^\mu(u^1, \dots, u^{D-d}), \quad (130)$$

$$\mu = 1, \dots, D; \quad k = 1, \dots, N.$$

这里每个 z_k 是 \mathcal{M} 中的一个孤立的 $(D-d)$ -维解子流形, 记为 X_k . X_k 的内禀坐标为 (u^1, \dots, u^{D-d}) ; X_k 的度规为 g_{uIJ} , $I, J = 1, \dots, D-d$, 行列式为 $g_u = \det(g_{uIJ})$.

- 当 $d = D$ 时,

$$x^\mu = z_k^\mu, \quad \mu = 1, \dots, d; \quad k = 1, \dots, N, \quad (131)$$

这是 N 个孤立奇点解.

需要指出的是, 若正规条件不能满足, 奇异子流形将出现分叉现象(Bifurcation)^[21-23].

3.2.3 δ -函数展开到奇异子流形上

拓扑量流 $j^{\mu_1 \dots \mu_{D-d}}$ 可被展开到 N 个奇异子流形上.

- 当 $d < D$, 可证明 \mathcal{M} 中存在一个 d -维子流形 Ξ 横截于每个 X_k :

$$g_{\mu\nu} \frac{\partial x^\mu}{\partial u^I} \frac{\partial x^\nu}{\partial v^K} \Big|_{p_k} = 0, \quad I = 1, \dots, D-d; \quad K = 1, \dots, d, \quad (132)$$

其中, Ξ 的内禀坐标记为 v^K ; 容易看出 Ξ 正是前文式(115)中的 Ω . 这里 p_k , $k = 1, \dots, N$, 表征 Ξ 上的第 k 个截点; p_k 可用 Ξ 的内禀坐标表达为 v^K .

- 当 $d = D$, 由式(131)给出的零点恰是截点 p_k , $k = 1, \dots, N$. 此时无需再有内禀坐标 u^I .

于是可证明, 拓扑量流式(125)可展开到奇异子流形上:

$$j^{\mu_1 \dots \mu_{D-d}}(x) = \frac{1}{\sqrt{g}} \sum_{k=1}^N W_k \delta^d(x - z_k) \frac{D^{\mu_1 \dots \mu_{D-d}} \left(\frac{\phi}{x} \right)}{D_{(D-d)}^{\text{zero}} \left(\frac{\phi}{x} \right)} \Big|_{z_k}, \quad (133)$$

其中,

$$D_{(D-d)}^{\text{zero}} \left(\frac{\phi}{x} \right) = \epsilon_{a_1 \dots a_d} \partial_{D-d+1} \phi^{a_1} \dots \partial_D \phi^{a_d}. \quad (134)$$

而拓扑荷

$$W_k = \beta_k \eta_k, \quad k \text{ 不求和.} \quad (135)$$

这里 β_k 和 η_k 分别是 Hopf 指标和高斯映射的 Brouwer 映射度.

为理解式(133)的意义, 让我们考虑简单些的情形, $d = D-1$, 也即拓扑矢量流 j^μ . 此时底流形坐标是 x^1, \dots, x^d, x^{d+1} . 为方便起见, 令 $x^0 \equiv x^{d+1}$, 并重新安排坐标排序为 x^0, x^1, \dots, x^d . 注意到式(128)中共有零点方程 d 个, 故自由参数 1 个, 解式(130)成为

$$x^\mu = z_k^\mu(u), \quad \mu = 0, 1, \dots, d; \quad k = 1, \dots, N;$$

u 为内禀参数.

特别地, 如果 $u = x^0$, 则有

$$x^\mu = z_k^\mu(x^0), \quad \mu = 0, 1, \dots, d; \quad k = 1, \dots, N, \quad (136)$$

当中第 $\mu = 0$ 分量是 $x^0 = x^0$.

于是式(133)定义的拓扑流 j^μ 就成为

$$j^\mu(x) = \frac{1}{\sqrt{g}} \sum_{k=1}^N \beta_k \eta_k \delta^d [x - z_k(x^0)] \left. \frac{D^\mu \left(\frac{\phi}{x} \right)}{D^0 \left(\frac{\phi}{x} \right)} \right|_{z_k}, \quad (137)$$

其中,

$$D^0 \left(\frac{\phi}{x} \right) = \epsilon_{a_1 \dots a_d} \partial_1 \phi^{a_1} \dots \partial_d \phi^{a_d} = \frac{\partial(\phi^{a_1}, \dots, \phi^{a_d})}{\partial(x^1, \dots, x^d)}. \quad (138)$$

利用解线性方程组的Cramer法则思想, 可以证明

$$\left. \frac{dx^\mu}{dx^0} \right|_{z_k(x^0)} = \left. \frac{D^\mu(\phi/x)}{D^0(\phi/x)} \right|_{z_k(x^0)}. \quad (139)$$

那么, 定义速度

$$V_k^\mu(x) = \left. \frac{dz_k^\mu}{dx^0} \right|_{z_k(x^0)} = \left. \frac{dx^\mu}{dx^0} \right|_{z_k(x^0)}, \quad (140)$$

式(137)就成为

$$j^\mu = \frac{1}{\sqrt{g}} \sum_{k=1}^N \beta_k \eta_k \delta [x - z_k(x^0)] V_k^\mu. \quad (141)$$

特别地, 当中的第0分量 j^0 , 由前文式(137)定义, 可计算为

$$j^0 = \sum_{k=1}^N \rho_k,$$

其中

$$\rho_k = \frac{1}{\sqrt{g}} \beta_k \eta_k \delta [x - z_k(x^0)]. \quad (142)$$

于是式(141)和(142)就给出了拓扑流 j^μ 的简洁形式:

$$j^\mu = \sum_{k=1}^N \rho_k V_k^\mu. \quad (143)$$

式(143)有清晰的物理意义. 比如, 如果 x^0 对应时间坐标 t , 而 (x^1, \dots, x^d) 为空间坐标, 则式(136)恰描述世界线, 也即 N 个经典点粒子在 $(d+1)$ -维时空中的运动轨迹. V_k^μ 和 ρ_k 分别是第 k 粒子的速度场和拓扑荷密度. 式(143)的形式与经典电动力学和流体力学中的流密度形式完全相同.

另外一个直接结果是, 对 j^μ 的0分量 ρ_k 积分定义

总拓扑荷:

$$Q = \sum_{k=1}^N \int_{\Omega} \rho_k \sqrt{g} d^d x = \sum_{k=1}^N \beta_k \eta_k = \sum_{k=1}^N W_k = W. \quad (144)$$

数学上, Q 等同于包裹 $\partial\Omega$ 的总的广义环绕数(Generalized Winding Number).

4 二维拓扑绝缘体

4.1 引言

4.1.1 简史: 从量子霍尔效应(QHE)到量子自旋霍尔效应(QSHE)

寻找新的物质态/相是物理学研究中的重要问题. 能带论(费米液体理论)和朗道对称性自发破缺理论是多体系统现象学的两个主题, 物质相变的原因认为是粒子内部和热运动相互作用的结果. 系统自发从高对称状态变为低对称性状态, 其中物理量的变化由序参数描述. 例如磁化率描述了当温度降低到临界温度时顺磁体向铁磁体的转化. 基于周期晶格布洛赫定理的固体能带结构厘清了金属、绝缘体以及半导体的区别, 在于导带和禁带之间的能隙大小.

能带论和Landau-Ginzburg理论可以很好地描述很多物质; 但直到1980年Klitzing等人^[24]发现量子霍尔系统, 人们才意识到描述相变时仅有对称性破缺理论是不够的. 整数和分数量子霍尔效应为凝聚态物理打开了一扇新窗口: 为研究一大类量子现象需要引入拓扑序, 后者是由拓扑而不是对称性所描述的一种新物质相^[25].

经典霍尔效应是指: 1879年Hall^[26]观察到, 在外部电场和磁场作用下带电粒子在固体中做平面运动会产生一个所谓的霍尔电压. 整数量子霍尔效应(IQHE)是基于对霍尔效应的量子力学描述: 对强磁场下半导体异质结中的二维电子气体, 它计算出在 $v \in \mathbb{Z}$ 处霍尔电导会出现量子平台 $v \frac{e^2}{h}$. 这类新材料有一个特点, 其内部是绝缘的, 而表面或边缘呈金属性. 该金属行为不受杂质或相互作用的影响, 且受到电子能带结构固有对称性的保护. 经典与量子霍尔效应关系如图2所示.

对整数量子霍尔效应, Thouless等人^[27]作出了理论解释, 得到计算霍尔电导 σ_{xy} 的TKNN公式:

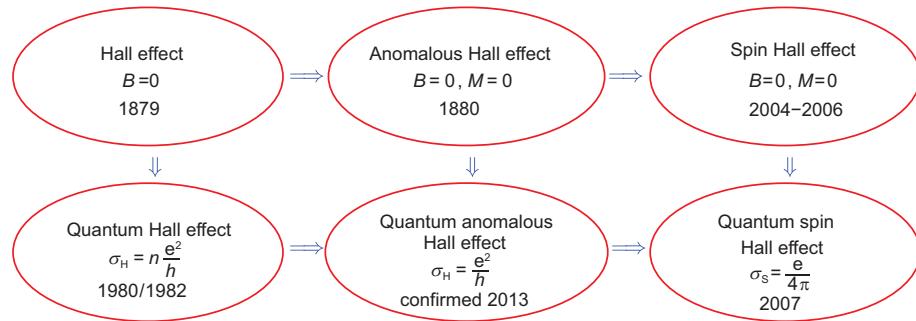


图 2 (网络版彩图)从普通霍尔效应到量子霍尔效应, 再到(二维拓扑绝缘体的)自旋霍尔效应. B 是磁感应强度, M 是铁磁体的磁化率. σ_H 是霍尔电导, σ_S 是自旋霍尔电导

Figure 2 (Color online) Evolution from the ordinary Hall effect to the quantum Hall effect, and to quantum spin Hall effect or two-dimensional topological insulator. Here, B stands for a magnetic field, and M stands for magnetization in a ferromagnet. σ_H is the Hall conductance, and σ_S the spin Hall conductance.

$$\begin{aligned} \sigma_{xy} &= i\hbar \sum_{E_\alpha < E_F < E_\beta} \int_{T^2} \frac{d^2\mathbf{k}}{(2\pi)^2} \frac{\langle u_\mathbf{k}^\alpha | J_y | u_\mathbf{k}^\beta \rangle \langle u_\mathbf{k}^\beta | J_x | u_\mathbf{k}^\alpha \rangle - \langle u_\mathbf{k}^\alpha | J_x | u_\mathbf{k}^\beta \rangle \langle u_\mathbf{k}^\beta | J_y | u_\mathbf{k}^\alpha \rangle}{(E_\beta(\mathbf{k}) - E_\alpha(\mathbf{k}))^2} \\ &= \frac{ie^2}{\hbar} \sum_\alpha \int_{T^2} \frac{d^2\mathbf{k}}{(2\pi)^2} [\langle \partial_{k_y} u_\mathbf{k}^\alpha | \partial_{k_x} u_\mathbf{k}^\alpha \rangle - \langle \partial_{k_x} u_\mathbf{k}^\alpha | \partial_{k_y} u_\mathbf{k}^\alpha \rangle] = -\frac{e^2}{2\pi\hbar} \sum_\alpha W_\alpha = \frac{e^2}{h} c_1. \end{aligned}$$

上式指出, 如果以 e^2/\hbar 为单位, σ_{xy} 正比于第一陈数 c_1 (即前文式(77)给出的拓扑不变量). 陈数对应于电子波函数的 Berry phase 在布里渊区的缠绕数, 其整数取值与材料的能带结构具体细节无关. 同理, 一个闭合平面线圈环绕一个点的次数是与环路形状无关的整数. 1988 年, Haldane [28] 提出 IQHE 可以在周期性磁通的无自旋费米晶格系统中实现. 尽管总磁通为零, 但电子在局部磁通驱动下可形成导电的边缘通道.

近十几年来由于 Kane 等人 [29, 30]、Qi 等人 [31–33] 的贡献, 上述 IQHE 的拓扑场论进一步过渡到量子自旋霍尔效应理论 (QSHE, 图 2), 并发展成为拓扑绝缘体理论. 其中 Kane 等人 [29, 30] 建立了拓扑能带理论, 而 Qi 等人 [31–33] 则建立了形式不同但实质等价的拓扑场论. 近几年来拓扑绝缘体理论更由薛其坤研究小组 [34] 在实验上得到了验证.

4.1.2 能带理论

2005 年 Kane 和 Mele [29] 将 Haldane 模型推广到自

旋 $-\frac{1}{2}$ 的电子晶格模型. Haldane 模型的周期性磁通由电子在原子中的强自旋轨道耦合的相对论效应所代替, 从而导致 QSHE 以及 Z_2 不变量. 在最简单模型中, 自旋的垂直分量 S_z 守恒, QSHE 退化成由两组互不耦合、自旋分别向上向下、陈数为 ± 1 的量子霍尔态. 这样就有自旋相反、运动相反的两组边界态, 如图 3 所示. 在 QSHE 中时间反演对称性守恒, 因为两个边界通道中的电子反向散射出于对称性原因而被禁止, 从而边界态不受杂质或紊乱影响. 由量子力学知, 时间反演不变的哈密顿量, 其每个单粒子能级都有与时间反演相对应的态简并, 这称为 Kramers 简并. 于是 QSHE 绝缘体的两组边界态在动量 \mathbf{k} 和 $-\mathbf{k}$ 处构成一组 Kramers 对. 它们在 $\mathbf{k} = 0, \pi$ 处有且只有两组拓扑不等价的连接方式, 且因时间反演对称性而不能相互转变. 存在两类边界态这一事实暗含着存在两种二维时间反演不变绝缘体, 这是 Z_2 不变性的物理起源. 2007 年 Fu 等人 [35, 36] 将二维 QSHE 推广到三维情况, 提出用 Z_2 指标来区别时间反演不变中的强、弱拓扑绝缘体. 对于强拓扑绝缘体, 存在穿过系统费米面的奇数个表面态, 如图 4 所示.

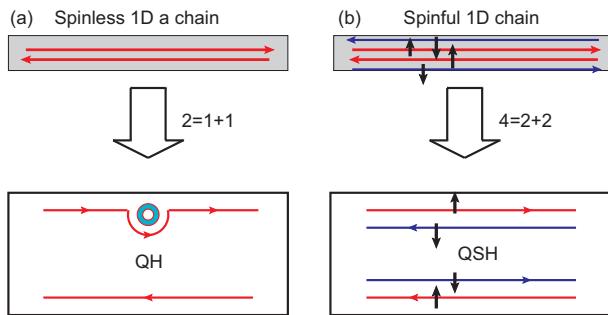


图3 (网络版彩图) (a) 一维无自旋系统同时具有前进和后退边界态。这两个基本自由度在量子霍尔效应下是空间分离的, 如符号“ $2 = 1 + 1$ ”所示。上边只包含一个前进的边界态, 下边只有一个向后的边界态。此二者很稳定, 会绕过杂质而不发生散射; (b) 一维自旋系统有4个基本通道, 它们在空间上相互分离: 上边包含一个自旋向上的向前边界态, 和一个自旋向下的向后边界态; 下边亦然。此分离可用符号“ $4 = 2 + 2$ ”表示

Figure 3 (Color online) (a) A spinless 1D system has both a forward-and backward-moving state. These two basic degrees of freedom are spatially separated with the presence of the quantum Hall effect, as denoted by the symbol “ $2 = 1 + 1$ ”. The upper edge contains only one forward-mover and the lower supports only one backward-mover. The states are robust and go around an impurity without scattering. (b) A spin 1D system has four basic degrees of freedom, which are spatially separated. The upper edge supports a forward mover with spin-up, and a backward mover with spin-down and conversely for the lower edge. That spatial separation is expressed by the symbol “ $4 = 2 + 2$ ”.

Kane和Fu预言 $Bi_{1-x}Sb_x$ 是三维的拓扑绝缘体, 之后为实验所证实。

4.1.3 拓扑场论

尽管拓扑绝缘体可在无相互作用的电子模型中实现, 拓扑不变性也可以在无相互作用的能带理论中良好定义, 但是对于有相互作用的系统, 确定拓扑绝缘体是否具有良好定义仍然非常重要。为此, 拓扑绝缘体(和其他拓扑状态)的拓扑场论方法成为必需, 用于突显其拓扑性质而非单电子性质和能带结构。在凝聚态物理中可以采用有效场论的思路: 积分掉高能自由度、保留低能自由度。对于许多拓扑相, 如此得到的低能有效场论含有拓扑项, 从而得到一个拓扑量子场论。例如, 对整数量子霍尔体系可用下面的Chern-Simons拓扑场论来描述:

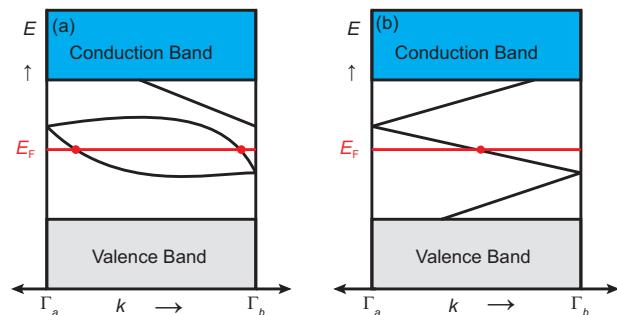


图4 (网络版彩图) 电子色散关系在Kramers简并点 $\Gamma_a = 0$ 和 $\Gamma_b = \pi$ 处。 (a) 边界态穿过费米面偶数次; (b) 是奇数次。奇数个交叉点导致拓扑保护的金属边界状态

Figure 4 (Color online) The dispersion relation of electrons at the Kramers degenerating points, $\Gamma_a = 0$ and $\Gamma_b = \pi$. (a) The edge states cross the Fermi-surface even times; (b) odd times. The odd crossing points lead to edge metal states protected by topology.

$$S_{\text{eff}} = \frac{C_1}{4\pi} \int d^3x \epsilon^{\mu\nu\tau} A^\mu \partial_\nu A^\tau, \quad (145)$$

其中第三分量

$$dx^3 \equiv dt.$$

该理论对自由电子系统和含电子-电子相互作用的系统都成立, 描述低能或长波下的电磁响应。而对三维拓扑绝缘体, Qi等人^[31]通过Chern-Simons作用量将二维时间反演破坏的拓扑绝缘体推广到四维的量子霍尔系统。其作用量由两部分构成: 第一部分是Maxwell项:

$$S_1 = \frac{1}{2e^2} \int d^4x (\mathbf{E}^2 + \mathbf{B}^2) = \frac{1}{4e^2} \int d^4x F^{\mu\nu} F_{\mu\nu}, \quad (146)$$

场张量:

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu;$$

第二部分是磁电项(Magneto-Electric Term),

$$S_2 = \frac{i\theta}{4\pi^2} \int d^4x \mathbf{E} \cdot \mathbf{B} = \frac{i\theta}{32\pi^2} \int d^4x \epsilon^{\mu\nu\sigma\tau} F_{\mu\nu} F_{\sigma\tau}. \quad (147)$$

S_2 是拓扑项。对周期系统, 替换 $\theta \rightarrow \theta + 2\pi$ 不会影响物理。时间反演变换需要将 θ 变成 $-\theta$, 所以只允许两个 θ 取值: 0, π 。因此时间反演不变的拓扑绝缘体被分为两类, 符合 Z_2 对称性。

Bernevig等人^[33,37]还将二维拓扑绝缘体推广到四维, 相应的作用量推广到高维Chern-Simons场论:

$$S_{\text{eff}} = \frac{C_2}{4\pi^2} \int d^4x dt \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma\tau} A_\mu \partial_\nu A_\rho \partial_\sigma A_\tau. \quad (148)$$

利用维度约化(Dimensional Reduction), 从中可得到三维和二维的时间反演不变的拓扑绝缘体. 同时预言在三维拓扑绝缘体上存在着拓扑磁电效应(Topological Magneto-Electric Effect, TME)和像磁单极效应(Image Magnetic Monopole Effect).

4.2 规范势分解及拓扑流理论的应用: 两个不同类型第一陈类的起源

以下我们将把前文的规范势分解和拓扑流理论应用到二维拓扑绝缘体的研究中.

考虑由平移不变的紧束缚模型所描述的二维时间反演拓扑绝缘体, 即不通过朗道能级实现量子霍尔效应的Haldane模型^[31,38]:

$$H = \sum_{m,n;\alpha,\beta} \psi_m^{\alpha*} h_{mn}^{\alpha\beta} \psi_n^\beta, \quad \alpha, \beta = 1, 2, \quad (149)$$

其中, $h_{mn}^{\alpha\beta}$ 是单粒子哈密顿量, ψ_m 是布洛赫波函数. 两带模型(Two-Band Model)中哈密顿量具有 $SU(2)$ 对称性, 在动量空间可表为

$$H = \sum_{\mathbf{k};\alpha,\beta} \psi_{\mathbf{k}}^{\alpha*} h_{\mathbf{k}}^{\alpha\beta} \psi_{\mathbf{k}}^\beta = \sum_{\mathbf{k}} \Psi_{\mathbf{k}}^\dagger h_{\mathbf{k}} \Psi_{\mathbf{k}}. \quad (150)$$

这里 $\Psi_{\mathbf{k}}$ 是外尔旋量(Weyl Spinor; 或泡利旋量, Pauli Spinor),

$$\Psi_{\mathbf{k}} = \begin{pmatrix} \psi_{\mathbf{k}}^1 \\ \psi_{\mathbf{k}}^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \phi_{\mathbf{k}}^1 + i\phi_{\mathbf{k}}^2 \\ \phi_{\mathbf{k}}^3 + i\phi_{\mathbf{k}}^4 \end{pmatrix}, \quad (151)$$

其中,

$$\psi_{\mathbf{k}}^1, \psi_{\mathbf{k}}^2 \in \mathbb{C}; \quad \phi_{\mathbf{k}}^1, \dots, \phi_{\mathbf{k}}^4 \in \mathbb{R}.$$

$\psi_{\mathbf{k}}^\alpha$ 及其共轭亦可记为 $\psi_{\mathbf{k}}^\alpha = |\alpha, \mathbf{k}\rangle$ 和 $\psi_{\mathbf{k}}^{\alpha*} = \langle \alpha, \mathbf{k}|$. $h_{\mathbf{k}}$ 是布里渊区波矢量 \mathbf{k} 的 2×2 厄米矩阵, 可以用Clifford代数基矢量 $\{\mathbf{1}, \sigma^a\}$, $a = 1, 2, 3$, 展开为

$$h_{\mathbf{k}} = h_{\mathbf{k},0} \mathbf{1} + \mathbf{h}_{\mathbf{k}} \cdot \boldsymbol{\sigma} = h_{\mathbf{k},0} \mathbf{1} + \sum_{a=1}^3 h_{\mathbf{k},a} \sigma^a, \quad (152)$$

其中, $\mathbf{1}$ 是 2×2 单位矩阵, σ^a 是泡利矩阵. $\mathbf{h}_{\mathbf{k}} = (h_{\mathbf{k},1}, h_{\mathbf{k},2}, h_{\mathbf{k},3})$ 表示 $h_{\mathbf{k}}$ 的空间部分. 将 h_0 写为 $h_0(\mathbf{k}) \equiv \epsilon(\mathbf{k})$, 能谱为 $E_{\pm,\mathbf{k}} = \epsilon_{\mathbf{k}} \pm \|\mathbf{h}_{\mathbf{k}}\|$, 其中 $\|\mathbf{h}_{\mathbf{k}}\| = \sqrt{\sum_a h_{\mathbf{k},a}^2}$. 下面为简便起见, 在不引起混淆的情况下将省略下标 \mathbf{k} .

本问题中的布里渊区是圆环面 T^2 , 其拓扑结构是 $T^2 = S^1 \times S^1$. 引入单位矢量 $\hat{h}_a = \frac{h_a}{\|\mathbf{h}\|}$, 它将给出映射关系

$$\hat{h}_a : T^2 \rightarrow S^2, \quad (153)$$

如图 5所示.

由哈密顿量式(150)有欧拉-拉格朗日方程:

$$h\Psi = E\Psi, \quad (154)$$

布洛赫波函数 Ψ 是方程的解, 它在底流形 T^2 上有一个分布. 为了探究 Ψ 分布所产生的拓扑缺陷, 引入一个 $SU(2)$ 协变导数:

$$D_i^{\text{ind}} \Psi = \partial_i \Psi + g A_i^{\text{ind}} \Psi = 0, \quad (155)$$

其中, $\partial_i = \frac{\partial}{\partial k_i}$, $i = x, y$, 而 g 是物理耦合常数. 为简便起见令 $g = 1$. 如前文规范势理论综述所指出, D_i^{ind} 是平行场条件式(155)所诱导的协变导数, A_i^{ind} 是相应的诱导 $SU(2)$ 规范势. A_i^{ind} 可在 $\mathfrak{su}(2)$ 李代数基上展开为 $A_i^{\text{ind}} = \frac{1}{2i} A_{ia}^{\text{ind}} \sigma^a$. 另外, 从 A_i^{ind} 我们可以定义一个诱导的 $SU(2)$ 规范场张量:

$$F_{ij}^{\text{ind}} = \partial_i A_j^{\text{ind}} - \partial_j A_i^{\text{ind}} + [A_i^{\text{ind}}, A_j^{\text{ind}}], \quad (156)$$

其中, F_{ij}^{ind} 是Clifford矢量,

$$F_{ij}^{\text{ind}} = \frac{1}{2i} F_{ija}^{\text{ind}} \sigma^a = \frac{\sigma^c}{2i} (\partial_i A_{jc}^{\text{ind}} - \partial_j A_{ic}^{\text{ind}} + \epsilon_{abc} A_{ia}^{\text{ind}} A_{jb}^{\text{ind}}), \quad (157)$$

其中 $SU(2)$ 生成元所满足的李代数对易关系为 $[\frac{\sigma^i}{2i}, \frac{\sigma^j}{2i}] = \epsilon_{ijk} \frac{\sigma^k}{2i}$. 后文中为简便起见, 略去上标“ind”.

为了在这一非阿贝尔的 $SU(2)$ 规范场中构造阿贝尔的Maxwell电磁场, 我们采用't Hooft(磁)单极子模型:

$$f_{ij} = \mathbf{F}_{ij} \cdot \hat{\mathbf{h}} - \hat{\mathbf{h}} \cdot (\mathbf{D}_i \hat{\mathbf{h}} \times \mathbf{D}_j \hat{\mathbf{h}}), \quad (158)$$

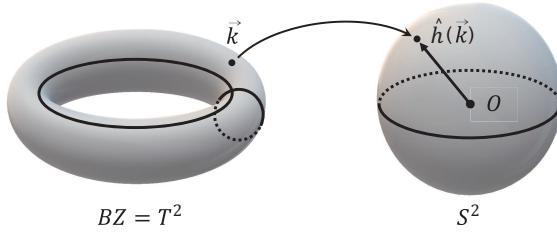


图5 (网络版彩图)从k-空间到 $\hat{\mathbf{h}}$ -空间的映射: $T^2 \rightarrow S^2$, 其中 $T^2 = S^1 \times S^1$. 这是由 k_x 和 k_y 坐标在布里渊区的周期性决定的

Figure 5 (Color online) A map from the \mathbf{k} -space to the $\hat{\mathbf{h}}$ -space: $T^2 \rightarrow S^2$, where $T^2 = S^1 \times S^1$. It is determined by the periodicity of the k_x - k_y coordinates in the Brillouin zone.

其中 f_{ij} 是 $U(1)$ 电磁场张量, 可理解为 $SU(2)$ 规范场的子场. 矢量 \mathbf{F}_{ij} 理解在某一组基上展开, $F_{ij,1}\mathbf{e}_1 + F_{ij,2}\mathbf{e}_2 + F_{ij,3}\mathbf{e}_3$; 后文的 \mathbf{A}_i 也有同样的展开. 内积 $\mathbf{F}_{ij} \cdot \hat{\mathbf{h}} = F_{ij,a}\hat{h}_a$ 是 $SU(2)$ 场张量 \mathbf{F}_{ij} 在单位矢量 $\hat{\mathbf{h}}$ (即 h 的空间部分) 上的投影. 另外 $\hat{\mathbf{h}} \cdot (\mathbf{D}_i \hat{\mathbf{h}} \times \mathbf{D}_j \hat{\mathbf{h}}) = \frac{1}{3!} \epsilon_{abc} \hat{h}_a \mathbf{D}_i \hat{h}_b \mathbf{D}_j \hat{h}_c$ 是一个附加的几何项. 协变导数 $\mathbf{D}_i \hat{h}_a$ 定义为

$$\mathbf{D}_i \hat{\mathbf{h}} \equiv \partial_i \hat{\mathbf{h}} + [\mathbf{A}_i, \hat{\mathbf{h}}] = \partial_i \hat{\mathbf{h}} + \mathbf{A}_i \times \hat{\mathbf{h}}. \quad (159)$$

这里注意: 由于 \mathbf{A}_i 是前文已经诱导出的规范势, 这里不能再重复要求 $\mathbf{D}_i \hat{\mathbf{h}} = 0$.

鉴于 \hat{h}_a , $F_{ij,a}$ 和 $\mathbf{D}_i \hat{h}_a$ 的协变性, Maxwell 场张量 f_{ij} 也是 $SU(2)$ 协变的. 将式(159)代入式(158):

$$f_{ij} = (\partial_i a_j - \partial_j a_i) - \hat{\mathbf{h}} \cdot (\partial_i \hat{\mathbf{h}} \times \partial_j \hat{\mathbf{h}}), \quad (160)$$

其中电磁规范场 a_i 来自 $SU(2)$ 规范势 A_{ia} 在选定方向 \hat{h}_a 上的投影,

$$a_i = \mathbf{A}_i \cdot \hat{\mathbf{h}} = A_{ia} \hat{h}_a. \quad (161)$$

第二项是额外的拓扑项, 其几何本质是三维 $SU(2)$ 群空间中单位球面上的立体角:

$$\hat{\mathbf{h}} \cdot (\partial_i \hat{\mathbf{h}} \times \partial_j \hat{\mathbf{h}}) = \epsilon_{abc} \hat{h}_a \partial_i \hat{h}_b \partial_j \hat{h}_c. \quad (162)$$

式(160)是后续研究的出发点, 式右两项将分别贡献两种不同类型的第一陈类 [31], 并导致二维和三维拓扑缺陷.

4.3 不同维数的拓扑缺陷

4.3.1 Berry联络及诱导的二维涡旋

利用平行场条件式(155)及其共轭, $\mathbf{D}_i^\dagger \Psi^\dagger = \partial_i \Psi^\dagger - \frac{1}{2i} \Psi^\dagger A_{ia} \sigma^a = 0$, 可得到用布洛赫波函数表示的 A_{ia} 的内部结构

$$A_{ia} = \frac{i}{\Psi^\dagger \Psi} (\partial_i \Psi^\dagger \sigma^a \Psi - \Psi^\dagger \sigma^a \partial_i \Psi), \quad (163)$$

其中用到Clifford代数定义式 $\sigma^a \sigma^b + \sigma^b \sigma^a = 2\delta^{ab} I$ (参前文式(62)). 此分解表达式满足 $SU(2)$ 规范变换 S 之下的兼容条件 $A'_i = S^\dagger A_i S + S^\dagger \partial_i S$, 其中 $A_i = \frac{1}{2i} A_{ia} \sigma^a$. 另一方面, 单位矢量 $\hat{\mathbf{h}}$ 可在Clifford基矢量上展开. 不失一般性, 以 E_+ 为例, $(\epsilon + \mathbf{h} \cdot \boldsymbol{\sigma}) \Psi = (\epsilon + \|\mathbf{h}\|) \Psi$, 从而

$$(\hat{\mathbf{h}} \cdot \boldsymbol{\sigma}) \Psi = \Psi, \quad (164)$$

其中 $\hat{h}_a = \frac{\Psi^\dagger \sigma^a \Psi}{\Psi^\dagger \Psi} \equiv \langle \sigma^a \rangle$ 是 σ^a 的真空期望值. 这样, 诱导电磁势 a_i 成为

$$a_i = \mathbf{A}_i \cdot \hat{\mathbf{h}} = A_{ia} \hat{h}_a = \frac{i}{\Psi^\dagger \Psi} (\partial_i \Psi^\dagger \Psi - \Psi^\dagger \partial_i \Psi). \quad (165)$$

采取归一化 $\hat{\Psi} = \frac{\Psi}{\|\Psi\|}$, 有 $a_i = 2i \hat{\Psi}^\dagger \partial_i \hat{\Psi}$, 这就导出了动量空间的Berry联络 $a_{ik} = -i \sum_a \langle a \mathbf{k} | \frac{\partial}{\partial k^i} | a \mathbf{k} \rangle$ (忽略其系数). 这样, 源于 a_i 的式(160)右第一项可表示为

$$f_{Bi,j} = \partial_i a_j - \partial_j a_i, \quad (166)$$

其中“B”指代“Berry”.

由拓扑不变量第一陈类的构造规则式(77), 由 $f_{Bi,j}$ 直接得到第一陈类

$$C_{1B} = \frac{1}{2\pi} f_{Bi,j} dk^i \wedge dk^j = f_B, \quad (167)$$

其积分就直接给出一个整数赋值的拓扑数, 即第一陈数:

$$c_{1B} = \int_{BZ} C_{1B} = \int_{BZ} f_B \in \mathbb{Z}. \quad (168)$$

需要指出, 作为一个积分形式式(168)只提供底流形上的整体拓扑信息, 并不能提供拓扑缺陷在微观层面的微分表达式. 下面我们就将详细研究拓扑缺陷的微分结构.

作为 $U(1)$ 规范势, a_i 满足 $U(1)$ 旋转对称性, 这对外尔旋量的两个分量提出了限制. 因此, 不失一般性可取

$$\Psi = \begin{pmatrix} \psi \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \phi^1 + i\phi^2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (169)$$

这样 a_i 除了物理常数外具有普通流体力学速度场的形式:

$$a_i = \frac{1}{2i\psi^*\psi} (\psi^* \partial_i \psi - \partial_i \psi^* \psi). \quad (170)$$

引入一个单位矢量 $n^A = \frac{\phi^A}{\|\phi\|}$, $A = 1, 2$, $U(1)$ 势 a_i 就化为

$$a_i = \epsilon_{AB} n^A \partial_i n^B. \quad (171)$$

而 $U(1)$ 场张量则成为

$$f_{Bij} = 2\epsilon_{AB} \partial_i n^A \partial_j n^B. \quad (172)$$

根据拓扑流理论, 利用 $\frac{\partial}{\partial k_i} = \frac{\partial \phi^A}{\partial k_i} \frac{\partial}{\partial \phi^A}$, 以及 ϕ -空间的格林函数关系:

$$\partial_A \partial_A \ln \|\phi\| = 2\pi \delta^2(\phi), \quad (173)$$

其中 $\partial_A = \frac{\partial}{\partial \phi^A}$.

则可证明

$$\epsilon_{AB} \partial_i \frac{\phi^A}{\|\phi\|} \partial_j \frac{\phi^B}{\|\phi\|} = 2\pi \epsilon_{ij} \delta^2(\phi) D\left(\frac{\phi}{k}\right), \quad (174)$$

其中 $D\left(\frac{\phi}{k}\right) = \frac{1}{2} \epsilon^{ij} \epsilon_{AB} \partial_i \phi^A \partial_j \phi^B$ 是Jacobian行列式. 这里注意, 本文用小写拉丁字母表示底流形(也即布里渊区)坐标, 而用大写拉丁字母表示 ϕ -空间即群空间坐标. 对全反对称张量 ϵ , 我们对上标和下标不加区别.

这样 f_{Bij} 即获得一个 δ -函数形式的表达式

$$f_{Bij} = 4\pi \epsilon_{ij} \delta^2(\phi) D\left(\frac{\phi}{k}\right). \quad (175)$$

如前文拓扑流理论综述部分指出, 式(175)有重要结论:

$$\delta^2(\phi) = \begin{cases} 0, & \text{当且仅当 } \phi \neq 0, \\ \infty, & \text{当且仅当 } \phi = 0. \end{cases} \quad (176)$$

故可通过 ϕ 零点确定 f_{Bij} 的非零解. 隐函数定理表明, 在正规条件 $D\left(\frac{\phi}{k}\right) \neq 0$ 之下, ϕ 的零点方程

$$\phi^A(k^1, k^2) = 0, \quad A = 1, 2. \quad (177)$$

有一族 N 个孤立解, 表为

$$k^1 = k_j^1, \quad k^2 = k_j^2, \quad j = 1, 2, \dots, N_B, \quad (178)$$

代表二维布里渊区的 N_B 个孤立点缺陷. 进一步地, 如前文拓扑流理论综述指出, δ -函数可展开到这些缺陷上去

$$f_{Bij} = \sum_{j=1}^{N_B} \beta_j \eta_j \delta^2(x - x_j). \quad (179)$$

这里正数 β_j 是 ϕ -映射的Hopf指标, 其拓扑意义是当跑动坐标点 x 覆盖零点 x_j 的领域一次, 跑动矢量场 ϕ^a 将覆盖群空间的相应区域 β_j 次. η_j 是 ϕ -映射的Brouwer度, 定义为

$$\eta_j = \text{Sign}\left[D\left(\frac{\phi}{x}\right)\right]_{x_j} = \pm 1. \quad (180)$$

于是, 将 f_{Bij} 代入式(168)积分, 就得到第一陈数:

$$c_{1B} = \int \frac{1}{2\pi} f_{Bij} dx^i \wedge dx^j = \sum_{j=1}^{N_B} \beta_j \eta_j. \quad (181)$$

这是本文得到的第一类型的第一陈数.

4.3.2 三维当中的单极拓扑结构

式(160)右边第二项是拓扑项. 它可以被写成 $U(1)$ 规范场张量的形式, 记为 f_{Mij} (“M”指代单极子),

$$f_{Mij} = \hat{\mathbf{h}} \cdot (\partial_i \hat{\mathbf{h}} \times \partial_j \hat{\mathbf{h}}) = \partial_i W_j - \partial_j W_i. \quad (182)$$

W_i 是吴-杨势^[39], 可用 $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ 实现为

$$W_i = \mathbf{e}_1 \cdot \partial_i \mathbf{e}_2, \quad |\mathbf{e}_1| = |\mathbf{e}_2| = 1, \quad (183)$$

其中 \mathbf{e}_1 和 \mathbf{e}_2 是 $SU(2)$ 群空间 S^2 中从 $\hat{\mathbf{h}}$ 定义而来的单位矢量. $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \hat{\mathbf{h}})$ 满足两两正交, 形成一个正交标架. 这样 f_{Mij} 就给出另一个不同的第一陈类:

$$C_{1M} = f_M = \frac{1}{2\pi} (\partial_i W_j - \partial_j W_i) dk^i \wedge dk^j, \quad (184)$$

其积分形式给出本文的第二种第一陈数:

$$\begin{aligned} c_{1M} &= \int_{S^2} C_{1M} = \int_{BZ} \hat{\mathbf{h}}^*(dW) \\ &= \int_{BZ} \frac{1}{2\pi} (\partial_i W_j - \partial_j W_i) dk^i \wedge dk^j \in \mathbb{Z}, \end{aligned} \quad (185)$$

其中 $\hat{\mathbf{h}}^*$ 是一个拖回映射(Pull-Back).

5 结论

本文第2和3节首先简要总结回顾了段一士教授等提出的规范势分解理论和拓扑流理论. 第2节重点放在规范势分解思想的源起(即广义相对论中的Christoffel联络), 拓扑信息如何逐步输入示性类, 以及较全面地罗列了一些典型的规范势分解结果.

第3节首先用几个示例解说了拓扑流理论的梗概和特点, 然后给出拓扑流的一般严格理论. 重点在于阐明通常的拓扑示性类理论只能给出积分形式的整数结果, 而拓扑流的优点在于能够从微观层面给出缺陷的微分结构. 因此该理论在各种物理系统中拓扑缺陷激发的分析方面具有广泛的适用性和实用价值.

第4节是前述理论的一个具体应用. 二维拓扑绝缘体是近年来国际上凝聚态物理的一个研究热点, 其拓扑效应来源于其中不同类型的非平庸拓扑数, 比如陈数. 本文将各种类型纳入一个统一的框架—'t Hooft单极子规范理论, 即非Abel规范场中的 $U(1)$ 子场理论. 分析得到两种不同类型的第一陈数, 以及相应拓扑缺陷的微分描述.

参考文献

- 1 Duan Y S, Ge M L. $SU(2)$ gauge theory and electrodynamics with N magnetic monopoles (in Chinese). *Sci China*, 1979, 11: 1072–1081 [段一士, 葛墨林. $SU(2)$ 规范理论与 N 个磁单极运动体系的电动力学. *中国科学*, 1979, 11: 1072–1081]
- 2 Nash C. *Differential Topology and Quantum Field Theory*. New York: Academic Press, 1991
- 3 Faddeev L, Niemi A J. Partially dual variables in $SU(2)$ Yang-Mills theory. *Phys Rev Lett*, 1999, 82: 1624–1627; Decomposing the Yang-Mills field. *Phys Lett B*, 1999, 464: 90–93
- 4 Cho Y M. Magnetic confinement in QCD. *J Korean Phys Soc*, 2001, 38: 151
- 5 Li X, Liu X, Huang Y C. Tackling tangledness of cosmic strings by knot polynomial topological invariants. *Int J Mod Phys A*, 2017, 32: 1750164
- 6 Duan Y, Liu X, Zhang P. Decomposition theory of the $U(1)$ gauge potential and the London assumption in topological quantum mechanics. *J Phys-Condens Matter*, 2002, 14: 7941–7947
- 7 Humphreys J E. *Introduction to Lie Algebras and Representation Theory*. New York: Springer-Verlag, 1972
- 8 Liu X, Duan Y S, Zhang P M. Multi-types of skyrmions in $SU(N)$ quantum Hall system. *Commun Theor Phys*, 2005, 44: 371–374
- 9 Duan Y S, Li S. Decomposition theory of spin connection, topological structure of Gauss-Bonnet-Chern topological current and Morse theory. In: *Jingshin Theoretical Physics Symposium in Honor of Professor Ta-You Wu*. Singapore: World Scientific, 1998
- 10 Liu X. Knots in $SU(M|N)$ Chern-Simons field theory. *J Phys A-Math Theor*, 2010, 43: 255202
- 11 Duan Y S, Liu X, Fu L B. Spinor decomposition of $SU(2)$ gauge potential and spinor structures of Chern-Simons and Chern density. *Commun Theor Phys*, 2003, 40: 447–450
- 12 Liu X, Duan Y S, Yang W, et al. Inner structure of $Spin^c(4)$ gauge potential on 4-dimensional manifolds. *Ann Phys*, 2008, 323: 2107–2114
- 13 Duan Y S, Liu X, Fu L B. Many knots in Chern-Simons field theory. *Phys Rev D*, 2003, 67: 085022
- 14 Duan Y S, Liu X. Knotlike cosmic strings in the early universe. *J High Energy Phys*, 2004, 2004: 028–028
- 15 Liu X, Ricca R L. The Jones polynomial for fluid knots from helicity. *J Phys A-Math Theor*, 2012, 45: 205501
- 16 Liu X, Ricca R L. On the derivation of the HOMFLYPT polynomial invariant for fluid knots. *J Fluid Mech*, 2015, 773: 34–48
- 17 Liu X, Ricca R L. Knots cascade detected by a monotonically decreasing sequence of values. *Sci Rep*, 2016, 6: 24118
- 18 Duan Y S, Meng X. Topological structure of Gauss-Bonnet-Chern density and its topological current. *J Math Phys*, 1993, 34: 1149–1161
- 19 Duan Y S, Zhang H, Li S. Topological structure of the London equation. *Phys Rev B*, 1998, 58: 125–127
- 20 Duan Y S, Fu L. The general decomposition theory of $SU(2)$ gauge potential, topological structure and bifurcation of $SU(2)$ Chern density. *J Math Phys*, 1998, 39: 4343–4355
- 21 Duan Y S, Li S, Yang G. The bifurcation theory of the Gauss-Bonnet-Chern topological current and Morse function. *Nucl Phys B*, 1998, 514: 705–720
- 22 Duan Y, Zhang H, Fu L. Point defects of a three-dimensional vector order parameter. *Phys Rev E*, 1999, 59: 528–534

- 23 Duan Y, Zhang H. Line defects of a two-component vector order parameter. *Phys Rev E*, 1999, 60: 2568–2576
- 24 Klitzing K, Dorda G, Pepper M. New method for high-accuracy determination of the fine-structure constant based on quantized Hall resistance. *Phys Rev Lett*, 1980, 45: 494–497
- 25 Zhang L, Ge M L. The Frontier of Quantum Mechanics (in Chinese). 2nd ed. Beijing: Tsinghua University Press, 2012 [张礼, 葛墨林. 量子力学的前沿问题. 第2版. 北京: 清华大学出版社, 2012]
- 26 Hall E H. On a new action of the magnet on electric currents. *Am J Math*, 1879, 2: 287–292
- 27 Thouless D J, Kohmoto M, Nightingale M P, et al. Quantized Hall conductance in a two-dimensional periodic potential. *Phys Rev Lett*, 1982, 49: 405–408
- 28 Haldane F D M. Model for a quantum Hall effect without Landau levels: Condensed-matter realization of the “parity anomaly”. *Phys Rev Lett*, 1988, 61: 2015–2018
- 29 Kane C L, Mele E J. Z_2 topological order and the quantum spin Hall effect. *Phys Rev Lett*, 2005, 95: 146802
- 30 Hasan M Z, Kane C L. Colloquium: Topological insulators. *Rev Mod Phys*, 2010, 82: 3045–3067, arXiv: [1002.3895](#)
- 31 Qi X L, Hughes T L, Zhang S C. Topological field theory of time-reversal invariant insulators. *Phys Rev B*, 2008, 78: 195424, arXiv: [0802.3537](#)
- 32 Qi X L, Zhang S C. The quantum spin Hall effect and topological insulators. *Phys Today*, 2010, 63: 33–38, arXiv: [1001.1602](#)
- 33 Bernevig B A, Chern C H, Hu J P, et al. Effective field theory description of the higher dimensional quantum Hall liquid. *Ann Phys*, 2002, 300: 185–207
- 34 Chang C Z, Zhang J, Feng X, et al. Experimental observation of the quantum anomalous hall effect in a magnetic topological insulator. *Science*, 2013, 340: 167–170
- 35 Fu L, Kane C L, Mele E J. Topological insulators in three dimensions. *Phys Rev Lett*, 2007, 98: 106803
- 36 Fu L, Kane C L. Time reversal polarization and a Z_2 adiabatic spin pump. *Phys Rev B*, 2006, 74: 195312
- 37 Zhang S C. A four-dimensional generalization of the quantum Hall effect. *Science*, 2001, 294: 823–828
- 38 Fradkin E. Field Theories of Condensed Matter Physics. 2nd ed. Cambridge: Cambridge University Press, 2013
- 39 Wu T T, Yang C N. Concept of nonintegrable phase factors and global formulation of gauge fields. *Phys Rev D*, 1975, 12: 3845–3857; Dirac’s monopole without strings: Classical Lagrangian theory. *Phys Rev D*, 1976, 14: 437–445

Gauge potential decomposition and topological current theories with applications in the study of topological insulators

ZHU WenWen¹ & LIU Xin^{1,2*}

¹Institute of Theoretical Physics, Beijing University of Technology, Beijing 100124, China;

²Beijing-Dublin International College, Beijing University of Technology, Beijing 100124, China

The theories of gauge potential decomposition and topological currents proposed by Prof. YiShi Duan et al. have remarkable significance in the research of topological inner structures of gauge fields, with wide applications in the analysis of topological defects/excitations in various physical systems. In this paper, firstly, a brief survey for these theories is presented. Secondly, the theories are applied in the study of topological insulators in two dimensions. Topological insulators are at the cutting edge of current international research of condensed matter physics, where topological effects stem from the non-trivial topological numbers, such as the Chern numbers. In this paper different types of topological defects are investigated within one single framework, the so-called ’t Hooft monopole model, which acts as a $U(1)$ sub-field theory of a non-Abelian gauge field.

gauge potential decomposition, topological currents, topological insulators, Chern number, topological defects

PACS: 11.15.-q, 02.40.-k, 73.43.-f

doi: [10.1360/SSPMA2018-00165](https://doi.org/10.1360/SSPMA2018-00165)