

二维多裂纹弹性体的有效弹性模量^{*}

詹世革 王自强 韩学礼

(中国科学院力学研究所, 北京 100080)

摘要 采用严格考虑微裂纹相互作用的分析方法, 针对微裂纹随机分布和平行分布两种情况, 计算了无限大体中代表性体元(RVE)的有效弹性模量, 并与其他细观损伤理论所得结果和试验结果进行了比较. 数值计算结果表明, 所用方法简单精确, 对求解多裂纹体问题非常有效.

关键词 多裂纹弹性体 有效弹性模量 裂纹密度 边界配置法

在诸如陶瓷基复合材料、陶瓷、岩石、混凝土和玻璃等脆性材料中, 常常弥散分布大量的微裂纹. 这些微裂纹的存在在很大程度上削弱了材料的强度和刚度, 因此在材料科学、力学和工程技术界引起了广泛的关注. 许多研究者对微裂纹损伤进行了研究, 如不考虑微裂纹之间相互作用的 Taylor 模型方法(又称稀疏分布方法)、间接考虑微裂纹相互作用的方法(如自洽方法^[1]、广义自洽方法^[2]、微分方法^[3]和 Mori-Tanaka 方法^[4]等). 由于不考虑或间接考虑微裂纹相互作用的方法没有考虑微裂纹的位置和尺寸, 因此只能适用于微裂纹密度较小的情况, 最多适用于中等密度的情况, 并且无法对材料的损伤断裂性能及其过程进行有效的分析. 为了计算微裂纹密度较高情况下的有效模量, 分析材料损伤演化直至断裂的全过程, 有必要直接考虑微裂纹的相互作用. Kachanov^[5]提出了考虑微裂纹相互作用的伪面力法, 此方法的优点在于方法简便, 可适用于微裂纹密度较高的情况, 但此方法采用了裂纹面面力平均, 是一种一阶近似的方法. Huang 等人^[6]设想代表性体元在无限大体内双周期排列, 计算了代表性体元的有效弹性模量. Fond 等人^[7]采用伪面力方法研究了平面问题中无限大体或有限体内裂纹的相互作用和裂纹与圆孔洞间的相互作用. Vavakin 等^[8]和 Carvalho 等人^[9]通过单拉试验研究了平面问题含裂纹体和含孔洞体的有效弹性性能.

本文采用文献[10]提出的求解二维多裂纹体问题的方法. 此方法严格考虑了微裂纹之间的相互作用, 先把裂纹用分布位错来表示, 把裂纹问题的复应力函数展开成级数, 然后通过叠加原理, 使在裂纹面的配置点上满足边界条件, 把多裂纹问题化成关于级数系数的线性代数方程组, 进行数值求解. 本文以裂纹密度为参量, 对微裂纹随机分布情况, 随机产生各微裂纹的位置和取向, 对微裂纹平行分布情况, 随机产生各微裂纹的位置, 采用了两种求平均应力和平均应变的方法, 计算了无限大体中代表性体元(RVE)的有效弹性模量.

1997-09-09 收稿, 1998-05-18 收修改稿

*国家自然科学基金资助项目(批准号: 19392300)

1 代表性体元的有效弹性模量

1.1 直接考虑微裂纹相互作用的数学分析方法

1.1.1 单裂纹基本公式 平面问题的应力应变场可用两个复势函数 Φ 和 Ω 表示^[1]:

$$\begin{aligned}\sigma_x + \sigma_y &= 2[\Phi(z) + \overline{\Phi(\bar{z})}], \\ \sigma_y - i\sigma_{xy} &= \Phi(z) + \Omega(\bar{z}) + (z - \bar{z}) \overline{\Phi'(z)}.\end{aligned}\quad (1)$$

讨论位于实轴上的一条裂纹, 把裂纹看作连续分布的位错, 其复势函数可表示为

$$\Phi(z) = \Omega(z) = \frac{\mu}{\pi i(\kappa + 1)} \int_{-a}^a \frac{g(s)}{z - s} ds, \quad (2)$$

其中 $g(s)$ 为位错密度函数, 对平面应变问题 $\kappa = 3 - 4\nu$, 对平面应力问题 $\kappa = (3 - \nu)/(1 + \nu)$, μ 为剪切模量, ν 为 Poisson 比.

把位错密度函数展开为正交级数:

$$\frac{\mu}{i(\kappa + 1)} g(s) = \sum_{m=0}^{\infty} \alpha_m \frac{T_m(\xi)}{\sqrt{1 - \xi^2}}, \quad (3)$$

这里 T_m 为第一类 Chebyshev 多项式, $\xi = s/a$.

那么, 裂纹的复势函数可表示为级数:

$$\Phi(z) = \Omega(z) = \sum_{m=1}^{\infty} \alpha_m \left[\frac{z}{a} - \sqrt{\frac{z^2}{a^2} - 1} \right]^m \sqrt{\frac{z^2}{a^2} - 1}. \quad (4)$$

把复势函数的级数表达式(4)代入(1)式, 任意点的应力都可表示成级数. 其中裂纹面上应力可表示为

$$\sigma_y - i\sigma_{xy} = \Phi^+(s) + \Omega^-(s) = -2 \sum_{m=1}^{\infty} \alpha_m U_{m-1}(s/a), \quad (5)$$

这里 U_m 为第二类 Chebyshev 多项式.

1.1.2 多裂纹基本公式 设在无限大弹性体中存在 N 条长度为 $2a_k$ ($k = 1, 2, \dots, N$) 的裂纹, 建立一总体 Descartes 坐标系 Oxy . 在总体坐标系中第 k 裂纹中心 O_k 的坐标为 C_k ($C_k = x_{ck} + iy_{ck}$), 再以 O_k 为原点建立 N 个局部坐标系 $O_k x_k y_k$, 使 $O_k x_k$ 轴与第 k 裂纹面一致, 与 Ox 轴成 θ_k 角.

设在无穷远处作用有应力 σ_x^∞ , σ_y^∞ 和 σ_{xy}^∞ , 则它们在裂纹面处产生的应力为

$$\sigma_{yk}^{(0)} - i\sigma_{xyk}^{(0)} = 2\Gamma + \overline{T} e^{-2i\theta_k}, \quad k = 1, 2, \dots, N, \quad (6)$$

其中

$$\Gamma = (\sigma_x^\infty + \sigma_y^\infty)/4, \quad \Gamma' = (\sigma_y^\infty - \sigma_x^\infty)/2 + i\sigma_{xy}^\infty.$$

采用叠加原理求解多裂纹问题. 从上节知, 裂纹 k 在局部坐标系 $O_k x_k y_k$ 下的复势函数 $\Phi_k(z_k)$, $\Omega_k(z_k)$ 及相应的应力场 $\sigma_{xk}(z_k)$, $\sigma_{yk}(z_k)$, $\sigma_{xyk}(z_k)$ 都可表示成为级数.

变换到新坐标系 $O_l x_l y_l$ 的应力变换式为

$$\sigma_{yl}^{(k)}(z_l) - i\sigma_{xyl}^{(k)}(z_l) = \frac{1}{2} [\sigma_{xk}(z_k) + \sigma_{yk}(z_k)] (1 - e^{-2i\theta}) + [\sigma_{yk}(z_k) - i\sigma_{xyk}(z_k)] e^{-2i\theta}, \quad (7)$$

其中 $\theta = \theta_l - \theta_k$, $z_k = x_k + iy_k = (C_l - C_k) e^{-i\theta_k} + z_l e^{i(\theta_l - \theta_k)}$, $\sigma_{yl}^{(k)}(z_l) - i\sigma_{xyl}^{(k)}(z_l)$ 是第 k 裂纹引

起的在局部坐标系 $O_l x_l y_l$ 中的应力分量.

通过把各个裂纹产生的应力场及外边界条件产生的应力场相叠加, 由裂纹面应力自由的条件得到如下方程组:

$$\sum_{k=0}^N [\sigma_{yl}^{(k)}(x_l) - i\sigma_{xyl}^{(k)}(x_l)] = 0, \quad |x_l| \leq a_l, \quad l = 1, 2, \dots, N, \quad (8)$$

其中 $\sigma_{yl}^{(k)}(x_l) - i\sigma_{xyl}^{(k)}(x_l)$ ($k \neq 0$) 为裂纹 k 在 l 裂纹面上引起的面力. $k=0$ 对应于无穷远应力在 l 裂纹面上引起的面力. 这样, 方程(8)成为 N 个关于系数 α_{km} ($k=1, \dots, N; m=0, 1, \dots, \infty$) 的控制方程组.

1.1.3 求解方法 采用在裂纹面上选择配置点的方法进行数值求解. 在 k 裂纹面上选择 M_k 个配置点 x_{ki} :

$$x_{ki} = a_k \cos \left(\frac{i\pi}{M_k + 1} \right), \quad i = 1, 2, \dots, M_k,$$

把复势级数截取到 M_k 项, 这样控制方程组(8)就化成关于系数 α_{km} ($k=1, 2, \dots, N; m=0, 1, \dots, M_k$) 的线性代数方程组. 对每个不相交裂纹, 还需满足位移单值条件:

$$\int_{-a_k}^{a_k} g^k(s) ds = 0, \quad (9)$$

由此得到 $\alpha_{k0}=0$.

当求解代数方程组得到各裂纹的复势级数的系数后, 各裂纹形成的弹性场及应力强度因子也就确定了. 然后把所有裂纹产生的弹性场叠加, 同时考虑到从各个局部坐标系到整体坐标系的变换, 就可得到多裂纹体的弹性场.

1.2 代表性体元的有效弹性模量计算

代表性体元 RVE 的有效柔度张量可通过下式计算:

$$\langle \epsilon \rangle = \mathbf{M} : \langle \sigma \rangle, \quad (10)$$

这里 $\langle \epsilon \rangle$ 为 RVE 中平均应变, $\langle \sigma \rangle$ 为 RVE 中平均应力, $\mathbf{M}$ 为多裂纹体的有效柔度张量.

本文采用两种方法计算了 RVE 中的平均应变和平均应力.

第一种方法为文献[5]中 Kachanov 计算有效弹性模量所采用的方法. RVE 的平均应变表示为

$$\langle \epsilon \rangle = \mathbf{M}^0 : \langle \sigma \rangle + \frac{1}{2A} \sum_l (\langle b \rangle \mathbf{n} + \mathbf{n} \langle b \rangle) a^l, \quad (11)$$

其中 $\mathbf{M}^0$ 为基体的柔度张量, $\mathbf{n}$ 为裂纹的单位法向矢量, A 为 RVE 的面积, a^l 为第 l 裂纹的半长. $\langle b \rangle^l$ 为裂纹平均张开位移. 平均应力取为

$$\langle \sigma \rangle = \sigma^0, \quad (12)$$

其中 σ^0 为在无穷远处作用的应力. 第二种方法直接计算 RVE 内的平均应变和平均应力, 它们可以用 RVE 外边界的面力和位移表示. 平均应变为

$$\langle \epsilon \rangle = \frac{1}{A} \int_A \epsilon dA = \frac{1}{A} \int_C \frac{1}{2} (\mathbf{n} \mathbf{u}^0 + \mathbf{u}^0 \mathbf{n}) dl, \quad (13)$$

其中 $\mathbf{u}^0$ 为 RVE 外边界点的位移矢量. 平均应力为

$$\langle \sigma \rangle = \frac{1}{A} \int_A \sigma dA = \frac{1}{A} \int_C \boldsymbol{\chi}^0 dl, \quad (14)$$

其中 $\mathbf{x}$ 为 RVE 外边界点的位置矢量, $\mathbf{t}^0$ 为 RVE 外边界点的面力, $\mathbf{t}^0 = \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma}$, $\boldsymbol{\sigma}$ 为 RVE 外边界点的应力.

分别以 x 向单拉、 y 向单拉及纯剪三种方式加载, 即可算出有效柔度系数 M_{11} , M_{22} , M_{66} , 进而可求得有效模量 E_1, E_2, μ_{12} .

1.3 算例、结果与讨论

裂纹密度的表达式为^[5]

$$\rho = \frac{1}{A} \sum_{i=1}^N a_i^2, \tag{15}$$

其中 N 为 RVE 内的裂纹数, $2a_i$ 为第 i 条裂纹的长度, A 为 RVE 的面积. 裂纹数 N 取 36, 裂纹密度分别为 0.1, 0.15, 0.2, 0.25, 0.3 和 0.35 六种情况, 采用在 RVE 中均匀划分网格, 使每个格中有一条微裂纹, 对微裂纹随机分布情况, 在每个格中随机产生微裂纹的位置、取向, 对微裂纹平行分布情况, 在每个格中随机产生微裂纹的位置, 其方向平行于 x 轴. 在产生随机数时避免微裂纹相互交叉或与 RVE 边界交叉. 对每个裂纹密度产生 15 种不同的微裂纹分布, 计算了微裂纹随机分布和平行分布两种情况下 RVE 的有效弹性模量. 本文选用 Poisson 比为 0.3, 各算例中裂纹等长, 平面应力情况.

对微裂纹随机分布情况, 采用上文所提两种求平均应变和平均应力的方法, 计算了两个垂直方向的有效弹性模量, 见图 1 和图 2. 对微裂纹平行分布情况, 也采用两种方法, 计算了垂直裂纹方向的有效弹性模量, 见图 3. 图中还显示了不考虑微裂纹相互作用方法、微分方法及自洽方法所得结果.

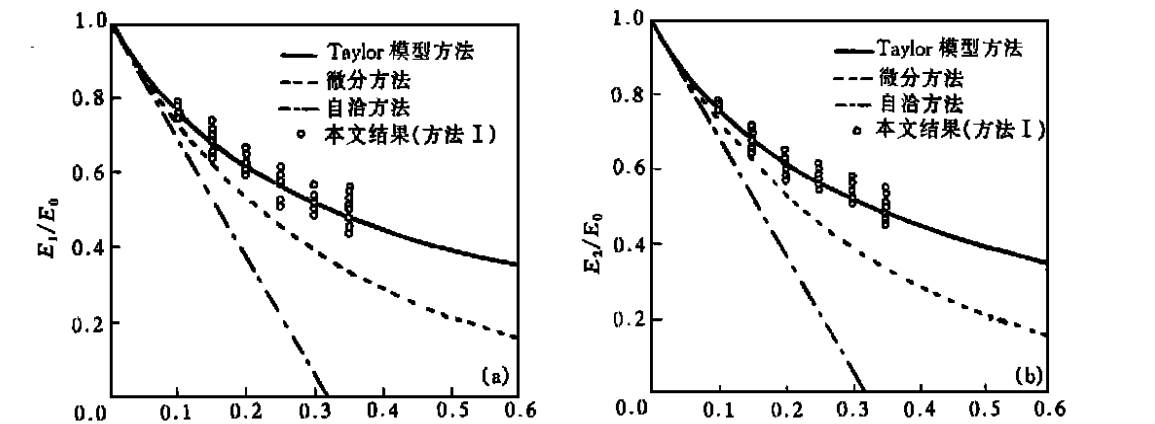


图 1 微裂纹随机分布时, 有效弹性模量与裂纹密度关系图(方法 I)

(a) x 方向弹性模量, (b) y 方向弹性模量

从图中可见, 因为采用了 15 种不同的随机产生的微裂纹分布构型, 本文所得有效弹性模量有一定的分散性. 这种分散性是微裂纹随机分布特征的真实反映, 对微裂纹随机分布情况, 采用第一种方法所得有效弹性模量的平均值与不考虑微裂纹相互作用方法所得结果非常接近, 这与文献[5] 结果一致; 采用第二种方法所得有效弹性模量介于不考虑微裂纹相互作用方法和微分方法所得结果之间, 这与文献[6] 结果一致. 对微裂纹平行分布情况, 也可得到与微裂纹随机分布情况相同的结论.

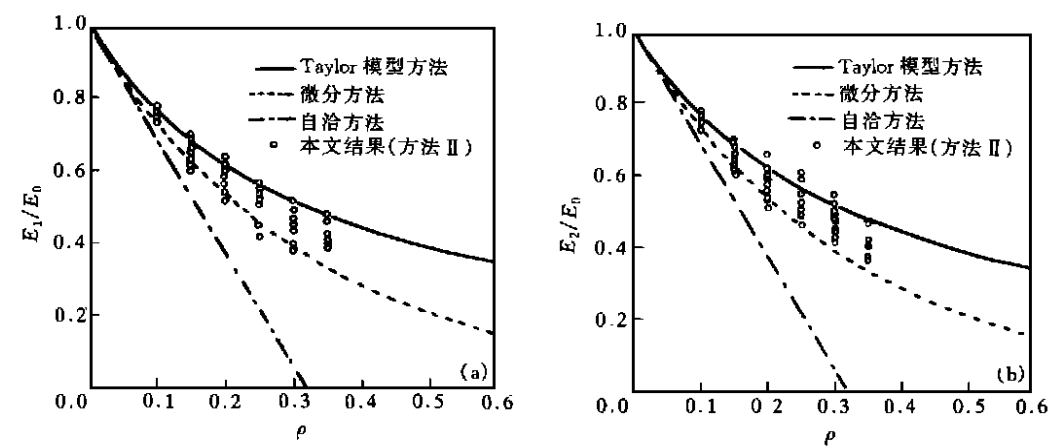


图 2 微裂纹随机分布时,有效弹性模量与裂纹密度关系图(方法Ⅱ)
(a) x 方向弹性模量, (b) y 方向弹性模量

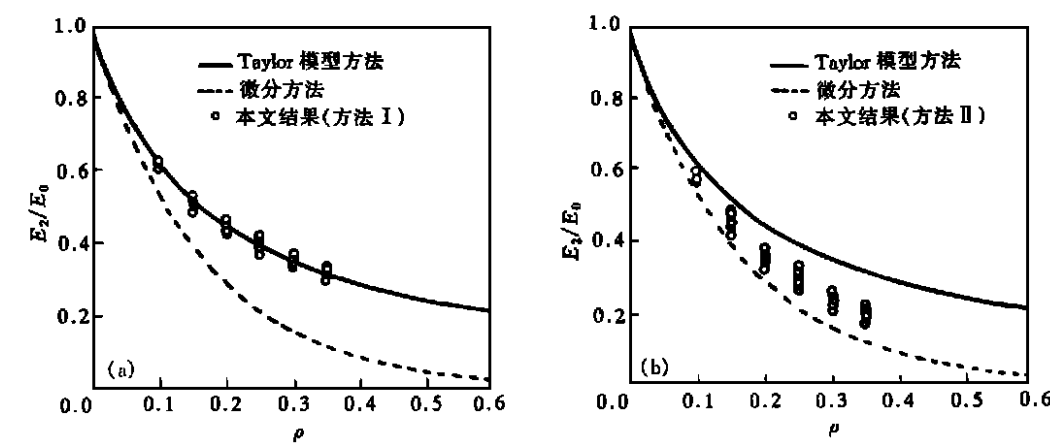


图 3 微裂纹平行分布时,垂直裂纹方向有效弹性模量与裂纹密度关系图
(a) 方法Ⅰ, (b) 方法Ⅱ

为了与文献[9] 试验结果相比较, 本文还计算了含随机分布微裂纹群的 RVE 的有效弹性模量. 代表性体元的尺寸及基体材料的弹性常数均与文献[9] 相同. 裂纹数取为 20, 计算了裂纹密度从 0.02 ~0.15 八种情况下的有效弹性模量, 计算结果如图 4 所示. 从图中可见, 与第一种方法相比, 采用第二种方法所得有效弹性模量与文献[9] 试验结果更为吻合, 表明直接计算 RVE 内的平均应变和平均应力方法较好地反映了 RVE 内微裂纹群相互作用的影响, 与实际情况更加接近.

2 结束语

综上所述, 本文针对微裂纹随机分布和平行分布两种情况, 采用直接考虑微裂纹相互作用的方法, 计算了无限大体中代表性体元 (RVE) 的有效弹性模量. 数值计算结果表明, 本文所用方法具有统一与直观的优点, 采用此法所得模量与试验结果^[9] 及其他方法^[5, 6] 所得模量吻

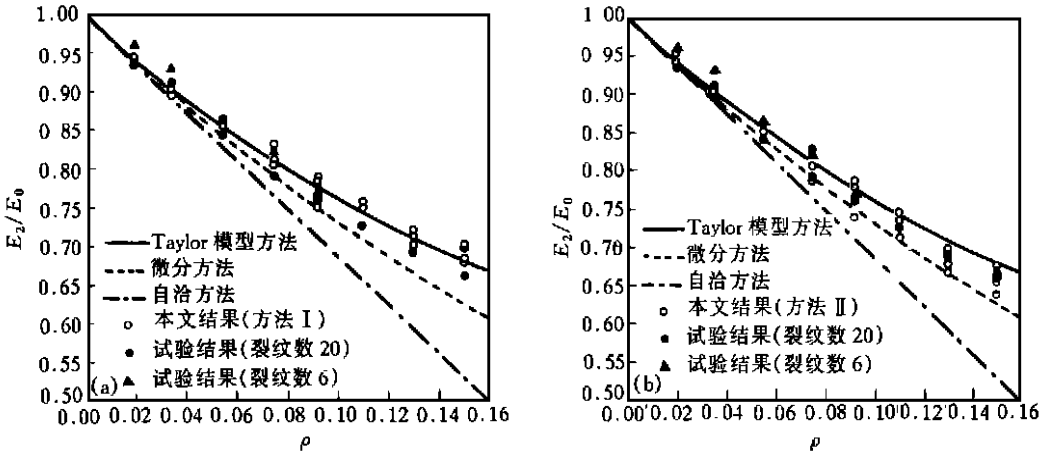


图 4 微裂纹随机分布时, y 方向有效弹性模量计算与试验结果^[9]的比较

(a) 方法 I, (b) 方法 II

合, 在处理多裂纹体问题时计算效率高、精度好, 对求解多裂纹问题非常有效。

本文目前虽然是对不相交裂纹进行分析的, 但把裂纹面闭合条件稍加修改, 即可对相交裂纹进行分析。此外, 对本文方法加以改进, 可对二维多裂纹有限体进行求解。这样, 本文方法不仅可以高效准确地计算含多裂纹弹性体的有效模量, 也为材料损伤演化的直接模拟提供了有力的分析工具。

参 考 文 献

- 1 Budiansky B, O'Connell R J. Elastic moduli of a cracked solid. *Int J Solids Struct*, 1976, 12: 81~95
- 2 Christensen R M, Lo K H. Solutions for effective shear properties in three phase sphere and cylinder models. *J Mech Phys Solids*, 1979, 27: 315~330
- 3 Hashin Z. The differential scheme and its application to cracked materials. *J Mech Phys Solids*, 1988, 36: 719~734
- 4 Mori T, Tanaka K. Average stress in matrix and average elastic energy of materials with misfitting inclusions. *Acta Metall*, 1973, 21: 571~574
- 5 Kachanov M. Effective elastic properties of cracked solids: critical review of some basic concepts. *Appl Mech Rev*, 1992, 45: 304~335
- 6 Huang Y, Chandra A, Jiang Z Q, et al. The numerical calculation of two-dimensional effective moduli for microcracked solids. *Int J Solids Struct*, 1996, 33: 1575~1586
- 7 Fond C, Berthaud Y. Extensions of the pseudo tractions technique for friction in cracks, circular cavities and external boundaries: effect of the interactions on the homogenised stiffness. *Int J Frac*, 1995, 74: 1~28
- 8 Vavakin A S, Salganik R L. Effective characteristics of nonhomogeneous media with isolated nonhomogeneities. *Izv Akad Nauk SSSR MTT*, 1975, 3: 65~75
- 9 Carvalho C S F, Labuz F J. Experiments on effective elastic modulus of two-dimensional solids with cracks and holes. *Int J Solids Struct*, 1996, 33: 4119~4130
- 10 Han Xue, Wang Tzuchiang. Elastic fields of arbitrarily and periodically distributed cracks. In: Wang Tzuchiang, Chou Tsuwei, eds. *Progress in Advanced Materials and Mechanics*. Beijing: Chinese Journal of Mechanics Press, 1996. 688~693
- 11 Muskhelishvili N I. 数学弹性力学的几个基本问题. 赵惠元译. 北京: 科学出版社, 1958