中国科学: 数学 2024 年 第 54 卷 第 10 期: 1555～1568
SCIENTIA SINICA Mathematica
《中国科学》杂志社
SCIENCE CHINA PRESS
CrossMark
click for updates

综 述

仿射超曲面研究的近期进展

献给沈一兵教授 85 寿辰

李安民[1*], 胡泽军[2]

1. 四川大学数学学院, 成都 610064;
2. 郑州大学数学与统计学院, 郑州 450001
E-mail: anminliscu@126.com, huzj@zzu.edu.cn

收稿日期: 2023-06-27; 接受日期: 2023-08-22; 网络出版日期: 2024-04-01; * 通信作者
国家自然科学基金 (批准号: 11890663, 1196131001 和 12171437) 资助项目

摘要 围绕作者专注的研究领域, 本文介绍仿射超曲面理论近年来的一些重要研究进展. 主要内容包括等仿射微分几何中的仿射极大超曲面研究、仿射 Gauss-Kronecker 曲率为常值的仿射超曲面的研究、具有平行 Fubini-Pick 形式仿射超曲面的研究以及中心仿射微分几何中的一些相应结果. 最后, 简要介绍与仿射极大曲面方程相关的一些 4 阶偏微分方程的 Bernstein 性质, 以及关于环簇流形上极值 Kähler 度量存在性的 Yau-Tian-Donaldson 猜想的研究进展.

关键词 仿射超曲面 仿射极大曲面 Fubini-Pick 形式 仿射超球面 环簇流形 极值 Kähler 度量 Bernstein 性质 Yau-Tian-Donaldson 猜想

MSC (2020) 主题分类 32Q15, 35J60, 53A15, 53B25, 53C40, 53C55

1 引言

1872 年, Klein (1849–1925) 提出了著名的 Erlangen 纲领: 几何学是研究一个给定变换群下的不变量的理论. 仿射微分几何是微分几何的一个领域, 其中微分不变量在仿射变换群或其特殊子群下是不变的. 因此, 仿射微分几何这个名字来源于 Klein 的 Erlangen 纲领, 其发展历史久远, 其中最重要的研究分支包括对应于幺模仿射变换群的等仿射超曲面理论和对应于中心仿射变换群的中心仿射超曲面理论. 人们通常最感兴趣的是局部严格凸的仿射超曲面的研究.

设 $\mathbb{R}^{n+1}$ 是通常的 $n+1$ 维实仿射空间, 它具有平坦的无挠仿射联络 D 和关于该联络平行的体积形式 Det (即行列式). 保体积的仿射变换 $\sigma: \mathbb{R}^{n+1}\to\mathbb{R}^{n+1}$ 称为等仿射变换, 也称为幺模仿射变换. 保持原点的仿射变换 $\sigma: \mathbb{R}^{n+1}\to\mathbb{R}^{n+1}$ 称为中心仿射变换. 下面回顾与其有关的基本概念.

英文引用格式: Li A M, Hu Z J. Recent progress on the study of affine hypersurfaces (in Chinese). Sci Sin Math, 2024, 54: 1555–1568, doi: 10.1360/SSM-2023-0192

1.1 仿射超曲面的等仿射微分几何

设 $x: M^n \to \mathbb{R}^{n+1}$ 是一个非退化的仿射超曲面浸入. 根据 Blaschke 理论可知, 沿 M^n 存在一个在 $\mathbb{R}^{n+1}$ 的幺模仿射变换下不变的典型横截向量场 $\xi: M^n \to \mathbb{R}^{n+1}$. 通常称 ξ 为仿射法矢. 于是, 对于任意 $X, Y \in \Gamma(TM)$, $D_X Y$ 具有如下切部和横截部分的分解:

$$D_X Y = \nabla_X Y + h(X,Y)\xi, \quad D_X \xi = -S(X), \tag{1.1}$$

其中 ∇ 和 h 分别称为 M^n 上的诱导仿射联络和仿射度量 (也称为 Blaschke-Berwald 度量). 称 S 为仿射型算子. 记 h 的 Levi-Civita 联络为 $\hat{\nabla}$, 则称 $K_X Y := K(X,Y) := \nabla - \hat{\nabla}$ 为差张量 (the difference tensor). 称 $C := \nabla h$ 为 Fubini-Pick 形式, 也通称为三次 (cubic) 形式. 可以证明: $C(X,Y,Z) = -2h(K_X Y, Z)$ 且其具有全对称性.

令 $\hat{R}(X,Y)Z = \hat{\nabla}_X \hat{\nabla}_Y Z - \hat{\nabla}_Y \hat{\nabla}_X Z - \hat{\nabla}_{[X,Y]} Z$ 表示仿射度量 h 的 Riemann 曲率张量, 则有如下可积性条件成立:

$$\hat{R}(X,Y)Z = \frac{1}{2}[h(Y,Z)SX - h(X,Z)SY + h(SY,Z)X - h(SX,Z)Y] - [K_X, K_Y]Z, \tag{1.2}$$

$$(\hat{\nabla}_X K)(Y,Z) - (\hat{\nabla}_Y K)(X,Z) = \frac{1}{2}[h(Y,Z)SX - h(X,Z)SY - h(SY,Z)X + h(SX,Z)Y], \tag{1.3}$$

$$(\hat{\nabla}_X S)Y - (\hat{\nabla}_Y S)X = K_{SX} Y - K_{SY} X, \tag{1.4}$$

$$\text{极化条件:} \quad \mathrm{Tr}\,(K_X) = 0, \quad \forall X \in \Gamma(TM). \tag{1.5}$$

根据仿射超曲面的基本定理可知, 在相差 $\mathbb{R}^{n+1}$ 的一个幺模仿射变换下, 仿射超曲面完全由仿射度量 h 和 Fubini-Pick 形式 C 决定. 若无特殊说明, 本文仅讨论局部严格凸的仿射超曲面. 于是, 不失一般性, 假定 h 是正定的 Riemann 度量.

给定仿射超曲面 $x: M^n \to \mathbb{R}^{n+1}$, 其仿射型算子的特征值 $\{\lambda_i\}_{i=1}^n$ 称为仿射主曲率. 仿射主曲率的第 r 个初等对称函数 L_r 由 $\binom{n}{r} L_r = \sum_{1 \leqslant i_1 < \cdots < i_r \leqslant n} \lambda_{i_1} \cdots \lambda_{i_r}$ 定义, 其中 $L_1 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \lambda_i$ 称为仿射平均曲率, $L_n = \lambda_1 \cdots \lambda_n$ 称为仿射 Gauss-Kronecker 曲率.

特别地, 如果 $\lambda_1 = \cdots = \lambda_n = L_1$, 即 $S = L_1 \mathrm{id}$, 则称 M^n 为仿射超球面. 这时 L_1 一定是常值函数, 且当常数 $L_1 > 0$ (或 $L_1 < 0$, 或 $L_1 = 0$) 时, 称仿射超球面是椭圆型的 (或双曲型的, 或抛物型的).

满足 $L_1 = 0$ 的仿射超曲面是仿射度量体积泛函的临界点, 称为仿射极大 (超) 曲面.

所有二次超曲面都是仿射超球面. 其中椭圆抛物面 $x_{n+1} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^n x_i^2$ 是仿射极大超曲面. 另外两个局部严格凸的二次超曲面是椭球面 $\sum_{i=1}^{n+1} x_i^2 = r^2$ $(r > 0)$ 和双曲面 $-x_1^2 + \sum_{i=2}^{n+1} x_i^2 = -c^2$ $(c > 0)$. 仿射超曲面理论的一个经典结果是 Maschke-Pick-Berwald 关于二次超曲面的如下刻画:

定理 1.1 (参见文献 [55, 定理 2.13]) $\mathbb{R}^{n+1}$ 中局部严格凸仿射超曲面满足 $K = 0$ (或等价地满足 $C = 0$) 当且仅当它是局部严格凸的二次超曲面.

$\mathbb{R}^{n+1}$ 中紧致的局部严格凸超曲面通常称为卵形面. 关于卵形面的一个著名结果是如下定理:

定理 1.2 (参见文献 [38] 或 [55, 定理 4.5]) $\mathbb{R}^{n+1}$ 中卵形面为椭球面当且仅当存在某个 r $(1 \leqslant r \leqslant n)$, 使得 L_r 为常数.

注 1.1 定理 1.2 的证明可追溯的历史很早, 但其早期的证明都是在假设 $L_n > 0$ 条件下给出的. 文献 [38] 最终证明该条件并不需要.

对于紧致的仿射超球面, 有如下著名的 Blaschke-Deicke 定理:

定理 1.3 (参见文献 [55, 定理 3.35]) $\mathbb{R}^{n+1}$ 中局部严格凸的紧致仿射超球面是椭球面.

正如国际数学大师陈省身先生 1988 年 9 月在为《仿射微分几何》[60] 写的序言中所描述的: "仿射球的研究是微分几何美妙的一章". 20 世纪 90 年代之前, 经过许多数学家的努力, 人们完成了对完备的仿射超球面的分类, 具体可参见文献 [5,12,27,37,39,65,66]、[53, 第二章]、[55, 第三章] 或关于仿射超球面研究的综述文献 [63]. 此外, 对于仿射度量为常截面曲率的仿射超球面的局部分类研究及其最新的进展可参见文献 [1,16,71,72].

1.2 仿射超曲面的中心仿射微分几何

设 $x: M^n \to \mathbb{R}^{n+1}$ 是一个局部严格凸的中心仿射超曲面, 其位置向量场始终与 $x(M^n)$ 是横截的. 于是, 对于任意 $X, Y \in \Gamma(TM)$, D_XY 具有如下切部和横截部分的分解:

$$D_XY = \nabla_XY + h(X,Y)(-\varepsilon x), \quad \varepsilon = \pm 1, \tag{1.6}$$

其中选取 $\varepsilon = 1$ 或 $\varepsilon = -1$ 使 h 是正定的. 称 ∇ 和 h 分别为 M^n 上的诱导仿射联络和中心仿射度量. 记 $\hat{\nabla}$ 为 h 的 Levi-Civita 联络, 则称 $K_XY := K(X,Y) := \nabla - \hat{\nabla}$ 为差张量. 称 $C := \nabla h$ 为三次形式. 同样地, 有全对称关系 $C(X,Y,Z) = -2h(K_XY,Z)$. 称 $T = \frac{1}{n}\mathrm{Tr}(K)$ 为 Tchebychev 向量场, $T^\# := h(T,\cdot)$ 为 Tchebychev 形式, $\mathcal{T} := \hat{\nabla}T$ 为 $x: M^n \to \mathbb{R}^{n+1}$ 的中心仿射型算子. 记 $\widetilde{K}$ 和 $\widetilde{C}$ 分别为 K 和 C 对应的迹零 (trace-free) 形式, 即 $\tilde{C}(X,Y,Z) = -2h(\tilde{K}(X,Y),Z)$ 且

$$h(\tilde{K}(X,Y),Z) = h(K(X,Y),Z) - \frac{1}{n+2}[T^\sharp(X)h(Y,Z) + T^\sharp(Y)h(X,Z) + T^\sharp(Z)h(X,Y)]. \tag{1.7}$$

类似于等仿射超曲面中仿射超球面, 满足 $\mathcal{T} = \lambda \mathrm{id}$ 的中心仿射超曲面称为中心仿射 Tchebychev 超曲面.

对于中心仿射超曲面, 如下的可积性条件成立:

$$\hat{R}(X,Y)Z = \varepsilon(h(Y,Z)X - h(X,Z)Y) - [K_X, K_Y]Z, \tag{1.8}$$

$$(\hat{\nabla}_ZK)(X,Y) = (\hat{\nabla}_XK)(Z,Y). \tag{1.9}$$

关于中心仿射超曲面理论, Wang [75] 作出了重要贡献, 特别是引入了中心仿射型算子的概念, 并与合作者开创了关于中心仿射 Tchebychev 超曲面的研究 (参见文献 [48,61]).

类似于定理 1.1 和 1.3, 对于中心仿射超曲面, 有下述基本结果:

定理 1.4 (参见文献 [67, 第 7.1 小节] 和 [48, 引理 2.1]) 中心仿射超曲面 $x: M^n \to \mathbb{R}^{n+1}$ 是二次超曲面当且仅当它满足 $\tilde{K} = 0$.

定理 1.5 (参见文献 [56, 定理 4.3]、[17, 定理 1.2] 和 [18, 定理 1.7]) 设 $x: M \to \mathbb{R}^{n+1}$ 是局部严格凸紧致的中心仿射 Tchebychev 超曲面, 则 $x(M)$ 是包含原点在内部的椭球面.

注 1.2 2000 年, Binder 和 Simon [3] 提供了关于仿射微分几何研究进展的一个综述, 其内容侧重于未解决问题集及其研究概述, 并收录了截至当年的最新文献.

2 仿射极大超曲面的研究

与 Euclid 空间中极小子流形研究具有极其重要性一样, 仿射极大超曲面的研究在仿射微分几何中同样如此, 特别是仿射 Bernstein 问题的研究获得了极大的关注. 这里 "仿射极大" 名称源于 Calabi [6] 关于仿射体积二阶变分的计算结果 (参见文献 [55, 定理 5.5]). 关于仿射极大超曲面有大量的研究, 相关内容可参见文献 [44,58].

2.1 仿射极大超曲面的方程

局部严格凸的仿射超曲面在局部上可以表示为一个函数的图像

$$M := \{\boldsymbol{x} = (x^1, \dots, x^{n+1}) \mid x^{n+1} = f(x), x = (x^1, \dots, x^n) \in \Omega\},$$

其中 f 是定义在区域 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 上的光滑凸函数. M 的仿射度量 h 可表示为

$$h = \sum h_{ij}\, dx^i\, dx^j, \quad h_{ij} = \left[\det\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j}\right)\right]^{-1/(n+2)} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j}. \tag{2.1}$$

令 Δ 表示仿射度量 h 的 Laplace 算子, 即

$$\Delta := \frac{1}{\sqrt{\det(h_{kl})}} \sum \frac{\partial}{\partial x^i}\left(\sqrt{\det(h_{kl})} h^{ij} \frac{\partial}{\partial x^j}\right), \quad (h^{ij}) = (h_{ij})^{-1},$$

则仿射法矢 $\xi = \frac{1}{n}\Delta \boldsymbol{x}$. 记

$$\rho := \left[\det\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j}\right)\right]^{-1/(n+2)}. \tag{2.2}$$

则有 $\sqrt{\det(h_{kl})} = \frac{1}{\rho}$, 且 Δ 可以写作

$$\Delta = \sum h^{ij} \frac{\partial^2}{\partial x^i \partial x^j} - \frac{2}{\rho^2} \sum f^{ij} \frac{\partial \rho}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial x^j} + \frac{1}{\rho} \sum \frac{\partial f^{ij}}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial x^j}, \tag{2.3}$$

其中, (f^{ij}) 表示 (f_{ij}) 的逆矩阵, $f_{ij} := \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j}$. 对 $\sum f^{ik} f_{kj} = \delta^i_j$ 求导, 得到

$$\sum_{i,k} \frac{\partial f^{ik}}{\partial x^i} f_{kj} = -\sum_{i,k} f^{ik} \frac{\partial f_{kj}}{\partial x^i} = \frac{n+2}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial x^j}.$$

从而有

$$\sum_i \frac{\partial f^{ik}}{\partial x^i} = \frac{n+2}{\rho} \sum_j f^{jk} \frac{\partial \rho}{\partial x^j}. \tag{2.4}$$

将 (2.4) 代入 (2.3), 则可进一步将仿射度量的 Laplace 算子写为

$$\Delta = \frac{1}{\rho} \sum f^{ij} \frac{\partial^2}{\partial x^i \partial x^j} + \frac{n}{\rho^2} \sum f^{ij} \frac{\partial \rho}{\partial x^j} \frac{\partial}{\partial x^i}. \tag{2.5}$$

在仿射超曲面理论中, 仿射余法矢是一个重要的概念. 对于上述仿射超曲面 M, 其仿射余法矢 U 可表示为

$$U = \left[\det\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^j \partial x^i}\right)\right]^{-\frac{1}{n+2}} \left(-\frac{\partial f}{\partial x^1}, \dots, -\frac{\partial f}{\partial x^n}, 1\right). \tag{2.6}$$

一般地, 具有仿射平均曲率 L_1 的局部严格凸仿射超曲面满足方程 (参见文献 [55, 推论 2.11])

$$\Delta U = -nL_1 U. \tag{2.7}$$

于是, 得到 f 满足的偏微分方程

$$\Delta\left\{\left[\det\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^i\partial x^j}\right)\right]^{-\frac{1}{n+2}}\right\}=-nL_1\left[\det\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^i\partial x^j}\right)\right]^{-\frac{1}{n+2}}. \tag{2.8}$$

使用前述记号, 方程 (2.8) 可简写为 $\Delta\rho=-nL_1\rho$. 这实际上给出了函数图像超曲面的仿射平均曲率 L_1 的计算公式. 特别地, M 是仿射极大超曲面当且仅当 f 满足如下的偏微分方程:

$$\Delta\left\{\left[\det\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^i\partial x^j}\right)\right]^{-\frac{1}{n+2}}\right\}=0. \tag{2.9}$$

令 $w=\rho^{n+1}$, 并记矩阵 (f_{ij}) 的代数余子式矩阵为 (U^{ij}), 即 $U^{ij}=\det(f_{kl})f^{ij}$, 则根据 (2.5) 有

$$\sum U^{ij}w_{ij}=\sum\rho^{-(n+2)}f^{ij}(n+1)\left(\rho^n\frac{\partial^2\rho}{\partial x^i\partial x^j}+n\rho^{n-1}\frac{\partial\rho}{\partial x^i}\frac{\partial\rho}{\partial x^j}\right)=\frac{n+1}{\rho}\Delta\rho. \tag{2.10}$$

于是, (2.8) 可改写为 $\sum U^{ij}w_{ij}=-n(n+1)L_1$. M 是仿射极大超曲面当且仅当 f 满足

$$\sum U^{ij}w_{ij}=0. \tag{2.11}$$

2.2　仿射极大曲面的 Weierstrass 表示

根据方程 (2.9) 可知, 局部上的仿射极大超曲面是广泛存在的. 特别地, 在 $n=2$ 的情形, 仿射极大曲面可以完全由对应的仿射余法矢表出而得到所谓的仿射 Weierstrass 表示 (参见文献 [53, 55, 68]).

设 $x: M\to\mathbb{R}^3$ 为仿射极大曲面, U 为其仿射余法矢, (u,v) 为仿射度量 h 的等温参数, 则有

$$h=\mathrm{Det}(U_u,U_v,U)(du^2+dv^2). \tag{2.12}$$

于是, 仿射极大曲面方程 $\Delta U=0$ 表明 U 的分量函数 $U^1(u,v)$、$U^2(u,v)$ 和 $U^3(u,v)$ 都是 Euclid 平面 $\mathbb{R}^2$ 上的调和函数.

反之, 若在 $\mathbb{R}^2$ 中一个单连通域 Ω 上给定 $U=(U^1(u,v),U^2(u,v),U^3(u,v))$, 且满足

(i) U^1、U^2 和 U^3 是 $\mathbb{R}^2$ 上 Euclid 度量的调和函数;

(ii) $\mathrm{Det}(U_u,U_v,U)>0$ 在 Ω 上成立,

则 Weierstrass 表示

$$x=\int_{(u_0,v_0)}^{(u,v)}([U,U_v]du-[U,U_u]dv),\quad (u_0,v_0),(u,v)\in\Omega \tag{2.13}$$

定义了 $\mathbb{R}^3$ 中的一个局部严格凸仿射极大曲面.

根据仿射极大曲面的 Weierstrass 表示, 下面列举几个简单例子.

例 2.1　对于 $\Omega=\mathbb{R}^2$, 由 $U=(1,u,v)$ 定义的仿射极大曲面为椭圆抛物面

$$x=\left(\frac{1}{2}(u^2+v^2),-u,-v\right).$$

例 2.2　对于 $\Omega=\{(u,v)\in\mathbb{R}^2\mid u>0\}$, 由 $U=(1,u^2-v^2,v)$ 定义的仿射极大曲面为

$$x=\left(\frac{1}{3}u^3+uv^2,-u,-2uv\right),\quad u>0.$$

例 2.3　对于 $\Omega=\{(u,v)\in\mathbb{R}^2\mid v<0<u\}$, 由 $U=(u,v,2uv)$ 定义的仿射极大曲面为

$$x=\left(-\frac{2}{3}v^3,-\frac{2}{3}u^3,\frac{1}{2}(u^2+v^2)\right),\quad v<0<u.$$

2.3 仿射 Bernstein 问题

类似于 Euclid 空间情形, 在仿射空间中也不存在紧致的仿射极大超曲面. 对于非紧致情形, 由于仿射超曲面上既有仿射度量对应的完备性概念, 又有通过仿射空间 $\mathbb{R}^{n+1}$ 诱导的 Euclid 完备性概念, 故在 $n=2$ 的曲面情形, 陈省身和 Calabi 关于仿射极大曲面分别提出了如下的仿射 Bernstein 问题:

猜想 2.1 (陈省身猜测 [19, 20]) 设 $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ 是一个严格凸函数. 若

$$M=\{(x^1,x^2,f(x^1,x^2))\mid(x^1,x^2)\in\mathbb{R}^2\}$$

是一个仿射极大曲面, 则 M 一定是椭圆抛物面.

猜想 2.2 (Calabi 猜测 [6, 7]) 设 $x:M\to\mathbb{R}^3$ 是一个局部严格凸的仿射极大曲面. 如果 M 关于仿射度量是完备的, 则 $x(M)$ 一定是椭圆抛物面.

上述两个猜测目前均被推广到高维的版本, 即

猜想 2.3 (高维的陈省身猜测 [53]) 设 $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ 是一个严格凸函数. 若

$$M=\{(x^1,\dots,x^n,f(x^1,\dots,x^n))\,|\,(x^1,\dots,x^n)\in\mathbb{R}^n\}$$

是一个仿射极大超曲面, 则 M 是椭圆抛物面.

猜想 2.4 (高维的 Calabi 猜测 [53]) 设 $x:M\to\mathbb{R}^{n+1}$ 是一个局部严格凸的仿射极大超曲面. 如果 M 关于仿射度量是完备的, 则 $x(M)$ 一定是椭圆抛物面.

易见, 仿射极大超曲面方程是一个极其复杂的 4 阶非线性偏微分方程. 前述的陈省身猜测和 Calabi 猜测断言: 在 Euclid 完备或仿射完备条件下, 该方程只有二次多项式形式的凸函数解.

陈省身猜测已于 2000 年由 Trudinger 和 Wang [69] 证明. Calabi 猜测也于 2001 年由 Li 和 Jia [41] 证明. 他们的结果陈述如下:

定理 2.1 (参见文献 [69, 定理 1.1]) $\mathbb{R}^3$ 中 Euclid 完备的仿射极大局部严格凸 C^2 曲面一定是椭圆抛物面.

定理 2.2 (参见文献 [41, 定理 1.2]) 设 $x:M\to\mathbb{R}^3$ 是一个局部严格凸的仿射极大曲面. 如果 M 关于仿射度量是完备的, 则它一定是椭圆抛物面.

上述两个重要定理的证明在文献 [55, 58] 中也都给出了完整的阐述 (参见文献 [59]). 目前, 高维 $(n\geqslant 3)$ 的陈省身猜测和 Calabi 猜测仍然是未解决问题.

注 2.1 关于仿射 Bernstein 问题, Li 等 [46] 研究了中心仿射极值超曲面. 在局部严格凸的中心仿射超曲面中, 对应于等仿射超曲面理论中椭圆抛物面的是 $x_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2}\cdots x_{n+1}^{\alpha_{n+1}}=1$, 其中 $\alpha_1>0,\dots,\alpha_{n+1}>0$. 关于这类中心仿射极值超曲面, 文献 [46] 基于一系列的研究结论, 提出了对应的中心仿射 Bernstein 问题.

3 仿射 Gauss-Kronecker 曲率为常值的仿射超曲面的研究

将局部严格凸仿射超球面的研究转化为凸函数的偏微分方程问题, 最早由 Blaschke 和 Calabi 提出. 具体而言, 若凸函数 $x^{n+1}=f(x^1,\dots,x^n)$ 的图像 M 是一个常平均曲率为 L_1 的仿射超球面, 则在相差一个仿射变换下有

(1) $L_1=0$ 当且仅当 $\det(\frac{\partial^2 f}{\partial x^i\partial x^j})=1$;

(2) $L_1 \neq 0$ 当且仅当 $\det(\frac{\partial^2 u}{\partial \xi_i \partial \xi_j}) = (L_1 u)^{-n-2}$, 其中, $u(\xi_1, \ldots, \xi_n) := \sum_{i=1}^n x^i \frac{\partial f}{\partial x^i} - f(x^1, \ldots, x^n)$, $\xi_i = \frac{\partial f}{\partial x^i}$ 为 $f(x^1, \ldots, x^n)$ 的 Legendre 变换函数, 而 $(x^1, \ldots, x^n) \mapsto (\xi_1, \ldots, \xi_n)$ 为函数 f 的梯度映射.

在仿射超曲面理论中, 另一个具有重要意义的转化是由 Li 等 [52] 给出的: 借助对仿射余法矢几何意义的观察, 仿射 Gauss-Kronecker 曲率为常值的双曲型仿射超曲面的研究, 在一定条件下等价于研究两个关联的二阶 Monge-Ampère 方程问题.

首先, 人们通常将仿射主曲率都是大于 0 的仿射超曲面称为椭圆型的, 而将仿射主曲率都小于 0 的仿射超曲面称为双曲型的. 可以证明, Gauss-Kronecker 曲率为常值的仿射完备椭圆型仿射超曲面一定是紧致的, 因而是椭球面 (参见文献 [55, 第 277 页]).

下面考虑双曲型的 Gauss-Kronecker 曲率为常值的 "完备" 超曲面, 并介绍有关问题的转化过程. 研究表明, 这是比双曲型仿射超球面更为广泛和复杂的一类仿射超曲面.

当 M 是双曲型时, 由仿射超曲面 M 的仿射型算子 S 诱导的 Weingarten 形式 $B(X,Y) = -h(SX,Y)$ 是对称正定的, 称其为 M 上的 Weingarten 度量. 下面假设 L_n 为常数, 并记 $S_n = (-1)^n L_n$. 于是有 $S_n > 0$, 在相差一个仿射变换下可不妨假设 $S_n = 1$. 文献 [52] 证明的第一个结果可归纳如下:

定理 3.1 (参见文献 [52, 定理 1] 和 [55, 定理 6.5]) 设 $x: M \to \mathbb{R}^{n+1}$ 是一个局部严格凸的双曲型仿射超曲面. 如果仿射 Gauss-Kronecker 曲率满足 $S_n = 1$ 且 Weingarten 度量是完备的, 则有

(1) 浸入 $x: M \to \mathbb{R}^{n+1}$ 可表示为一个凸函数 $x^{n+1} = f(x^1, \ldots, x^n)$ 的图像超曲面;

(2) 函数 f 的 Legendre 域 $\Omega := \{(\xi_1, \ldots, \xi_n) \mid \xi_i = \frac{\partial f}{\partial x^i}, 1 \leqslant i \leqslant n\}$ 是一个有界凸域;

(3) 函数 f 的 Legendre 变换函数 u 满足方程

$$\det\left(\frac{\partial^2 u}{\partial \xi_i \partial \xi_j}\right) = (-u^*)^{-n-2}, \quad (\xi_1, \ldots, \xi_n) \in \Omega, \tag{3.1}$$

其中 u^* 是下述偏微分方程边值问题的解:

$$\begin{cases} \det\left(\dfrac{\partial^2 u^*}{\partial \xi_i \partial \xi_j}\right) = (-u^*)^{-n-2}, \quad (\xi_1, \ldots, \xi_n) \in \Omega, \\ u^*|_{\partial\Omega} = 0. \end{cases} \tag{3.2}$$

反过来, 通过对方程组 (3.1) 和 (3.2) 解的性质研究和分析估计, 文献 [52] 证明了如下结果:

定理 3.2 (参见文献 [52, 定理3] 和 [55, 定理 6.11]) 任给 $\mathbb{R}^n$ 中一个具有 C^∞ 边界的有界凸域 Ω 和函数 $\varphi \in C^\infty(\partial\Omega)$, 可以在 $\mathbb{R}^{n+1}$ 中构造一个具有常值 Gauss-Kronecker 曲率的局部严格凸超曲面 M, 使得它是一个严格凸函数 f 的图像超曲面, Ω 是 f 的 Legendre 变换域, f 的 Legendre 变换函数 u 满足 $u|_{\partial\Omega} = \varphi$, 且 M 既是 Euclid 完备的也是 Weingarten 完备的.

文献 [52] 也研究了具有常值 Gauss-Kronecker 曲率且仿射完备的局部严格凸仿射超曲面的构造, 当区域 Ω 为单位球时证明了下述结果:

定理 3.3 (参见文献 [52, 定理 4] 和 [55, 定理 6.21]) 设 B_1 表示 $\mathbb{R}^n$ 中单位球, $\varphi \in C^\infty(B_1)$, 则利用边值问题

$$\begin{cases} \det\left(\dfrac{\partial^2 u}{\partial \xi_i \partial \xi_j}\right) = [1 - \sum(\xi_i)^2]^{-\frac{n+2}{2}}, \quad 在\ B_1\ 内, \\ u|_{\partial B_1} = \varphi \end{cases} \tag{3.3}$$

的解 u, 可以构造一个局部严格凸的仿射超曲面, 它满足 $S_n = 1$, 且它既是 Euclid 完备的也是仿射完备的.

关于预定仿射 Gauss-Kronecker 曲率仿射超曲面的研究背景、研究途径以及围绕这类问题的后续研究进展, 可进一步参见文献 [40, 54, 64, 73, 76].

4 具有平行 Fubini-Pick 形式仿射超曲面的研究

在 Riemann 流形的子流形理论中, 研究第二基本形式平行的子流形及其分类问题是重要的课题, 关于许多特定的外围 Riemann 流形也取得了非常丰富的成果 (部分结果可参见文献 [2]). 在仿射超曲面理论中, 与之对应的问题就是具有平行 Fubini-Pick 形式 (通常也称为平行三次形式) 仿射超曲面的分类研究. 需要指出的是, 在仿射超曲面上有两个自然的联络, 一个是由 $\mathbb{R}^{n+1}$ 中的平坦联络通过仿射法矢在超曲面上确定的 "诱导仿射联络", 另一个则是由超曲面上的仿射度量确定的 "Levi-Civita 联络". 上述平行性是关于这个 Levi-Civita 联络所言的. 具有平行 Fubini-Pick 形式的局部严格凸仿射曲面由 Li 和 Penn[49] 分类, 而 3 维和 4 维仿射超曲面的对应分类结果由 Dillen 和 Vrancken[21] 及 Dillen 等[23] 给出. 关于一般维数情形, 对于局部严格凸仿射超曲面, 上述问题已由 Hu 等[33] 完全解决.

为了阐述有关分类定理, 需首先介绍关于仿射超球面的 Calabi 复合 (也称为 Calabi 积) 概念.

4.1 双曲型仿射超球面的复合

给定两个局部严格凸的双曲型仿射超球面 $x': M' \to \mathbb{R}^{p+1}$ 和 $x'': M'' \to \mathbb{R}^{q+1}$, 维数分别为 p 和 q, 仿射平均曲率分别为 L_1' 和 L_1'', 则对于任意正数 C' 和 C'', 可构造一个 $p+q+1$ 维仿射超曲面如下:

$$\psi(t,u,v) = \left(C'x'(u)\exp\left\{\frac{-t}{p+1}\right\}, C''x''(v)\exp\left\{\frac{t}{q+1}\right\}\right), \tag{4.1}$$

其中, $u \in M'$, $v \in M''$, $t \in \mathbb{R}$. 可以证明, $\psi: M = \mathbb{R}\times M' \times M'' \to \mathbb{R}^{p+q+2}$ 是一个局部严格凸的双曲型仿射超球面, 其仿射平均曲率 L_1 与 L_1' 和 L_1'' 满足如下关系:

$$(-L_1)^{p+q+3}(p+q+2)^{p+q+2}(C')^{2p+2}(C'')^{2q+2} = (-L_1')^{p+2}(-L_1'')^{q+2}(p+1)^{p+1}(q+1)^{q+1}. \tag{4.2}$$

类似地, 可构造一个 $p+1$ 维仿射超曲面如下:

$$\phi(t,u) = \left(C'\exp\left\{\frac{at}{\sqrt{p+1}}\right\}x'(u), C''\exp\{-\sqrt{p+1}\,at\}\right), \quad u \in M', \quad t \in \mathbb{R}. \tag{4.3}$$

可以证明, $\phi: M = \mathbb{R}\times M' \to \mathbb{R}^{p+2}$ 是一个局部严格凸的双曲型仿射超球面, 其仿射平均曲率 L_1 与 L_1' 满足如下关系:

$$(-L_1)^{p+3}(p+2)^{p+2}(C')^{2(p+1)}(C'')^2 = (-L_1')^{p+2}(p+1)^{p+1}. \tag{4.4}$$

上述 $\psi: \mathbb{R}\times M' \times M'' \to \mathbb{R}^{p+q+2}$ 称为双曲型仿射超球面 $x': M' \to \mathbb{R}^{p+1}$ 和双曲型仿射超球面 $x'': M'' \to \mathbb{R}^{q+1}$ 的 Calabi 复合, 而称 $\phi: \mathbb{R}\times M' \to \mathbb{R}^{p+2}$ 为双曲型仿射超球面 $x': M' \to \mathbb{R}^{p+1}$ 和一个点的复合.

双曲型仿射超球面的 Calabi 复合概念最早由 Calabi[5] 提出, Dillen 和 Vrancken[22] 将其拓广为任意仿射超球面的复合并进行了系统性深入研究. Hu 等[32] 则对其进行了定性刻画并证明了下述重要定理. 关于 Calabi 复合的有关计算, 可参见文献 [32] 和 [55, 第 3.1.3 小节].

定理 4.1 (参见文献 [32, 定理 1]) 设 $\phi: M \to \mathbb{R}^{n+1}$ 是一个局部严格凸的双曲型仿射超球面, 仿射平均曲率为 $L_1 < 0$. 假设 TM 关于仿射度量可以分解为两个正交分布 $\mathcal{D}_1$ 和 $\mathcal{D}_2$ 的直和, 且 $\mathcal{D}_1$ 是一维的并由单位向量场 T 张成, 并存在常数 λ_1 和 λ_2, 使其差张量 K 满足条件

$$K(T,T) = \lambda_1 T, \quad K(T,U) = \lambda_2 U, \quad \forall U \in \mathcal{D}_2, \quad -L_1 + \lambda_1\lambda_2 - \lambda_2^2 = 0. \tag{4.5}$$

则 $\phi: M \to \mathbb{R}^{n+1}$ 可以分解为一个 $n-1$ 维双曲型仿射超球面与一个点的 Calabi 复合.

定理 4.2 (参见文献 [32, 定理 2]) 设 $\phi: M \to \mathbb{R}^{n+1}$ 是一个局部严格凸的双曲型仿射超球面, 仿射平均曲率为 $L_1 < 0$. 假设 TM 关于仿射度量可以分解为 3 个维数分别为 1、n_1 和 n_2 的正交分布 $\mathcal{D}_1$、$\mathcal{D}_2$ 和 $\mathcal{D}_3$ 的直和, 且 $\mathcal{D}_1$ 由单位向量场 T 张成, 并存在常数 λ_1、λ_2 和 λ_3, 使其差张量 K 满足条件

$$K(T,T) = \lambda_1 T, \quad K(T,V) = \lambda_2 V, \quad K(T,W) = \lambda_3 W, \quad K(V,W) = 0, \quad \forall V \in \mathcal{D}_2, \quad W \in \mathcal{D}_3, \tag{4.6}$$

其中, $\lambda_1 = \lambda_2 + \lambda_3$, $\lambda_2\lambda_3 = L_1$, 则 $\phi: M \to \mathbb{R}^{n+1}$ 可以分解为维数分别为 n_1 和 n_2 的两个双曲型仿射超球面的 Calabi 复合.

4.2 具有平行 Fubini-Pick 形式仿射超曲面的分类

正如文献 [22, 命题 2] 所指出的, 通过 Calabi 复合产生的双曲型仿射超球面具有平行的 Fubini-Pick 形式当且仅当对应的低维双曲型仿射超球面都具有平行的 Fubini-Pick 形式. 因此, 为了分类具有平行的 Fubini-Pick 形式的仿射超曲面, 需要介绍低维情形的分类定理.

定理 4.3 (参见文献 [49, 定理 1] 的等价形式, 或文献 [55, 定理 3.16]) 设 $x:\ M \to \mathbb{R}^3$ 是一个局部严格凸的仿射曲面, 满足 $\hat{\nabla} C = 0$. 则或者 $C = 0$, $x(M)$ 局部上为局部严格凸二次曲面; 或者 $C \neq 0$, 且在相差一个仿射变换下 $x(M)$ 局部上为曲面 $x_1x_2x_3 = 1$.

定理 4.4 (参见文献 [21] 中的主要定理 (main theorem) 或 [55, 定理 3.17]) 设 $x:\ M \to \mathbb{R}^4$ 是一个局部严格凸的仿射超曲面, 满足 $\hat{\nabla} C = 0$. 则或者 $C = 0$, $x(M)$ 局部上为局部严格凸二次超曲面; 或者 $C \neq 0$, 且在相差一个仿射变换下 $x(M)$ 局部上为下列两个超曲面之一: (i) $x_1x_2x_3x_4 = 1$, (ii) $(x_1^2 - x_2^2 - x_3^2)^3 x_4^2 = 1$.

Dillen 等 [23] 进一步给出了 4 维局部严格凸且满足 $\hat{\nabla} C = 0$ 的仿射超曲面分类, 并对于任意维数证明它们是齐性的且当 $C \neq 0$ 时一定是双曲型仿射超球面. 在低维分类定理和 Calabi 复合概念基础上, 一般维数情形的分类定理可叙述如下:

定理 4.5 (参见文献 [33] 中的分类定理 (classification theorem) 或 [55, 定理 3.23]) 设 $x:\ M \to \mathbb{R}^{n+1}$ $(n \geqslant 2)$ 是一个局部严格凸的仿射超曲面, 满足 $\hat{\nabla} C = 0$. 则或者 $C = 0$, $x(M)$ 局部上为局部严格凸二次超曲面; 或者 $C \neq 0$ 且局部上, 在相差一个仿射变换下, 下列情形之一成立.

(i) $n = \frac{1}{2}m(m+1) - 1, m \geqslant 3$, $x(M)$ 是齐性空间 $\mathbf{SL}(m,\mathbb{R})/\mathbf{SO}(m)$ 在 $\mathbb{R}^{n+1}$ 中的标准嵌入;

(ii) $n = m^2 - 1,\ m \geqslant 3$, $x(M)$ 是齐性空间 $\mathbf{SL}(m,\mathbb{C})/\mathbf{SU}(m)$ 在 $\mathbb{R}^{n+1}$ 中的标准嵌入;

(iii) $n = 2m^2 - m - 1,\ m \geqslant 3$, $x(M)$ 是齐性空间 $\mathbf{SU}^*(2m)/\mathbf{Sp}(m)$ 在 $\mathbb{R}^{n+1}$ 中的标准嵌入;

(iv) $n = 26$, $x(M)$ 是齐性空间 $\mathbf{E}_{6(-26)}/\mathbf{F}_4$ 在 $\mathbb{R}^{27}$ 中的标准嵌入;

(v) $x(M)$ 是一个具有平行 Fubini-Pick 形式的低一维双曲型仿射超球面与一个点的 Calabi 复合;

(vi) $x(M)$ 是两个具有平行 Fubini-Pick 形式的低维双曲型仿射超球面的 Calabi 复合.

值得指出的是, 上述定理中所列各个齐性空间作为仿射超曲面的标准嵌入以及这些标准嵌入是具有平行 Fubini-Pick 形式的双曲型仿射超球面等内容都是首次发现. 其论证过程详见原始文献 [31,33].

注 4.1 继定理 4.5 完成之后, 关于具有平行 Fubini-Pick 形式的一般非退化等仿射超曲面的研究, 也涌现出一些进展, 有关结果可参见文献 [28–30], 但这个问题在任意维数情形仍是未解决难题.

4.3 具有平行 Fubini-Pick 形式中心仿射超曲面的分类

在中心仿射微分几何中, 具有平行 Fubini-Pick 形式 (三次形式) 中心仿射超曲面的研究同样受到关注. 根据定理 1.4, 这时问题对应于研究 "具有平行的无迹三次形式中心仿射超曲面", 而且其分类问题同样涉及中心仿射超曲面的 (广义) Calabi 复合, 故也需要首先给出二维情形的分类. 实际上, 曲面情形的研究最早在文献 [62] 中被提出, 最终由文献 [13, 15] 完全解决, 并形成如下分类定理:

定理 4.6 (参见文献 [62, 定理 1]、[15, 定理 6.1] 和 [13, 定理 1.1]) 设 $x: M \to \mathbb{R}^3$ 是一个局部严格凸且具有平行无迹三次形式的中心仿射曲面. 则在中心仿射等价意义下, $x(M)$ 局部上为下列曲面之一:

(i) 局部严格凸二次曲面;

(ii) $x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} x_3^{\alpha_3} = 1$, 其中 α_1、α_2 和 α_3 均大于 0, 或者 $\alpha_2 > 0$, $\alpha_3 > 0$ 但 $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 < 0$;

(iii) $x_1^{\alpha_1}(x_2^2 + x_3^2)^{\alpha_2} \exp(\alpha_3 \arctan \frac{x_2}{x_3}) = 1$, 其中 $\alpha_1 < 0$ 且 $\alpha_1 + 2\alpha_2 > 0$;

(iv) $x_3 = x_1(\ln x_1 - \alpha_2 \ln x_2)$, 其中 $0 < \alpha_2 < 1$;

(v) $x_3 = \frac{1}{2x_1} x_2^2 + x_1 \ln x_1$,

其中, α_1、α_2 和 α_3 为常数, (x_1, x_2, x_3) 为 $\mathbb{R}^3$ 中标准坐标.

关于局部严格凸中心仿射超曲面的 (广义) Calabi 复合及其特征刻画参见文献 [15, 第 3 节] 和 [56]. 在此基础上借鉴定理 4.5 的证明路线可证明下述定理. 该定理同时蕴涵了局部严格凸且具有平行无迹三次形式的中心仿射超曲面的完全分类:

定理 4.7 (参见文献 [15, 定理 1.1] 和 [13, 定理 1.1]) 设 $x: M \to \mathbb{R}^{n+1}$ 是一个局部严格凸的中心仿射超曲面, 则 M 的差张量 K 和 Tchebychev 向量场 T 满足下述不等式:

$$\|\hat{\nabla} K\|^2 \geqslant \frac{3n^2}{n+2} \|\hat{\nabla} T\|^2, \tag{4.7}$$

其中 $\|\cdot\|$ 表示关于中心仿射度量 h 的张量范数. 进一步地, (4.7) 中等号恒成立的充分必要条件是 $\hat{\nabla}\tilde{K} = 0$, 即 $\hat{\nabla}\tilde{C} = 0$. 这时, 在相差一个中心仿射变换下, 如下情形之一发生:

(i) $x(M)$ 局部上为局部严格凸二次超曲面;

(ii) $x(M)$ 是一个低维的局部严格凸具有平行迹零三次形式的中心仿射超曲面与一个点的 Calabi 复合;

(iii) $x(M)$ 是两个低维的局部严格凸具有平行迹零三次形式的中心仿射超曲面的 Calabi 复合;

(iv) $n = \frac{1}{2}m(m+1) - 1$, $m \geqslant 3$, $x(M)$ 是 $\mathbf{SL}(m, \mathbb{R})/\mathbf{SO}(m)$ 在 $\mathbb{R}^{n+1}$ 中的标准嵌入;

(v) $n = m^2 - 1$, $m \geqslant 3$, $x(M)$ 是 $\mathbf{SL}(m, \mathbb{C})/\mathbf{SU}(m)$ 在 $\mathbb{R}^{n+1}$ 中的标准嵌入;

(vi) $n = 2m^2 - m - 1$, $m \geqslant 3$, $x(M)$ 是 $\mathbf{SU}^*(2m)/\mathbf{Sp}(m)$ 在 $\mathbb{R}^{n+1}$ 中的标准嵌入;

(vii) $n = 26$, $x(M)$ 是 $\mathbf{E}_{6(-26)}/\mathbf{F}_4$ 在 $\mathbb{R}^{27}$ 中的标准嵌入;

(viii) $x(M)$ 局部上为 $x_{n+1} = \frac{1}{2x_1} \sum_{k=2}^n x_k^2 + x_1 \ln x_1$.

注 4.2 对于非退化的中心仿射超曲面, Li 和 Wang [56] 率先在 $\hat{\nabla} C = 0$ 和中心仿射度量平坦的条件下研究分类问题, 并得到部分的分类结果.

注 4.3 与平行 Fubini-Pick 形式密切相关的课题还包括等仿射微分几何中迷向仿射超球面的研究与中心仿射微分几何中的迷向中心仿射超曲面的研究. 对于局部严格凸的仿射超曲面, 这两个问题均已得到完全解决, 详见文献 [4, 14].

注 4.4　近年来, 文献 [36,78,79] 对于 Calabi 法化下的凸函数图像超曲面 (简称 Calabi 超曲面), 也研究了在 Fubini-Pick 形式平行条件下的分类问题. 这时, 需要定义相应的 Calabi 复合概念, 并首先给出低维情形的分类结果.

5　与仿射极大曲面方程相关的问题研究

由 (2.11) 知, 严格凸函数 $x^{n+1}=f(x^1,\dots,x^n)$ 的图像 M 是仿射极大超曲面当且仅当其满足方程

$$\sum U^{ij}w_{ij}=0,\quad w:=\left[\det\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^i\partial x^j}\right)\right]^{-(n+1)/(n+2)}. \tag{5.1}$$

高维的陈省身猜测指出方程 (5.1) 定义在 $\mathbb{R}^n$ 上的解为二次多项式. 定理 2.1 表明猜测对 $n=2$ 成立.

一般地, Trudinger 和 Wang [70] 考虑了 4 阶偏微分方程

$$\sum U^{ij}w_{ij}=0,\quad w:=\left[\det\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^i\partial x^j}\right)\right]^{a},\quad (x^1,\dots,x^n)\in\mathbb{R}^n,\quad a\in\mathbb{R} \tag{5.2}$$

的严格凸函数的解 f, 并证明其具有如下的 Bernstein 性质:

定理 5.1 (参见文献 [70, 定理 3.2])　对于 $n=2$, 若常数 $a>0$, 则方程 (5.2) 的解只有二次多项式函数.

进一步地, Li 和 Jia [45] 关于方程 (5.2) 证明了下述结果:

定理 5.2 (参见文献 [45, 定理 1])　对于 $n=2$, 若常数 $a\leqslant-\frac{3}{4}$, 则方程 (5.2) 的解只有二次多项式函数.

注 5.1　(1) 当 $a=-\frac{3}{4}$ 时, 定理 5.2 提供了仿射极大曲面陈省身猜测的一个新的解析证明.

(2) 当 $a=-1$ 时, 方程 (5.2) 是一个特殊的 Abreu 方程. 定理 5.2 提供了这类方程的 Bernstein 性质.

值得指出的是, 一般 $\mathbb{R}^n$ 中 Delzant 多面体 Δ 上的 Abreu 方程 $\sum U^{ij}w_{ij}=-L$ (其中 L 是 $\bar{\Delta}$ 上的光滑函数) 与环簇流形上极值 Kähler 度量的 Yau-Tian-Donaldson 猜想密切相关. Chen 等 [10,11] 证明了二维环簇流形上的 Yau-Tian-Donaldson 猜想. 最近, 关于任意维数环簇流形, 该猜想也已经由 Li 等 [47] 证明. 有关结果也可参见文献 [9], Donaldson [25] 在伦敦数学会 Newsletter 上关于环簇流形上极值 Kähler 度量发表的 Features 论文, 或 Li 和 Sheng [51] 最近撰写的综述文献.

关于 4 阶偏微分方程的 Bernstein 性质与椭圆抛物面的特征刻画, 如下的相关结果值得提及:

定理 5.3 (参见文献 [43] 和 [55, 定理 5.38])　设 $x^{n+1}=f(x^1,\dots,x^n)$ 是定义在区域 $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ 上的严格凸函数, 且其图像 M 是仿射极大超曲面. 若 M 关于度量 $G^\sharp=\sum f_{ij}dx^idx^j$ 是完备的, 则当 $n=2,3$ 时, M 是椭圆抛物面.

定理 5.4 [57]　设 $x^{n+1}=f(x^1,\dots,x^n)$ 是定义在区域 $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ 上的严格凸函数, 且满足方程

$$\frac{\partial^2}{\partial x^k\partial x^l}\left(\ln\det\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^i\partial x^j}\right)\right)=0,\quad (x^1,\dots,x^n)\in\Omega,\quad 1\leqslant k,l\leqslant n. \tag{5.3}$$

若 f 的图像超曲面 M 关于度量 $G^{(\alpha)}:=[\det(\frac{\partial^2 f}{\partial x^k\partial x^l})]^{-\frac{\alpha}{n+2}}\sum f_{ij}dx^idx^j$ 是完备的且 $\alpha\neq n+2$, 则 M 是椭圆抛物面. 但是, 当 $\alpha=n+2$ 时, 方程 (5.3) 还具有非二次多项式函数的 $G^{(n+2)}$- 完备解

$$f(x^1,\dots,x^n)=\exp\{x^1\}+\sum_{i=2}^n(x^i)^2.$$

注 5.2 进一步研究方程 (5.2) 的拓广, 人们还得到了其他一些类似方程的 Bernstein 性质, 有关研究可参见文献 [26, 34, 35, 42, 50, 58, 74, 77, 80, 81].

Donaldson [24] 还进一步研究了凸区域 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 上关于严格凸函数 $f(x^1, \dots, x^n)$ 的方程

$$\sum U^{ij}\psi(H)_{ij} = 0, \quad H := \det\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j}\right), \quad (x^1, \dots, x^n) \in \Omega, \tag{5.4}$$

其中 ψ 是定义在 $(0, +\infty)$ 上的光滑函数, 且满足 $\psi'(t) \neq 0$.

Cao 等 [8] 证明了方程 (5.4) 在一定条件下同样具有 Bernstein 性质:

定理 5.5 [8] 设 $f(x^1, x^2)$ 是定义在全平面 $\mathbb{R}^2$ 上满足方程 (5.4) 的光滑凸函数, 且存在负常数 r 使得函数 ψ 还满足条件 $r \leqslant \frac{t\psi''(t)}{\psi'(t)} \leqslant -2$, 则函数 f 一定是二次多项式.

参考文献

1 Antić M, Li H Z, Vrancken L, et al. Affine hypersurfaces with constant sectional curvature. Pacific J Math, 2021, 310: 275–302
2 Berndt J, Console S, Olmos C. Submanifolds and Holonomy, 2nd ed. Monographs and Research Notes in Mathematics. Boca Raton: CRC Press, 2016
3 Binder Th, Simon U. Progress in affine differential geometry—problem list and continued bibliography. In: Geometry and Topology of Submanifolds X. River Edge: World Sci Publ, 2000, 1–17
4 Birembaux O, Djorić M. Isotropic affine spheres. Acta Math Sin (Engl Ser), 2012, 28: 1955–1972
5 Calabi E. Complete affine hyperspheres, I. Sympos Math, 1972, 10: 19–38
6 Calabi E. Hypersurfaces with maximal affinely invariant area. Amer J Math, 1982, 104: 91–126
7 Calabi E. Convex affine maximal surfaces. Results Math, 1988, 13: 199–223
8 Cao L, Sheng L, Lian Z. A Bernstein property of certain types of fourth order partial differential equations. J Math Anal Appl, 2018, 461: 777–795
9 Chen B H, Han Q, Li A M, et al. Prescribed scalar curvatures for homogeneous toric bundles. Differential Geom Appl, 2019, 63: 186–211
10 Chen B H, Li A M, Sheng L. Extremal metrics on toric surfaces. Adv Math, 2018, 340: 363–405
11 Chen B H, Li A M, Sheng L. Affine techniques on extremal metrics on toric surfaces. Adv Math, 2018, 340: 459–527
12 Cheng S Y, Yau S T. Complete affine hypersurfaces. Part I. The completeness of affine metrics. Comm Pure Appl Math, 1986, 39: 839–866
13 Cheng X X, Hu Z J. An optimal inequality on locally strongly convex centroaffine hypersurfaces. J Geom Anal, 2018, 28: 643–655
14 Cheng X X, Hu Z J. Classification of locally strongly convex isotropic centroaffine hypersurfaces. Differential Geom Appl, 2019, 65: 30–54
15 Cheng X X, Hu Z J, Moruz M. Classification of the locally strongly convex centroaffine hypersurfaces with parallel cubic form. Results Math, 2017, 72: 419–469
16 Cheng X X, Hu Z J, Moruz M, et al. On product affine hyperspheres in $\mathbb{R}^{n+1}$. Sci China Math, 2020, 63: 2055–2078
17 Cheng X X, Hu Z J, Vrancken L. Every centroaffine Tchebychev hyperovaloid is ellipsoid. Pacific J Math, 2021, 315: 27–44
18 Cheng X X, Hu Z J, Yao Z K. A rigidity theorem for centroaffine Chebyshev hyperovaloids. Colloq Math, 2019, 157: 133–141
19 Chern S S. The mathematical works of Wilhelm Blaschke. Abh Math Semin Univ Hambg, 1973, 39: 1–9
20 Chern S S. Affine minimal hypersurfaces. In: Minimal Submanifolds and Geodesics. Amsterdam-New York: North-Holland, 1979, 17–30; see also Selected Papers of S. S. Chern, vol. III. Berlin: Springer, 1989, 425–438
21 Dillen F, Vrancken L. 3-dimensional affine hypersurfaces in $\mathbb{R}^4$ with parallel cubic form. Nagoya Math J, 1991, 124: 41–53
22 Dillen F, Vrancken L. Calabi-type composition of affine spheres. Differential Geom Appl, 1994, 4: 303–328
23 Dillen F, Vrancken L, Yaprak S. Affine hypersurfaces with parallel cubic form. Nagoya Math J, 1994, 135: 153–164
24 Donaldson S K. A generalised Joyce construction for a family of nonlinear partial differential equations. J Gökova Geom Topol GGT, 2009, 3: 1–8
25 Donaldson S K. Extremal Kähler metrics and convex analysis. Lond Math Soc Newsl, 2022, 500: 32–36
26 Du S Z. Bernstein problem of affine maximal type hypersurfaces on dimension $N \geqslant 3$. J Differential Equations, 2020, 269: 7429–7469

27 Gigena S. On a conjecture by E. Calabi. Geom Dedicata, 1981, 11: 387–396

28 Hu Z J, Li C C. The classification of 3-dimensional Lorentzian affine hypersurfaces with parallel cubic form. Differential Geom Appl, 2011, 29: 361–373

29 Hu Z J, Li C C, Li H Z, et al. The classification of 4-dimensional non-degenerate affine hypersurfaces with parallel cubic form. J Geom Phys, 2011, 61: 2035–2057

30 Hu Z J, Li C C, Li H Z, et al. Lorentzian affine hypersurfaces with parallel cubic form. Results Math, 2011, 59: 577–620

31 Hu Z J, Li H Z, Simon U, et al. On locally strongly convex affine hypersurfaces with parallel cubic form. Part I. Differential Geom Appl, 2009, 27: 188–205

32 Hu Z J, Li H Z, Vrancken L. Characterizations of the Calabi product of hyperbolic affine hyperspheres. Results Math, 2008, 52: 299–314

33 Hu Z J, Li H Z, Vrancken L. Locally strongly convex affine hypersurfaces with parallel cubic form. J Differential Geom, 2011, 87: 239–307

34 Jia F, Li A M. Locally strongly convex hypersurfaces with constant affine mean curvature. Differential Geom Appl, 2005, 22: 199–214

35 Jia F, Li A M. Interior estimates for solutions of a fourth order nonlinear partial differential equation. Differential Geom Appl, 2007, 25: 433–451

36 Lei M X, Xu R W. Classification of Calabi hypersurfaces in $\mathbb{R}^{n+1}$ with parallel Fubini-Pick form. arXiv:2112.01947, 2021

37 Li A M. Calabi conjecture on hyperbolic affine hyperspheres. Math Z, 1990, 203: 483–491

38 Li A M. A characterization of ellipsoids. Results Math, 1991, 20: 657–659

39 Li A M. Calabi conjecture on hyperbolic affine hyperspheres (2). Math Ann, 1992, 293: 485–493

40 Li A M. Spacelike hypersurfaces with constant Gauss-Kronecker curvature in the Minkowski space. Arch Math, 1995, 64: 534–551

41 Li A M, Jia F. The Calabi conjecture on affine maximal surfaces. Results Math, 2001, 40: 265–272

42 Li A M, Jia F. Euclidean complete affine surfaces with constant affine mean curvature. Ann Global Anal Geom, 2003, 23: 283–304

43 Li A M, Jia F. A Bernstein property of affine maximal hypersurfaces. Ann Global Anal Geom, 2003, 23: 359–372

44 Li A M, Jia F. Affine maximal hypersurfaces. In: PDEs, Submanifolds and Affine Differential Geometry. Banach Center Publications, vol. 69. Warsaw: Polish Acad Sci Inst Math, 2005, 43–65

45 Li A M, Jia F. A Bernstein property of some fourth order partial differential equations. Results Math, 2009, 56: 109–139

46 Li A M, Li H Z, Simon U. Centroaffine Bernstein problems. Differential Geom Appl, 2004, 20: 331–356

47 Li A M, Lian Z, Sheng L. Extremal metrics on toric manifolds and homogeneous toric bundles. J Reine Angew Math, 2023, 798: 237–259

48 Li A M, Liu H L, Schwenk-Schellschmidt A, et al. Cubic form methods and relative Tchebychev hypersurfaces. Geom Dedicata, 1997, 66: 203–221

49 Li A M, Penn G. Uniqueness theorems in affine differential geometry. Part II. Results Math, 1988, 13: 308–317

50 Li A M, Sheng L. A Liouville theorem on the PDE $\det(f_{i\bar{j}}) = 1$. Math Z, 2021, 297: 1623–1632

51 Li A M, Sheng L. Extremal Kähler metrics of toric manifolds. Chin Ann Math Ser B, 2023, 44: 827–836

52 Li A M, Simon U, Chen B H. A two-step Monge-Ampére procedure for solving a fourth order PDE for affine hypersurfaces with constant curvature. J Reine Angew Math, 1997, 487: 179–200

53 Li A M, Simon U, Zhao G S. Global Affine Differential Geometry of Hypersurfaces. De Gruyter Expositions in Mathematics, vol. 11. Berlin: Walter de Gruyter & Co, 1993

54 Li A M, Simon U, Zhao G S. Hypersurfaces with prescribed affine Gauss-Kronecker curvature. Geom Dedicata, 2000, 81: 141–166

55 Li A M, Simon U, Zhao G S, et al. Global Affine Differential Geometry of Hypersurfaces, 2nd ed. De Gruyter Expositions in Mathematics, vol. 11. Berlin: De Gruyter, 2015

56 Li A M, Wang C P. Canonical centroaffine hypersurfaces in $\mathbb{R}^{n+1}$. Results Math, 1991, 20: 660–681

57 Li A M, Xu R W. A cubic form differential inequality with applications to affine Kähler-Ricci flat manifolds. Results Math, 2009, 54: 329–340

58 Li A M, Xu R W, Simon U, et al. Affine Bernstein Problems and Monge-Ampère Equations. Hackensack: World Sci Publ, 2010

59 Li A M, Xu R W, Simon U, et al. Notes on Chern's affine Bernstein conjecture. Results Math, 2011, 60: 133–155

60 Li A M, Zhao G S. Affine Differential Geometry (in Chinese). Chengdu: Sichuan Education Press, 1990 [李安民, 赵国松. 仿射微分几何. 成都: 四川教育出版社, 1990]

61 Liu H L, Wang C P. The centroaffine Tchebychev operator. Results Math, 1995, 27: 77–92

62 Liu H L, Wang C P. Centroaffine surfaces with parallel traceless cubic form. Bull Belg Math Soc Simon Stevin, 1997, 4: 493–499
63 Loftin J. Survey on affine spheres. In: Handbook of Geometric Analysis, No. 2. Advanced Lectures in Mathematics, vol. 13. Somerville: Int Press, 2010, 161–191
64 Nie X, Seppi A. Hypersurfaces of constant Gauss-Kronecker curvature with Li-normalization in affine space. Calc Var Partial Differential Equations, 2023, 62: 31
65 Pogorelov A V. On the improper convex affine hyperspheres. Geom Dedicata, 1972, 1: 33–46
66 Sasaki T. Hyperbolic affine hyperspheres. Nagoya Math J, 1980, 77: 107–123
67 Simon U, Schwenk-Schellschmidt A, Viesel H. Introduction to the Affine Differential Geometry of Hypersurfaces. Lecture Notes of the Science University of Tokyo. Tokyo: Science University of Tokyo, 1991
68 Terng C L. Affine minimal surfaces. In: Seminar on Minimal Submanifolds. Annals of Mathematics Studies, vol. 103. Princeton: Princeton Univ Press, 1983, 207–216
69 Trudinger N S, Wang X J. The Bernstein problem for affine maximal hypersurfaces. Invent Math, 2000, 140: 399–422
70 Trudinger N S, Wang X J. The Bernstein-Jörgens theorem for a fourth order partial differential equation. J Partial Differ Equ, 2002, 15: 78–88
71 Vrancken L. The Magid-Ryan conjecture for equiaffine hyperspheres with constant sectional curvature. J Differential Geom, 2000, 54: 99–138
72 Vrancken L, Li A M, Simon U. Affine spheres with constant affine sectional curvature. Math Z, 1991, 206: 651–658
73 Wang B F. The affine complete hypersurfaces of constant Gauss-Kronecker curvature. Acta Math Sin (Engl Ser), 2009, 25: 1353–1362
74 Wang B F, Li A M. Euclidean complete hypersurfaces with negative constant affine mean curvature. Results Math, 2008, 52: 383–398
75 Wang C P. Centroaffine minimal hypersurfaces in $\mathbb{R}^{n+1}$. Geom Dedicata, 1994, 51: 63–74
76 Wu Y D, Zhao G S. Hypersurfaces with Li-normalization and prescribed Gauss-Kronecker curvature. Results Math, 2011, 59: 563–576
77 Xu R W. Bernstein properties for some relative parabolic affine hyperspheres. Results Math, 2008, 52: 409–422
78 Xu R W, Lei M X. Classification of Calabi hypersurfaces with parallel Fubini-Pick form. Differential Geom Appl, 2021, 74: 101707
79 Xu R W, Lei M X. Classification of Calabi hypersurfaces in $\mathbb{R}^5$ with parallel Fubini-Pick form (in Chinese). Acta Math Sci Ser A Chin Ed, 2022, 42: 321–337 [许瑞伟, 雷淼鑫. $\mathbb{R}^5$ 中具有平行 Fubini-Pick 形式的 Calabi 超曲面的分类. 数学物理学报, 2022, 42: 321–337]
80 Xu R W, Li A M, Li X X. Euclidean complete α relative extremal hypersurfaces. Sichuan Daxue Xuebao, 2009, 46: 1217–1223
81 Xu R W, Xiong M, Sheng L. Bernstein theorems for complete α-relative extremal hypersurfaces. Ann Global Anal Geom, 2013, 43: 143–152

Recent progress on the study of affine hypersurfaces

Anmin Li & Zejun Hu

Abstract In this paper, focusing on our research interests we survey several recent important advances in geometry of affine hypersurfaces. The main contents include the study of affine maximal hypersurfaces, the affine hypersurfaces with constant affine Gauss-Kronecker curvature, the affine hypersurfaces with parallel Fubini-Pick forms as well as some corresponding results in centroaffine differential geometry. Finally, we also briefly introduce some of the achievements in the study of the Bernstein property of some fourth-order partial differential equations as well as our results about the Yau-Tian-Donaldson conjecture on the existence of extremal Kähler metrics on toric manifolds.

Keywords affine hypersurface, affine maximal hypersurface, Fubini-Pick form, affine hypersphere, toric manifold, extremal Kähler metric, Bernstein property, Yau-Tian-Donaldson conjecture

MSC(2020) 32Q15, 35J60, 53A15, 53B25, 53C40, 53C55

doi: 10.1360/SSM-2023-0192