投影谱的光滑性

献给吴从炘教授 85 华诞

卢玉峰, 祖超, 杨义新*

大连理工大学数学科学学院, 大连 116024

E-mail: lyfdlut@dlut.edu.cn, zuchao@mail.dlut.edu.cn, yangyixin@dlut.edu.cn

收稿日期: 2020-05-01; 接受日期: 2020-09-03; 网络出版日期: 2020-11-20; * 通信作者
国家自然科学基金 (批准号: 12031002 和 11971086) 资助项目

摘要 算子组的联合谱研究是算子理论的一个重要而充满挑战的研究方向. 本文研究算子组的投影联合谱的相关问题. 本文的主要结果肯定地回答了 He 等 (2017) 提出的一个公开问题, 并利用截断 Toeplitz 算子具体地构造了相关的例子.

关键词 投影谱 光滑性 截断 Toeplitz 算子

MSC (2010) 主题分类 47A13, 47L10

1 引言

对任意固定的正整数 n , $\mathbb{C}^n$ 表示 n 维复空间. 设 $\mathfrak{B}$ 是具有单位元的 Banach 代数, $A = (A_1, A_2, \dots, A_n)$ 为 n 元组, 其中 $A_i \in \mathfrak{B}$. 对 $z = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n$, 令 $A(z) = z_1 A_1 + z_2 A_2 + \dots + z_n A_n$. 定义 $P(A)$ 为使得 $A(z)$ 不可逆的点构成的集合, 即 $P(A) = \{z \in \mathbb{C}^n : A(z) \text{ 在代数 } \mathfrak{B} \text{ 中不可逆}\}$. 再令 $p(A) = (P(A) \setminus \{0\})/\mathbb{C}_\times$, 其中 $\mathbb{C}_\times$ 为非零复数构成的乘法群. 容易看出, $p(A)$ 为复射影空间 $\mathbb{P}^{n-1}$ 的子集, 称集合 $P(A)$ (或 $p(A)$) 为算子组 A 的投影联合谱, 简称为投影谱; 称它的补集 $P^c(A) = \mathbb{C}^n \setminus P(A)$ (或 $p^c(A) = \mathbb{P}^{n-1} \setminus p(A)$) 为投影预解集.

显然, $0 \in \mathbb{C}^n$ 平凡地包含于 $P(A)$. 对于单个元素, 我们知道其谱集总是非空的, 这一性质对于投影谱也同样成立. Yang^[1] 证明了对于具有单位元的 Banach 代数的任一 n 元组, 投影谱 $P(A)$ 总是非平凡的, 即 $P(A)$ 包含除 $0 \in \mathbb{C}^n$ 外的其他点. 然而不同的是 $P(A)$ 可能是整个 $\mathbb{C}^n$ (例如, A 为紧算子元组). 在 $P(A) = \mathbb{C}^n$ 这种情形下, 考虑扩充元组 $\hat{A} = (I, A_1, A_2, \dots, A_n)$. 这时, $P(\hat{A})$ 由 $\mathbb{C}^{n+1}$ 中那些使得

$$\hat{A}(\hat{z}) = z_0 I + z_1 A_1 + z_2 A_2 + \dots + z_n A_n = z_0 I + A(z)$$

英文引用格式: Lu Y F, Zu C, Yang Y X. Smoothness of the projective spectrum (in Chinese). Sci Sin Math, 2020, 50: 1847–1854, doi: 10.1360/SSM-2020-0134

不可逆的点 $\hat{z}$ 组成. 为了避免 $z_0 = 0$ 的平凡情形, 我们取 $z_0 = 1$ 并称 $A_*(z) = I + A(z)$ 为 $A(z)$ 的正规范化. 显然, 当 $\|A(z)\| < 1$ 时, $A_*(z)$ 总是可逆的. 因此, $P^c(A_*) = \mathbb{C}^n \setminus P(A_*)$ 总是非空的. 更进一步地, 不难看出 $p(\hat{A}) \cong P(A_*) \cup \{\hat{z} \in \mathbb{P}^n : z_0 = 0\}$, $p^c(\hat{A}) \cong P^c(A_*)$.

本文主要考虑紧算子元组的投影谱. 对于紧算子元组, Stessin 等^[2] 证明了 $P(A_*)$ 为解析子集, 即从局部来看, 它总是可以作为某一解析函数的零点集. 特别地, 如果 A 是交换算子元组, 那么 $P(A_*)$ 为一些超平面的并.

$P(A_*)$ 的光滑性这一概念是由 He 等^[3] 引入的. 在光滑性假设下, 可以自然地在 $P(A_*)$ 上构造一个全纯线丛, 并尝试通过这一全纯线丛的陈示性类探寻恰当的紧算子元组的几何不变量. 他们首先尝试研究简单的秩一算子元组 $A = \{e_1 \otimes e_1, \dots, e_n \otimes e_n\}$, 其中 $\{e_1, \dots, e_n\}$ 为线性无关向量. 通过直接计算, 对于 $n = 2, 3$ 的情形, 他们得到了 $P(A_*)$ 的光滑性的等价条件, 并证明了对于 $n = 2$ 的情形, 当 $P(A_*)$ 满足光滑性条件时, 其对应的全纯线丛的陈示性类总是非平凡的. 但随着 n 的增大, 情况变得尤为复杂, 很难通过直接计算从中挖取有效的信息. 尽管如此, 他们仍然注意到了某个本质性的条件, 并提出如下猜想:

猜想 1.1 设 $A = (e_1 \otimes e_1, e_2 \otimes e_2, \dots, e_n \otimes e_n)$, 其中 $\{e_i\}$ 为线性无关的向量组, 那么 $P(A_*)$ 是光滑的当且仅当 $\text{rank}(G^{-1} + \text{diag}\{z_1, z_2, \dots, z_n\}) \geq n - 1$ 对于任意 $z \in \mathbb{C}^n$ 成立, 其中 G 为向量组 $\{e_i\}$ 对应的 Gram 矩阵.

本文的主要工作是证明这一猜想. 证明主要由两个有限维情形下的引理构成, 我们也提出了关于这两个引理的无穷维版本的猜想. 此外, 由于上述猜想给出的等价条件看似过于苛刻, 我们给出了一类与截断 Toeplitz 算子相关的例子, 证明了其对应的向量组满足上述等价条件, 因而其投影谱是光滑的, 进而我们可以自然地在其投影谱上构造全纯线丛, 并研究其全纯线丛的结构与对应的截断 Toeplitz 算子之间的联系.

2 光滑性与核空间线丛

本节总是假设 A 为紧算子元组.

对于 $P(A_*)$ 中的某一点 λ , 如果存在 λ 的邻域 U 和有限秩算子元组 $F = (F_1, F_2, \dots, F_n)$ 满足 $\sum_{j=1}^n |z_j| \|A_j - F_j\| < 1, \forall z \in U$, 使得梯度

$$\nabla(\det K_{U,F}(z)) \neq 0, \quad \forall z \in U,$$

其中 $K_{U,F}(z) = I + (I + \sum_{j=1}^n z_j(A_j - F_j))^{-1} \sum_{j=1}^n z_j F_j$, 则称 λ 为正则点. 反之, 如果对于 λ 的任意邻域 U 与任意满足 $\sum_{j=1}^n |z_j| \|A_j - F_j\| < 1 (\forall z \in U)$ 的有限秩算子元组 $F = (F_1, F_2, \dots, F_n)$, 总存在 $z_0 \in U$ 使得梯度

$$\nabla(\det K_{U,F}(z_0)) = 0,$$

则称 λ 为非正则点. 如果 $P(A_*)$ 中的每个点都为正则点, 则称 $P(A_*)$ 为光滑的.

注 2.1 容易看出, 如果 A 是一迹类算子元组, 那么行列式 $\det(I + A(z))$ 是处处有定义的, 且是 $\mathbb{C}^n$ 上的全纯函数, 这时正则点的定义等价于函数 $\det(I + A(z))$ 在 $z = \lambda$ 处的正则性, 因此, 光滑性等价于函数 $\det(I + A(z))$ 在零点集的正则性. 对于一般的紧算子元组, 虽然行列式 $\det(I + A(z))$ 可能不是良定义的, 但局部来看, 由于 $A(z)$ 总是可以相似于某一迹类算子^[4], 因此是存在局部恰当定义的, 故上述光滑性的定义等价于流形 $\det(I + A(z)) = 0$ 的正则性. 所以不难看出光滑性这一概念是为了更好地研究投影谱的微分结构而自然引入的.

引理 2.1 (参见文献 [3, 引理 2.2]) 如果 λ 为 $P(A_*)$ 的一正则点, 则核空间 $\text{Ker}A_*(\lambda)$ 的维数恰为 1.

上述引理是文献 [3] 中的主要结果之一, 由此可以诱导出 $P(A_*)$ 上的核空间向量丛.

假定 $P(A_*)$ 是光滑的, 那么此时 $P(A_*)$ 可以看作 $\mathbb{C}^n$ 的 $n-1$ 维复子流形. 由于 A 是紧算子元组, 因此正则化线性束 $A_*(z) = I + \sum_{j=1}^n z_j A_j$ 是指标为 0 的 Fredholm 算子, $A_*(z)$ 是不可逆的当且仅当具有非零的核空间. 因此, 对于任意 $z \in P(A_*)$, 存在与之对应的非零核空间 $\text{Ker}A_*(z)$, 且由引理 2.1, 其维数恰为 1. 令

$$E_A := \bigvee_{z \in P(A_*)} \text{Ker}A_*(z) = \bigcup_{z \in P(A_*)} \{(z, \text{Ker}A_*(z))\}$$

且定义映射 $\pi: E_A \rightarrow P(A_*)$ 为 $\pi(z, \text{Ker}A_*(z)) = z$, 则有如下定理:

定理 2.1 (参见文献 [3, 定理 2.3]) 如果 $P(A_*)$ 是光滑的, 那么 (E_A, π) 为 $P(A_*)$ 上的全纯线丛.

设 $\mathcal{H}$ 为 Hilbert 空间, $e_1, e_2, \dots, e_n$ 均为单位向量, 且线性无关. 令 $A_i = e_i \otimes e_i$, $i = 1, \dots, n$. 考虑秩一算子元组 $A = (A_1, \dots, A_n)$, 一个自然的问题是, 对于怎样的向量组 $\{e_i\}$, 投影谱 $P(A_*)$ 是光滑的? 换言之, 如果投影谱 $P(A_*)$ 是光滑的, 能否给出关于向量组 $\{e_i\}$ 的刻画?

当 $n = 2$ 时, 简单的计算易得 $P(A_*)$ 是光滑的当且仅当 $\langle e_1, e_2 \rangle \neq 0$. 更进一步, 核空间线丛的陈示性类 $c_1(E_A) \in H^2(p(\hat{A}), \mathbb{Z})$ 是非平凡的.

当 $n = 3$ 时, 情况稍微变得有些复杂. 为了方便, 记 $G = (\langle e_j, e_i \rangle)_{ij}$ 为向量组 $\{e_i\}$ 所对应的 Gram 矩阵, 记 $X(z) = \text{diag}\{z_1, \dots, z_n\}$, $W(z) = I + X(z)G$.

定理 2.2 (参见文献 [3, 定理 3.3]) 对于算子元组 $A = (e_1 \otimes e_1, e_2 \otimes e_2, e_3 \otimes e_3)$, 下列条件等价:

- (1) $P(A_*)$ 是光滑的;
- (2) $\langle e_1, e_2 \rangle = \langle e_1, e_3 \rangle \langle e_3, e_2 \rangle \neq 0$ 或 $\langle e_2, e_3 \rangle = \langle e_2, e_1 \rangle \langle e_1, e_3 \rangle \neq 0$ 或 $\langle e_3, e_1 \rangle = \langle e_3, e_2 \rangle \langle e_2, e_1 \rangle \neq 0$ 或 $\langle e_1, e_2 \rangle \langle e_2, e_3 \rangle \langle e_3, e_1 \rangle$ 不为实数;
- (3) $\text{rank}(G^{-1} + X(z)) \geq 2, \forall z \in \mathbb{C}^3$;
- (4) $\text{rank}(W(z)) = 2, \forall z \in P(A_*)$.

3 证明

引理 3.1 设 A 和 B 为 $k \times k$ 的矩阵, 记 $f(\lambda) = \det(A + \lambda B)$, $\widetilde{H(\lambda)}$ 为矩阵 $A + \lambda B$ 的伴随矩阵, $P_i = e_i \otimes e_i$, 其中 $\{e_i\}$ 为 $\mathbb{C}^k$ 的标准正规正交基, 有

$$f'(\lambda) = \sum_{i=1}^k \det(P_i B + P_i^\perp (A + \lambda B)) = \text{Tr}(B \widetilde{H(\lambda)}). \quad (3.1)$$

证明 由导数定义, 有

$$\begin{aligned} f'(\lambda) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\det(A + \lambda B + hB) - \det(A + \lambda B)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left[\sum_{\sigma \in S_k} \prod_{i=1}^k (a_{i\sigma(i)} + \lambda b_{i\sigma(i)} + h b_{1\sigma(i)}) - \det(A + \lambda B) \right] \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left[\sum_{\sigma \in S_k} b_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \cdots a_{k\sigma(k)} + \sum_{\sigma \in S_k} a_{1\sigma(1)} b_{2\sigma(2)} a_{3\sigma(3)} \cdots a_{k\sigma(k)} + \cdots \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \sum_{\sigma \in S_k} a_{1\sigma(1)} \cdots a_{k-1\sigma(k-1)} b_{k\sigma(k)} \Big] + o(h) \\
 & = \sum_{i=1}^k \det(P_i B + P_i^\perp (A + \lambda B)) \\
 & = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^k B_{ij} (\widetilde{H(\lambda)})_{ji} \\
 & = \text{Tr}(B \widetilde{H(\lambda)}).
 \end{aligned}$$

证毕. □

推论 3.1 设矩阵元组 $A = (A_1, \dots, A_n)$, 其中 A_i 为 $k \times k$ 矩阵, 记 $H(z) = I + A(z) = (h_{ij})_{i,j=1}^k$, $P_i = e_i \otimes e_i$ ($\{e_i\}$ 为正规正交基), $H_{ij}(z)$ 为矩阵 $H(z)$ 的 (i, j) 元所对应的代数余子式. 再用 $\tilde{H}(z)$ 表示 $H(z)$ 的伴随矩阵, 即 $\tilde{H}(z) = (H_{ji}(z))_{ij}$, 则

$$\frac{\partial \det(I + A(z))}{\partial z_j} = \sum_{i=1}^k \det(P_i A_j + P_i^\perp (I + A(z))) = \text{Tr}(A_j \tilde{H}(z)).$$

因此, $\frac{\partial \det(I + A(z))}{\partial z_j} = 0$ 当且仅当 $\text{Tr}(A_j \tilde{H}(z)) = 0$.

注意到对于 $z \in P^c(A_*)$, $\tilde{H}(z) = \det(I + A(z))(I + A(z))^{-1}$, 因此上述公式即为

$$\frac{\partial \det(I + A(z))}{\partial z_j} = \det(I + A(z)) \text{Tr}(A_j (I + A(z))^{-1}). \quad (3.2)$$

特别地, 通过对公式 (参见文献 [2, 命题 5])

$$d \log(\det(I + A(z))) = \text{Tr}((I + A(z))^{-1} dA(z))$$

两边求偏导, 可以得到相同的结论.

一般地, 假定 $A = \{A_1, \dots, A_n\}$ 为一迹类算子元组, λ 为 $P(A_*)$ 的一正则点, 由引理 2.1 知,

$$\dim(\text{Ker}(I + A(\lambda))) = \dim(\text{Ker}(I + A^*(\lambda))) = 1.$$

取非零向量 $\varphi \in \text{Ker}(I + A(\lambda))$, $\psi \in \text{Ker}(I + A^*(\lambda))$, 此时 $\varphi \otimes \psi$ 可以作为 $\tilde{H}(\lambda)$ 在无穷维情形下的推广, 那么有如下猜想.

猜想 3.1 $\frac{\partial \det(I + A(z))}{\partial z_i}(\lambda) = 0$ 当且仅当 $\text{Tr}(A_i \varphi \otimes \psi) = \langle A_i \varphi, \psi \rangle = 0$.

下面来证明本文的关键引理.

引理 3.2 设 G 为 $k \times k$ 正定矩阵 ($G > 0$), X 为 $k \times k$ 对角矩阵, 且满足 $\text{rank}(G + X) = k - 1$, 那么在 $G + (I - P_i)X$ ($i = 1, \dots, k$) 这些矩阵中, 至少有一个是可逆的 (满秩的).

证明 我们采用归纳法来证明本引理.

$k = 1$ 时显然成立.

假设结论对于 $k \leq n$ 都成立, 当 $k = n+1$ 时, 反设存在正定矩阵 G_{n+1} 和对角矩阵 $X_{n+1} = \text{diag}\{z_1, \dots, z_n, z_{n+1}\}$ 使得 $\text{rank}(G_{n+1} + X_{n+1}) = n$ 且 $\det(G_{n+1} + (I - P_i)X_{n+1}) = 0$, $i = 1, \dots, n+1$, 我们的目标是从中找到矛盾, 为此, 我们分为两种情形进行讨论.

情形一 存在某个 $z_i = 0$, 即 $\prod_{i=1}^{n+1} z_i = 0$.

不失一般性, 假设 $z_{n+1} = 0$. 记 G_{n+1} 的逆矩阵为 H_{n+1} ($H_{n+1} > 0$), 那么, 对于任意的 $i \leq n$, $\det(G_{n+1} + (I - P_i)X_{n+1}) = 0$ 蕴涵

$$\begin{aligned}\det(I_{n+1} + (I_{n+1} - P_i)X_{n+1}H_{n+1}) &= \det \begin{pmatrix} I_n + (I_n - P_i)X_n H_n & * \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \det(I_n + (I_n - P_i)X_n H_n) \\ &= 0,\end{aligned}$$

即 $\det(H_n^{-1} + (I_n - P_i)X_n) = 0$. 另一方面,

$$\text{rank}(G_{n+1} + X_{n+1}) = \text{rank} \begin{pmatrix} I_n + X_n H_n & * \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = n$$

蕴涵 $\text{rank}(I_n + X_n H_n) = \text{rank}(H_n^{-1} + X_n) = n - 1$, 这表明如果存在 $n + 1$ 阶的反例, 且其中某个分量 $z_i = 0$ 时, 则可以从构造出 n 阶反例, 而这与归纳假设相矛盾.

情形二 $\prod_{i=1}^{n+1} z_i \neq 0$. 注意到 $\text{rank}(G_{n+1} + X_{n+1} - z_i P_i)$ 为 n 或 $n - 1$, 且如果取非零向量 $f \in \text{Ker}(G_{n+1} + X_{n+1})$, 那么对于满足 $\text{rank}(G_{n+1} + X_{n+1} - z_i P_i) = n - 1$ 的 i , f 也必然属于 $\text{Ker}(G_{n+1} + X_{n+1} - z_i P_i)$.

因此不妨假设当 $i \leq N_1$ 时,

$$\begin{aligned}\text{rank}(G_{n+1} + X_{n+1} - z_i P_i) &= n - 1, \quad \text{span}\{f, f_i\} = \text{Ker}(G_{n+1} + X_{n+1} - z_i P_i), \\ (G_{n+1} + X_{n+1})f_i &= z_i \langle f_i, e_i \rangle e_i, \quad \langle f_i, e_i \rangle \neq 0, \quad \langle f, e_i \rangle = 0.\end{aligned}$$

当 $N_1 < j \leq N_2$ 时,

$$\begin{aligned}\text{rank}(G_{n+1} + X_{n+1} - z_j P_j) &= n, \quad \text{span}\{f_j\} = \text{Ker}(G_{n+1} + X_{n+1} - z_j P_j), \\ (G_{n+1} + X_{n+1})f_j &= z_j \langle f_j, e_j \rangle e_j, \quad \langle f_j, e_j \rangle \neq 0, \quad \langle f, e_j \rangle \neq 0.\end{aligned}$$

当 $N_2 < k \leq n + 1$ 时,

$$\begin{aligned}\text{rank}(G_{n+1} + X_{n+1} - z_k P_k) &= n, \\ \text{Ker}(G_{n+1} + X_{n+1} - z_k P_k) &= \text{span}\{f\} = \text{Ker}(G_{n+1} + X_{n+1}), \quad \langle f, e_k \rangle = 0.\end{aligned}$$

首先说明 $0 \leq N_1 < N_2 < n + 1$, 即 j 和 k 各自构成的集合不为空集. 事实上, j 恰为向量 f 的非零分量所对应的指标, 因此 $N_1 < N_2$. 另一方面, 注意到 $\text{span}\{e_1, \dots, e_{N_2}\} \subset \text{Ran}(G_{n+1} + X_{n+1})$, 而 $G_{n+1} + X_{n+1}$ 并非满秩, 因此 $N_2 < n + 1$.

由于 $\text{span}\{e_1, \dots, e_{N_2}\} \subset \text{Ran}(G_{n+1} + X_{n+1})$, 如果取非零向量 $g \in \text{Ker}(G_{n+1} + X_{n+1}^*) = (\text{Ran}(G_{n+1} + X_{n+1}))^\perp$, 那么 $g = \sum_{k > N_2} \alpha_k e_k$. 不失一般性, 假设 $\alpha_{n+1} \neq 0$, 那么断言 $\text{rank}(G_n + X_n) = n - 1$ 且 $\det(G_n + X_n - z_i P_i) = 0, 1 \leq i \leq n$, 其中

$$G_{n+1} + X_{n+1} = \begin{pmatrix} G_n + X_n & * \\ * & g_{n+1, n+1} + z_{n+1} \end{pmatrix},$$

这显然与我们的归纳假设相矛盾, 因此引理得证.

下面来证明我们的断言. 首先验证对于任意 $1 \leq i \leq n$, $\det(G_n + X_n - z_i P_i) = 0$. 由于对于指标 i 和 k , f 同时属于 $\text{Ker}(G_{n+1} + X_{n+1} - z_i P_i)$ 和 $\text{Ker}(G_{n+1} + X_{n+1} - z_k P_k)$, 且 $\langle f, e_{n+1} \rangle = 0$, 因此, 由 f 的前 n 个分量构成的非零向量属于 $\text{Ker}(G_n + X_n - z_i P_i)$, 因此只需对指标 j 进行验证.

为了叙述方便, 用 g_i 表示矩阵 G_{n+1} 的第 i 列, 且设 $M = \text{span}\{z_i e_i + g_i \mid 1 \leq i \leq n\}$, 即矩阵 $G_{n+1} + X_{n+1}$ 的前 n 列所张成的空间, $N = \text{span}\{z_1 e_1 + g_1, \dots, z_{j-1} e_{j-1} + g_{j-1}, g_j, \dots, z_n e_n + g_n\}$, 即矩阵 $G_{n+1} + X_{n+1} - z_j P_j$ 的前 n 列所张成的空间. 我们断言 $N = M$. 事实上, $\langle f, z_j \rangle \neq 0$ 和 $\langle f, z_{n+1} \rangle = 0$ 表明 $z_j e_j + g_j \in N$ 且 $e_j \in M$, 因此 $M = N$. 进一步地, 由于 $\langle f, e_{n+1} \rangle = 0$ 蕴涵 $z_{n+1} e_{n+1} + g_{n+1} \notin M = N$, 因此 $\langle f_j, e_{n+1} \rangle = 0$.

最后验证 $\text{rank}(G_n + X_n) = n - 1$. 由于 G_{n+1} 是自伴的, 因此有

$$\begin{pmatrix} G_n + X_n^* & g_{n+1} \\ g_{n+1}^* & \overline{z_{n+1}} + g_{n+1,n+1} \end{pmatrix} g = 0.$$

由假设知, $\langle g, e_{n+1} \rangle = \alpha_{n+1} \neq 0$, 这表明向量 g_{n+1} 可由矩阵 $G_n + X_n^*$ 的列向量张成, 即 g_{n+1}^* 可由矩阵 $G_n + X_n$ 的行向量张成, 因此,

$$\text{rank}(G_n + X_n) = \text{rank} \begin{pmatrix} G_n + X_n \\ g_{n+1}^* \end{pmatrix} = n - 1.$$

证毕. □

关于上述引理, 我们有一个一般的猜想:

猜想 3.2 设 G 为正算子, X 为对角算子 (即在某一组正规正交基 $\{e_i\}$ 下的矩阵表示为对角矩阵), 满足 $\text{Ker}(G + X^*)$ 的维数恰为 1, 那么考虑算子列 $\{G + (I - P_i)X\}_{i=1}^\infty$, 其中 $P_i = e_i \otimes e_i$, 则至少存在某个 i 使得 $G + (I - P_i)X$ 的核空间为 $\{0\}$.

最后来证明主要定理:

定理 3.1 设算子元组 $A = (h_1 \otimes h_1, h_2 \otimes h_2, \dots, h_n \otimes h_n)$, 其中 $\{h_i\}$ 为线性无关向量组, 则 $P(A_*)$ 是光滑的当且仅当对于任意 $z \in \mathbb{C}^n$, $\text{rank}(G^{-1} + \text{diag}\{z_1, z_2, \dots, z_n\}) \geq n - 1$, 其中 G 为向量组 $\{h_i\}$ 所对应的 Gram 矩阵.

证明 设 $E = \text{span}\{h_i\}$, $\mathcal{H} = E \oplus E^\perp$, 则 $I + A(z)$ 相似于矩阵 $W(z) \oplus I_{E^\perp}$, 其中 $W(z) = I + X(z)G = (G^{-1} + X(z))G$, $X(z) = \text{diag}\{z_1, z_2, \dots, z_n\}$. 因此由引理 2.1, 必要性显然. 对于充分性, 由投影谱光滑性的定义, 这等价于证明 $\det(I + A(z)) = \frac{\partial \det(I + A(z))}{\partial z_i} = 0$ 与 $\text{rank}(I + X(z)G) = n - 1$ 不能同时成立, 即 $\det(G^{-1} + X(z)) = \frac{\partial \det(G^{-1} + X(z))}{\partial z_i} = 0$ 与 $\text{rank}(G^{-1} + X(z)) = n - 1$ 不能同时成立.

反设存在 z 使得 $\det(G^{-1} + X(z)) = \frac{\partial \det(G^{-1} + X(z))}{\partial z_i} = 0$ 与 $\text{rank}(G^{-1} + X(z)) = n - 1$ 同时成立. 我们取非零向量 $f \in \text{Ker}(G^{-1} + X(z))$, $g \in \text{Ker}(G^{-1} + X(z))^*$, 则易知 $G^{-1} + X(z)$ 的伴随矩阵具有 $Cf \otimes g$ ($C \neq 0$) 的形式. 由推论 3.1 知, $\frac{\partial \det(G^{-1} + X(z))}{\partial z_i} = 0$ 当且仅当 $\text{Tr}(e_i \otimes e_i \cdot f \otimes g) = \langle f, e_i \rangle \langle e_i, g \rangle = 0$. 这表明对于任意 i , $G^{-1} + X(z) - z_i P_i$ 总是不可逆的, 这与引理 3.2 相矛盾, 定理得证. □

4 具体例子

引言中提到过关于条件为虚设的担忧, 下面用具体例子来表明定理 3.1 的作用.

例 4.1 考虑矩阵 $G = (q^{|i-j|})_{ij}$, 其中 $0 < q < 1$, 即

$$G = \begin{pmatrix} 1 & q & q^2 & \cdots & q^{n-1} \\ q & 1 & q & \cdots & q^{n-2} \\ q^2 & q & 1 & \cdots & q^{n-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ q^{n-1} & q^{n-2} & q^{n-3} & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

注意到 G 可以看作 Toeplitz 算子的截断^[5], 记为 $G = I + \sum_{k=1}^{n-1} q^k (S^k + (S^*)^k)$, 其中 S 为向后移位算子, S^* 为向前移位算子, 矩阵表示为

$$S = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

且具有分解

$$G = C^* \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 - q^2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 - q^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 - q^2 \end{pmatrix} C,$$

其中 $C = I + \sum_{k=1}^{n-1} q^k S^k$, 矩阵表示为

$$C = \begin{pmatrix} 1 & q & q^2 & \cdots & q^{n-1} \\ 0 & 1 & q & \cdots & q^{n-2} \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & q^{n-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

上述分解表明 G 是正定的, 且如果将多项式 $\{\zeta^i\}_{i=0}^\infty$ 与可分 Hilbert 空间 $\mathcal{H}$ 的正规正交基等同起来, 那么 G 即为向量组 $\{e_i(\zeta) = q^i + \sqrt{1-q^2} \sum_{k=1}^i q^{i-k} \zeta^k, i = 0, 1, \dots, n-1\}$ 所对应的 Gram 矩阵.

下面验证 $\text{rank}(I + X(z)G) \geq n-1, \forall z \in \mathbb{C}^n$. 记 $I + X(z)G = (\delta_{ij} + z_i q^{|i-j|})$, 且设 $f = \{f_j\}_{j=1}^n \in \text{Ker}(I + X(z)G)$, 则有

$$f_i + z_i \left(\sum_{j < i} q^{i-j} f_j + \sum_{j \geq i} q^{j-i} f_j \right) = 0, \quad i = 1, \dots, n.$$

令 $i = 1$, 可得 $f_1(1 + z_1) + z_1 \sum_{j>1} q^{j-1} f_j = 0$. 如果 $z_1 \neq 0$, 那么 $\sum_{j>1} q^{j-1} f_j = -\frac{f_1(1+z_1)}{z_1}$. 因此, 对任意 $i > 1$, 有

$$\begin{aligned} f_i &= -z_i \left(\sum_{j<i} q^{i-j} f_j + q^{1-i} \left(\sum_{j>1} q^{j-1} f_j - \sum_{1<j<i} q^{j-1} f_j \right) \right) \\ &= -z_i \left(\sum_{j<i} q^{i-j} f_j - q^{1-i} \left(\sum_{1<j<i} q^{j-1} f_j \right) - q^{1-i} \frac{f_1(1+z_1)}{z_1} \right). \end{aligned}$$

归纳可知, 每个 f_i ($i > 1$) 都由 f_1 所完全确定, 因此, 核空间 $\text{Ker}(I + X(z)G)$ 的维数至多为 1.

如果 $z_1 = 0$, 那么 $f_1 = 0$, 我们继续对 z_2 进行类似的讨论, 如此下去, 不难得出 $\dim(\text{Ker}(I + X(z)G)) \leq 1$. 因此由定理 3.1 知, 向量组 $\{e_i\}$ 所对应的投影谱是光滑的.

当光滑性假设满足后, 我们自然好奇上述截断 Toeplitz 算子所诱导出的全纯线丛的结构, 以及其对应的陈示性类是否是非平凡的.

问题 4.1 刻画例子 4.1 所诱导的全纯线丛的结构.

参考文献

- 1 Yang R. Projective spectrum in Banach algebras. J Topol Anal, 2009, 1: 289–306
- 2 Stessin M, Yang R, Zhu K. Analyticity of a joint spectrum and a multivariable analytic Fredholm theorem. New York J Math, 2011, 17A: 39–44
- 3 He W, Wang X F, Yang R W. Projective spectrum and kernel bundle. II. J Operator Theory, 2017, 78: 417–433
- 4 Simon B. Trace Ideals and Their Applications, 2nd ed. Mathematical Surveys and Monograph, vol. 120. Providence: Amer Math Soc, 2005
- 5 Gohberg I, Goldberg S, Kaashoek M. Classes of Linear Operators, vol. 1. Operator Theory: Advances and Applications, vol. 49. Basel: Birkhäuser, 1990

Smoothness of the projective spectrum

Yufeng Lu, Chao Zu & Yixin Yang

Abstract The joint spectrum of operator groups is an important and challenging research direction in operator theory. In this paper, we study the projective joint spectrum of operator tuples. The main result of this paper is giving an affirmative answer to an open question raised by He et al. (2017) and constructs relevant examples by using the truncated Toeplitz operator.

Keywords projective spectrum, smoothness, truncated Toeplitz operator

MSC(2010) 47A13, 47L10

doi: 10.1360/SSM-2020-0134